## §3. Prehaces y Haces

Motivación: Sea $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $g : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ función holomorfa tal que $g(z) \neq 0$ $\forall z \in \mathcal{U}$. ¿Existe $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $g = e^f$?

La respuesta depende de $\mathcal{U}$:

a) Si $\mathcal{U} = \mathbb{C}$ la respuesta es sí: La función $f(z) = \int_1^z \frac{g'(s)}{g(s)}\, ds$ funciona ✓

b) Si $\mathcal{U} = \mathbb{C}^*$ la respuesta es no: Considerar $g = \mathrm{Id}$ (obtendríamos un logaritmo en todo $\mathbb{C}^*$, lo cual no es posible).

Por otro lado, localmente la respuesta es sí: basta tomar cualquier logaritmo en un pequeño disco y considerar $f = \log(g)$.

⇝ La noción de haz (Leray, 1945) fue creada para tomar en cuenta estas propiedades locales, y obtener a partir de ellas enunciados globales.

—— o ——

Durante toda esta sección $X$ será un espacio topológico.

Recuerdo: Una base $\mathcal{B}$ de $X$ es una colección de subconjuntos de $X$ tal que todo abierto de $X$ es unión de conjuntos abiertos en $\mathcal{B}$. Así,

$\mathcal{B}$ es una base de $X$ $\iff$ Para todos $\mathcal{U}, V \subseteq X$ abiertos y todo $x \in \mathcal{U} \cap V$, existe $W \in \mathcal{B}$ abierto tal que $x \in W \subseteq \mathcal{U} \cap V$.

Ejemplos:

① $X = \mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{B} = \{\text{bolas abiertas}\}$

② Si $X$ es sólo un conjunto, decimos que $\mathcal{B}$ es una base si

a) Para todo $x \in X$, existe $\mathcal{U} \in \mathcal{B}$ tal que $x \in \mathcal{U}$.

b) Si $x \in \mathcal{U} \cap V$ con $\mathcal{U}, V \in \mathcal{B}$, entonces existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $x \in W \subseteq \mathcal{U} \cap V$.

Una base en este sentido define una topología en $X$: los abiertos serán todas las posibles uniones de elementos de $\mathcal{B}$.

③ Si $X$ es un conjunto y consideramos $\mathcal{B} = \left\{ \begin{matrix} \text{complementos de} \\ \text{conjuntos finitos} \end{matrix} \right\}$, entonces si $X$ es un conjunto infinito, la topología definida por $\mathcal{B}$ no es Hausdorff.

Def: Un prehaz $\mathcal{F}$ en el espacio topológico $X$ consiste en:

① Para todo abierto $\mathcal{U} \subseteq X$, un conjunto $\mathcal{F}(\mathcal{U})$

② Para cada inclusión $\mathcal{U} \hookrightarrow V$ de abiertos, una aplicación de restricción

$$r_{V,\mathcal{U}} : \mathcal{F}(V) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{U}),$$
$$s \longmapsto r_{V,\mathcal{U}}(s) =: s|_{\mathcal{U}}$$

tal que:

a) Si $\mathcal{U} \hookrightarrow V \hookrightarrow W$ son inclusiones de abiertos, las restricciones conmutan:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(W) \arrow[r, "r_{W,V}"] \arrow[rr, bend right, "r_{W,\mathcal{U}}"'] & \mathcal{F}(V) \arrow[r, "r_{V,\mathcal{U}}"] & \mathcal{F}(\mathcal{U}) \end{tikzcd}, \text{ i.e., } r_{W,\mathcal{U}} = r_{V,\mathcal{U}} \circ r_{W,V}$$

b) $r_{\mathcal{U},\mathcal{U}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(\mathcal{U})}$ para todo abierto $\mathcal{U} \subseteq X$.

<u>Terminología</u>: Los elementos $s \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ son llamados <u>secciones</u> de $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{U}$. Además, por motivos que veremos después, en la práctica escribimos

$$\mathcal{F}(\mathcal{U}) =: \Gamma(\mathcal{U},\mathcal{F}) =: H^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$$

Por convención, cuando hablamos de "secciones de $\mathcal{F}$" nos referimos implícitamente al caso $\mathcal{U} = X$, ie, elementos de $\Gamma(X,\mathcal{F})$ $\rightsquigarrow$ <u>secciones globales</u>.

