§2. Transformaciones naturales y Functores adjuntos

Def: Sean $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $\mathcal{G} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ dos functores covariantes. Por definición, una <u>transformación natural</u> $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ entre $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ consiste en una colección $\varphi_A : \mathcal{F}(A) \to \mathcal{G}(A)$ de funciones, una para cada $A \in Ob(\mathcal{C})$, que son compatibles con los morfismos: si $f : A \to B$ en $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ entonces:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(A) & \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} & \mathcal{F}(B) \\ \varphi_A \downarrow & & \downarrow \varphi_B \\ \mathcal{G}(A) & \xrightarrow{\mathcal{G}(f)} & \mathcal{G}(B) \end{array}$$

es conmutativo para todos $A, B \in Ob(\mathcal{C})$. (ie, $\varphi_B \circ \mathcal{F}(f) = \mathcal{G}(f) \circ \varphi_A$).

En part, si cada φ_A es biyectiva decimos que $\varphi : \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$ es un <u>isomorfismo natural</u>.

Obs: Si $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son tres categorías, y si $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $\mathcal{G} : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ son functores covariantes entonces podemos definir el functor $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ mediante $(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})(A) = \mathcal{G}(\mathcal{F}(A))$ para $A \in Ob(\mathcal{A})$ y para $f : A_1 \to A_2$ morfismo en $Hom_{\mathcal{A}}(A_1, A_2)$ se tiene $(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})(f) = \mathcal{G}(\mathcal{F}(f)) : \mathcal{G}(\mathcal{F}(A_1)) \to \mathcal{G}(\mathcal{F}(A_2))$.

Las transformaciones naturales permiten formalizar la intuición detrás de la frase "las categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son esencialmente las mismas":

Def: Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías. Decimos que $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son <u>equivalentes</u> si existen functores covariantes $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $\mathcal{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tales que $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ es naturalmente isomorfo a $Id_{\mathcal{D}}$ y $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ es naturalmente isomorfo a $Id_{\mathcal{C}}$, en cuyo caso decimos que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ definen una <u>equivalencia de categorías</u>. Aquí, $Id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ y $Id_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ son los functores identidad.

Ejemplo: Consideremos las categorías $\mathcal{V}_k$ y $\underline{Vec}_k^{fin}$ dadas por: sea k un cuerpo:

$\mathcal{V}_k \rightsquigarrow$ <u>Objetos</u>: $\{k^n\}_{n \in \mathbb{N}}$

<u>Morfismos</u>: $Hom(k^n, k^m) = \{f : k^n \to k^m \text{ lineal}\} \overset{\text{"canónico"}}{\cong} M_{m \times n}(k)$

$\underline{Vec}_k^{fin} \rightsquigarrow$ <u>Objetos</u>: <u>k-ev de dimensión finita</u>

<u>Morfismos</u>: $Hom(V, W) = \{f : V \to W \text{ lineal}\}$

Así, hay un functor $\mathcal{F} : \mathcal{V}_k \to \underline{Vec}_k^{fin}$, $k^n \mapsto k^n$, con $\mathcal{F}(f) = f$.

Por otro lado, si consideramos el functor "elegir una base" $\mathcal{G} : \underline{Vec}_k^{fin} \to \mathcal{V}_k$ donde para cada $V \in \underline{Vec}_k^{fin}$ <u>fijamos</u> una base $\mathcal{B}$ de V. (y donde para $V = k^n$ escogemos la base canónica $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$).

$$V \mapsto (V, \mathcal{B}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{coordenadas}}}{\cong} k^n$$

$$f \mapsto Mat_{\mathcal{B}}(f)$$

$\Rightarrow \mathcal{F} \circ \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} Id_{\underline{Vec}_k^{fin}}$ y $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} Id_{