**Ejercicio** Recordemos (ver §1) que $\underline{\mathrm{Top}}(X)$ es la categoría cuyos objetos son los abiertos de $X$ y cuyos morfismos son las inclusiones. Probar que un prehaz es lo mismo que un functor contravariante

$$\mathcal{F} : \underline{\mathrm{Top}}(X) \longrightarrow \underline{\mathrm{Conj}}$$

<u>Obs</u>: Esta interpretación es útil pues puede generalizarse (cf. "topologías de Grothendieck").

<u>Ejemplos</u>

① $X = \mathbb{R}^n$ (o una variedad diferenciable) y $\mathcal{F} = \mathcal{C}^\infty$ el prehaz de funciones diferenciables, donde $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}) = \{f : \mathcal{U} \to \mathbb{R} \text{ diferenciable}\}$ es un $\mathbb{R}$-álgebra! Aquí, la restricción $\mathcal{C}^\infty(V) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$, $f \longmapsto f|_{\mathcal{U}}$ es la restricción de funciones.

② <u>Prehaz constante</u>: Sea $S$ un conjunto fijo. El prehaz constante $\mathcal{F} := S$ está dado por $\mathcal{F}(\mathcal{U}) = S$ para todo abierto $\mathcal{U} \subseteq X$, y donde las restricciones son $\mathrm{Id}_S$.

③ <u>Funciones localmente constantes</u>: Sea $S$ un conjunto fijo. Decimos que una función $f : \mathcal{U} \to S$, donde $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto, es localmente constante si para cada punto $x \in \mathcal{U}$ existe una vecindad abierta $V_x$ tal que $x \in V_x \subseteq \mathcal{U}$ y $f|_{V_x}$ es constante. (eg. En $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ la función $\mathrm{sgn}(x) = \frac{x}{|x|}$ es loc. constante)
El prehaz $\mathcal{F}$ dado por $\mathcal{F}(\mathcal{U}) = \{f : \mathcal{U} \to S \text{ localmente constante}\}$, donde las restricciones son las restricciones de funciones, es denotado $\underline{S}$.

④ <u>Prehaz rascacielo</u>: Sea $S$ un conjunto fijo y $x_0 \in X$ un punto. El prehaz rascacielo asociado está dado por $i_{x_0}(S)$, donde:

$$(i_{x_0}(S))(\mathcal{U}) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x_0 \notin \mathcal{U} \\ S & \text{si } x_0 \in \mathcal{U} \end{cases}.$$

⚠ <u>Estructura adicional</u>: Típicamente consideramos prehaces tales que $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ tiene una estructura adicional y los morfismos de restricción preservan dicha estructura:

•) Un prehaz de grupos: $\underbrace{\mathcal{F}(V)}_{\text{grupo}} \xrightarrow{r_{V,\mathcal{U}}} \underbrace{\mathcal{F}(\mathcal{U})}_{\text{grupo}}$, además: $\mathcal{F}(\emptyset) = \{0\}$ ← grupo trivial
↑ morfismo de grupo

•) Similar: Prehaz en grupos abelianos, $k$-esp. vectoriales, $k$-álgebras, etc.

<u>Obs</u>: En términos categóricos, consideramos functores contravariantes

$$\mathcal{F} : \underline{\mathrm{Top}}(X) \longrightarrow \mathcal{C}$$

donde $\mathcal{C}$ es su categoría favorita.

**Def:** Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos prehaces en $X$ con valores en la misma categoría $\mathcal{C}$ (eg. $\mathcal{C} = \underline{\mathrm{Conj}}$ o $\mathcal{C} = \underline{\mathrm{Ab}}$, etc). Un <u>morfismo de prehaces</u> $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ consiste en:

1. Para todo abierto $\mathcal{U} \subseteq X$, un morfismo $\varphi_{\mathcal{U}} : \mathcal{F}(\mathcal{U}) \to \mathcal{G}(\mathcal{U})$
2. Para cada inclusión $\mathcal{U} \hookrightarrow V$ de abiertos, el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\varphi_V"] \arrow[d, "r_{V,\mathcal{U}}"'] & \mathcal{G}(V) \arrow[d, "r_{V,\mathcal{U}}"] \\ \mathcal{F}(\mathcal{U}) \arrow[r, "\varphi_{\mathcal{U}}"] & \mathcal{G}(\mathcal{U}) \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

**Ejercicio** Probar que un morfismo de prehaces es lo mismo que una transformación natural $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ entre los functores $\mathcal{F} : \underline{\mathrm{Top}}(X) \to \mathcal{C}$ y $\mathcal{G} : \underline{\mathrm{Top}}(X) \to \mathcal{C}$.

**Ejemplo:** sea $G$ un grupo abeliano, y sean $G$ y $\underline{G}$ los prehaces de (funciones) constantes y funciones localmente constantes con valores en $G$. Entonces, hay un morfismo de prehaces $\varphi : G \to \underline{G}$ donde para cada abierto $\mathcal{U} \subseteq X$ : $\varphi_{\mathcal{U}} : G(\mathcal{U}) \to \underline{G}(\mathcal{U})$ envía $g \in G(\mathcal{U}) = G$ en la función (globalmente!) constante $f : \mathcal{U} \to G$, $x \mapsto f(x) = g$.

Notar que $\varphi_{\mathcal{U}}$ <u>no</u> es necesariamente un isomorfismo de grupos:

$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \sqcup \mathcal{U}_2$ (unión disjunta de $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$)

$$f(x) = \begin{cases} g_1 & \text{si } x \in \mathcal{U}_1 \\ g_2 & \text{si } x \in \mathcal{U}_2 \end{cases}$$

es localmente constante, pero <u>no</u> es constante si $g_1 \neq g_2$.

**Ejercicio** $\varphi_{\mathcal{U}}$ es un isomorfismo si $\mathcal{U}$ es conexo.

**Def:** Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos prehaces de grupos abelianos en $X$, y sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de prehaces. Definimos los prehaces $\ker \varphi$ e $\mathrm{im}\, \varphi$ por:

$(\ker \varphi)(\mathcal{U}) := \ker[\varphi_{\mathcal{U}} : \mathcal{F}(\mathcal{U}) \to \mathcal{G}(\mathcal{U})]$ e $(\mathrm{im}\, \varphi)(\mathcal{U}) := \mathrm{Im}[\varphi_{\mathcal{U}} : \mathcal{F}(\mathcal{U}) \to \mathcal{G}(\mathcal{U})]$ para todo $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto.

Más aún, si $\mathcal{E}$ es otro prehaz de grupos abelianos en $X$ decimos que $\mathcal{E}$ es un <u>sub-prehaz</u> de $\mathcal{F}$ (y escribimos $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$) si para todo abierto $\mathcal{U} \subseteq X$ $\mathcal{E}(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{U})$ sub-grupo abeliano y $r_{V,\mathcal{U}}(\mathcal{E}(V)) \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{U})$. En este caso, definimos el <u>prehaz cociente</u> por $(\mathcal{F}/\mathcal{E})(\mathcal{U}) := \mathcal{F}(\mathcal{U})/\mathcal{E}(\mathcal{U})$ para todo abierto $\mathcal{U} \subseteq X$.

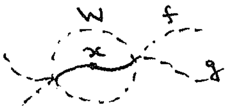
En particular, $\ker \varphi \subseteq \mathcal{F}$ e $\mathrm{im}\, \varphi \subseteq \mathcal{G}$ son sub-prehaces, y definimos el prehaz $\mathrm{coker}\, \varphi$ por $(\mathrm{coker}\, \varphi)(\mathcal{U}) := \mathcal{G}(\mathcal{U}) / (\mathrm{im}\, \varphi)(\mathcal{U})$ para todo abierto $\mathcal{U} \subseteq X$

Antes de definir el concepto de haz, recordemos la definición del "germen" de una función diferenciable en un punto:

Recuerdo (gérmenes): Sea $X = \mathbb{R}^n$ (o una variedad diferenciable) y $\mathcal{F} = \mathcal{C}^\infty$ el prehaz de funciones diferenciables. Dados un punto $x \in X$, los gérmenes de funciones diferenciables en $x$ son (clases de equivalencia de) pares de la forma

$$\{(f, \mathcal{U}) \text{, donde } x \in \mathcal{U} \text{ abierto y } f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})\},$$

donde $(f, \mathcal{U}) \sim (g, V)$ si existe $W \subseteq \mathcal{U} \cap V$ abierto tal que $x \in W$ y $f|_W = g|_W$.




El conjunto de gérmenes de funciones diferenciables en $x \in X$ se llama el tallo de $\mathcal{C}^\infty$ en $x$, y se denota $\mathcal{C}^\infty_x$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Verificar que $\mathcal{C}^\infty_x$ es un anillo y que $m_x := \{f \in \mathcal{C}^\infty_x \text{ tal que } f(x) = 0\}$ es un ideal de $\mathcal{C}^\infty_x$. Más aún, si consideramos el morfismo de anillos

$$ev_x : \mathcal{C}^\infty_x \twoheadrightarrow \mathbb{R}, \quad f \longmapsto f(x)$$

entonces $m_x = \ker(ev_x)$ y luego $m_x$ es un ideal maximal. De hecho, es el único ideal maximal de $\mathcal{C}^\infty_x$ (pues todo germen en $\mathcal{C}^\infty_x \setminus m_x$ es invertible). En otras palabras, $\mathcal{C}^\infty_x$ es un anillo local (ie, un anillo con un único ideal maximal).

Def: Sea $\mathcal{F}$ un prehaz en $X$. El tallo ("stalk") de $\mathcal{F}$ en un punto $x \in X$ es:

$$\mathcal{F}_x := \varinjlim_{\substack{\mathcal{U} \\ x \in \mathcal{U}}} \mathcal{F}(\mathcal{U}) = \Big( \coprod_{\substack{\mathcal{U} \text{ abierto} \\ \text{tq } x \in \mathcal{U}}} \mathcal{F}(\mathcal{U}) \Big) \Big/ \sim,$$

donde para $s \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ y $t \in \mathcal{F}(V)$ se tiene que $s = t$ en $\mathcal{F}_x$ si existe $W \subseteq \mathcal{U} \cap V$ abierto tal que $x \in W$ y $s|_W = t|_W$ en $\mathcal{F}(W)$.

Si $\mathcal{U}$ es una vecindad abierta del punto $x \in X$ y $s \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ es una sección de $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{U}$, denotamos por $s_x$ la clase de $s$ en el tallo $\mathcal{F}_x$ y la llamamos el germen de $s$ en el punto $x \in X$.

Finalmente, a continuación definimos qué es un haz: es un prehaz donde exigimos que secciones locales $s_i$ en abiertos $\mathcal{U}_i$ que cubren un abierto $\mathcal{U}$ y que coinciden en las intersecciones $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$ pueden pegarse de manera única en una sección $s$ en el abierto $\mathcal{U}$.

Def: Sea $\mathcal{F}$ un prehaz de grupos abelianos en $X$. Decimos que $\mathcal{F}$ es un haz si se cumplen las siguientes condiciones para todo $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto:

1. Pegado: Si $\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$ cubrimiento abierto, y si $s_i \in \mathcal{F}(\mathcal{U}_i)$ son secciones tales que $s_i|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j} = s_j|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j}$ para todos $i, j \in I$. Entonces, existe $s \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ una sección tal que $s|_{\mathcal{U}_i} = s_i$ para todo $i \in I$.
2. Unicidad: Si $\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$ cubrimiento abierto y $s \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ una sección, entonces si $s|_{\mathcal{U}_i} = 0$ en $\mathcal{F}(\mathcal{U}_i)$ para todo $i \in I$ $\Rightarrow s = 0$ en $\mathcal{F}(\mathcal{U})$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Escribir la condición de unicidad 2 cuando $\mathcal{F}$ es un prehaz con valores en una categoría arbitraria $\mathcal{C}$.

<u>Ejemplos</u>: ① El prehaz $\mathcal{C}^\infty$ de funciones diferenciables es un haz.

② Sea $G$ un grupo abeliano. El prehaz constante $G$ <u>no</u> es necesariamente un haz: $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \sqcup \mathcal{U}_2$ si $g_i \in G(\mathcal{U}_i) \underset{\text{def}}{=} G$ son diferentes $(i=1,2)$

$\Rightarrow \nexists\, g \in G(\mathcal{U}) = G$ tal que $g|_{\mathcal{U}_1} = g_1$ y $g|_{\mathcal{U}_2} = g_2$.

Por otra parte, si <u>todo</u> abierto no vacío de $X$ es conexo entonces $G$ es un haz (veremos que esto ocurre en una variedad algebraica <u>irreducible</u>).

③ Sea $G$ un grupo abeliano. El prehaz $\underline{G}$ de funciones localmente constantes en $X$ con valores en $G$ es un haz.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $G$ un grupo abeliano y $x_0 \in X$ un punto. Demostrar que el prehaz rascacielos $i_{x_0}(G)$ dado por

$$(i_{x_0}(G))(\mathcal{U}) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } x_0 \notin \mathcal{U} \\ G & \text{si } x_0 \in \mathcal{U} \end{cases}$$

es un haz.

⚠ <u>Importante</u>: Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ haces de grupos abelianos en $X$. Por definición, un <u>morfismo de haces</u> $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un morfismo entre los prehaces subyacentes.

Notemos que si $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un morfismo de haces de grupos abelianos:

① El prehaz $\ker \varphi$ es siempre un haz: Veamos el "pegado" y "unicidad" simultaneamente:

Sea $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto y $\mathcal{U} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$ cubrimiento abierto. Sean $s_i \in \mathcal{F}(\mathcal{U}_i)$ secciones tal que $s_i \in (\ker\varphi)(\mathcal{U}_i)$ para todo $i \in I$, i.e., $\varphi_{\mathcal{U}_i}(s_i) = 0$ en $\mathcal{G}(\mathcal{U}_i)$.

Si $s_i|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j} = s_j|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j}$ en $\mathcal{F}(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$ para todo $i, j \in I$

$\underset{\mathcal{F}\text{ haz}}{\Longrightarrow} \exists!\, s \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ tal que $s|_{\mathcal{U}_i} = s_i \;\forall i \in I$. Más aún, tenemos que

$\varphi_{\mathcal{U}}(s)|_{\mathcal{U}_i} = \varphi_{\mathcal{U}_i}(s|_{\mathcal{U}_i}) = \varphi_{\mathcal{U}_i}(s_i) = 0$ en $\mathcal{G}(\mathcal{U}_i)\; \forall i \in I \underset{\mathcal{G}\text{ haz}}{\Longrightarrow} \varphi_{\mathcal{U}}(s) = 0$.

Luego, $s \in (\ker\varphi)(\mathcal{U})$.

② El prehaz $\operatorname{im}\varphi$ <u>no</u> necesariamente es un haz:

Sea $X = \mathbb{C}$ (o una variedad compleja) y sea $\mathcal{O}_X$ (resp. $\mathcal{O}_X^*$) el haz de funciones holomorfas (resp. el haz de funciones holomorfas que no se anulan). Consideremos el morfismo exponencial

$$\exp : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X^*$$

grupo multiplicativo

dado por $\exp_{\mathcal{U}} : \mathcal{O}_X(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{O}_X^*(\mathcal{U})$, $f \longmapsto e^{2\pi i f}$

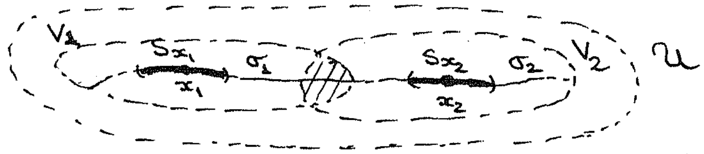
$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que $\ker(\exp) = \underline{\mathbb{Z}}$, pero que el prehaz $\operatorname{im}(\exp)$ <u>no</u> es un haz (la condición de pegado falla) y $\operatorname{coker}(\exp)$ tampoco.

Nos gustaría poder definir un "haz imagen". Es natural entonces preguntar ¿Cómo construir un haz a partir de un prehaz?

**Def**: Sea $\mathcal{F}$ un prehaz de grupos abelianos en $X$. Definimos el prehaz $\mathcal{F}^+$ en $X$, asociando a cada abierto $\mathcal{U} \subseteq X$ el grupo $\mathcal{F}^+(\mathcal{U})$ de "gérmenes compatibles" de $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{U}$. Explícitamente:

$$\mathcal{F}^+(\mathcal{U}) = \left\{ (s_x)_{x\in\mathcal{U}} \in \prod_{x\in\mathcal{U}} \mathcal{F}_x \text{ tal que: } \begin{array}{l} \text{Para todo } x\in\mathcal{U}, \text{ existe } V\subseteq\mathcal{U} \\ \text{vecindad abierta de } x \text{ y una sección} \\ \sigma\in\mathcal{F}(V) \text{ tal que } \sigma_y = s_y \text{ en } \mathcal{F}_y \ \forall y\in V \end{array} \right\}$$

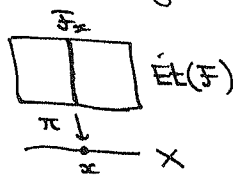
Geometricamente:




**Obs**: Para todo prehaz $\mathcal{F}$ hay un morfismo natural $j: \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ que para todo abierto $\mathcal{U} \subseteq X$ y toda sección $s \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ le asocia $(s_x)_{x\in\mathcal{U}}$ el conjunto de gérmenes $s_x \in \mathcal{F}_x$ para todo $x \in \mathcal{U}$.

**Prop**: Sea $\mathcal{F}$ un prehaz de grupos abelianos en $X$. Entonces, $\mathcal{F}^+$ es un haz en $X$.

**Dem**: Definimos el "espacio étalé" de $\mathcal{F}$ como el conjunto

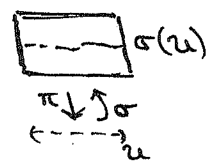



$$\acute{E}t(\mathcal{F}) = \coprod_{x\in X} \mathcal{F}_x,$$

que viene dotado de una proyección natural $\pi: \acute{E}t(\mathcal{F}) \to X$.

Una sección $s \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ define una función $\sigma: \mathcal{U} \to \acute{E}t(\mathcal{F})$

$$x\in\mathcal{U} \longmapsto s_x \in \mathcal{F}_x$$




Los subconjuntos de $\acute{E}t(\mathcal{F})$ de la forma $\sigma(\mathcal{U})$ pueden ser usados como base para definir una topología de $\acute{E}t(\mathcal{F})$.

$\Rightarrow$ El conjunto $\mathcal{F}^+(\mathcal{U})$ coincide con el conjunto de funciones $\sigma: \mathcal{U} \to \acute{E}t(\mathcal{F})$ que son continuas respecto a esta topología. En part, $\mathcal{F}^+$ es un haz en $X$ ■

**Lema**: Si $\mathcal{F}$ es un haz de grupos abelianos en $X$, entonces para todo $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto se tiene que $j_{\mathcal{U}}: \mathcal{F}(\mathcal{U}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}^+(\mathcal{U})$ es un isomorfismo.

**Dem**: Para la inyectividad, consideramos una sección $s \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ tal que $j_{\mathcal{U}}(s) = (s_x)_{x\in\mathcal{U}} = 0$ en $\mathcal{F}^+(\mathcal{U})$. En part, existe $\mathcal{U} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$ cubrimiento abierto tq $s|_{\mathcal{U}_i} = 0 \ \forall i\in I \underset{\mathcal{F}\text{ haz}}{\Rightarrow} s = 0$ ✓

Para la sobreyectividad consideramos $(s_x)_{x\in\mathcal{U}} \in \mathcal{F}^+(\mathcal{U})$ gérmenes compatibles de $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{U}$. La condición de compatibilidad implica la existencia de un cubrimiento abierto $\mathcal{U} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$ y secciones $\sigma_i \in \mathcal{F}(\mathcal{U}_i)$ tales que $(\sigma_i)_x = s_x \ \forall x \in \mathcal{U}_i$. En part, $(\sigma_i)_x = (\sigma_j)_x$ para todo $x \in \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$ $\underset{\text{Inyectividad}}{\Rightarrow} \sigma_i|_{\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j} = \sigma_j|_{\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j}$ para todos $i,j\in I \underset{\mathcal{F}\text{ haz}}{\Rightarrow}$ Las $\sigma_i$ se pegan en $\sigma \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$

Más aún, $\sigma|_{\mathcal{U}_i} = \sigma_i \ \forall i\in I$ implica $\sigma_x = s_x \ \forall x \in \mathcal{U}$ ✓ ■

<u>Teorema</u> (propiedad universal): Sea $\mathcal{F}$ un prehaz de grupos abelianos en $X$. Entonces, el haz $\mathcal{F}^+$ junto con el morfismo de prehaces $j: \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ cumplen la propiedad universal siguiente:

"Para todo haz de grupos abelianos $\mathcal{G}$ en $X$ y cualquier morfismo de prehaces $\varphi: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ existe un único morfismo de haces $\varphi^+: \mathcal{F}^+ \longrightarrow \mathcal{G}$ tal que

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "j"'] & \mathcal{G} \\ \mathcal{F}^+ \arrow[ur, "\exists!\,\varphi^+"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo".

En particular, el par $(\mathcal{F}^+, j)$ es único módulo un único isomorfismo, y decimos que es el <u>haz asociado</u> a $\mathcal{F}$ (o la <u>haci</u>ficación de $\mathcal{F}$).

<u>Dem</u>: La construcción de $\mathcal{F}^+$ y $j: \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ es functorial: un morfismo de prehaces $\varphi: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ induce un morfismo de haces $\varphi^+: \mathcal{F}^+ \longrightarrow \mathcal{G}^+$ tal que

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \mathcal{G} \arrow[d] \\ \mathcal{F}^+ \arrow[r, "\varphi^+"] & \mathcal{G}^+ \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Luego, si $\mathcal{G}$ es un haz entonces $\mathcal{G} \cong \mathcal{G}^+$ por el Lema anterior. Luego, obtenemos el diagrama conmutativo deseado $\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "j"'] & \mathcal{G} \\ \mathcal{F}^+ \arrow[ur, "\varphi^+"'] & \end{tikzcd}$. $(\bigstar)$

Resta verificar la unicidad de $\varphi^+$: sea $\sigma = (s_x)_{x \in \mathcal{U}}$ una sección de $\mathcal{F}^+(\mathcal{U})$, y sea $\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$ cubrimiento abierto junto con secciones $\sigma_i \in \mathcal{F}(\mathcal{U}_i)$ tales que $(\sigma_i)_x = s_x \ \forall x \in \mathcal{U}_i$. La conmutatividad de $(\bigstar)$ implica que $\varphi^+(\sigma)|_{\mathcal{U}_i} = \varphi(\sigma_i)$, lo cual determina completamente $\varphi^+(\sigma)$ pues $\mathcal{G}$ es un haz. ■

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $\mathcal{F}$ un prehaz de grupos abelianos en $X$. Probar que $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}^+_x \ \forall x \in X$.

<u>Ejemplos</u>: ① Sea $G$ un grupo abeliano. El haz asociado al prehaz constante $G$ es el haz $\underline{G}$ de funciones localmente constantes, ie, $G^+ = \underline{G}$.

② Sea $\mathcal{F}$ un haz de grupos abelianos en $X$ y sea $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ un <u>sub-haz</u>. Definimos el <u>haz cociente</u> $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ como el haz asociado al prehaz cociente $(\mathcal{F}/\mathcal{E})_{pre}$, ie, $\mathcal{F}/\mathcal{E} := (\mathcal{F}/\mathcal{E})^+_{pre}$. En part, si $\varphi: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un morfismo de haces, definimos el <u>haz cokernel</u> como $\mathrm{Coker}(\varphi) := (\mathrm{coker}\,\varphi)^+$.

③ Sea $\varphi: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de haces. Definimos el <u>haz imagen</u> $\mathrm{Im}(\varphi)$ como el haz asociado al prehaz imagen $\mathrm{im}\,\varphi$, ie, $\mathrm{Im}(\varphi) := (\mathrm{im}\,\varphi)^+$.

<u>Concretamente</u>: Una sección $\sigma \in \mathcal{G}(\mathcal{U})$ pertenece a $(\mathrm{Im}(\varphi))(\mathcal{U})$ si existe un cubrimiento abierto $\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$ y secciones $s_i \in \mathcal{F}(\mathcal{U}_i)$ tales que $\varphi(s_i) = \sigma|_{\mathcal{U}_i} \ \forall i \in I$. Es decir, son las secciones de $\mathcal{G}$ que provienen <u>localmente</u> de secciones de $\mathcal{F}$.

Def: Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de haces de grupos abelianos en $X$. Decimos que $\varphi$ es:

① Inyectivo si $\ker(\varphi) = 0$.

② Sobreyectivo si $\mathrm{Im}(\varphi) = (\mathrm{im}\,\varphi)^+ = \mathcal{G}$.

③ Un isomorfismo de haces si es inyectivo y sobreyectivo.

Prop: Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de haces de grupos abelianos en $X$. Entonces, $\varphi$ es un isomorfismo si y sólo si para todo $x \in X$ el morfismo inducido

$$\varphi_x : \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x$$

es un isomorfismo.

Dem: Dado $x \in X$, el morfismo inducido $\varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ a nivel de tallos se define considerando para todo germen $s_x \in \mathcal{F}_x$ un abierto $\mathcal{U}$ tq $x \in \mathcal{U}$ y una sección $s \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ tal que $s_x = [(s, \mathcal{U})]$, y definiendo $\varphi_x(s_x)$ como el germen de $\varphi(s) \in \mathcal{G}(\mathcal{U})$ en $\mathcal{G}_x$, ie, $\varphi_x(s_x) = [(\varphi(s), \mathcal{U})]$. En part, si $\varphi$ es un isomorfismo entonces $\varphi_x$ también, para todo $x \in X$ ✓

Sup. que $\varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ es un isomorfismo de grupos abelianos $\forall x \in X$ y veamos:

a) $\varphi$ inyectiva: Sea $s \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ sección sobre un abierto $\mathcal{U} \subseteq X$ tq $\varphi(s) = 0$ en $\mathcal{G}(\mathcal{U}) \Rightarrow \varphi_x(s_x) = 0$ en $\mathcal{G}_x$ $\forall x \in \mathcal{U}$ $\underset{\varphi_x \text{ iny.}}{\Longrightarrow}$ $s_x = 0$ $\forall x \in \mathcal{U}$ $\underset{\mathcal{F} \text{ haz}}{\Longrightarrow}$ $s = 0$ ✓

b) $\varphi$ sobreyectiva: Ejercicio. ∎

Corolario: Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ morfismo de haces de grupos abelianos en $X$. Entonces, hay un isomorfismo de haces

$$\mathcal{F}/\ker\varphi \cong \mathrm{Im}(\varphi).$$

Dem: Usar el teorema del isomorfismo (de grupos!) para $\varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ $\forall x \in X$ ∎

Gracias a la discusión anterior, podemos hablar de kernel, cokernel e imagen de haces. En particular, podemos hablar de sucesiones exactas.

Def: Sea $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ una colección de haces de grupos abelianos en $X$ y sean $\varphi_n : \mathcal{F}_n \to \mathcal{F}_{n+1}$ morfismos de haces $\forall n \in \mathbb{Z}$. Diremos que la sucesión

$$\cdots \xrightarrow{\varphi_{n-2}} \mathcal{F}_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} \mathcal{F}_n \xrightarrow{\varphi_n} \mathcal{F}_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} \cdots$$

es exacta si $\ker(\varphi_n) = \mathrm{Im}(\varphi_{n-1}) = (\mathrm{im}\,\varphi_{n-1})^+$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Más aún, una sucesión exacta corta es una sucesión exacta de la forma

$$0 \to \mathcal{F}' \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}'' \longrightarrow 0.$$

Ejemplo importante: Sea $X = \mathbb{C}$ (o una variedad compleja). Entonces, la sucesión exponencial (Kodaira - Spencer, 1953):

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp(2\pi i\,\cdot)} \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0$$

es exacta.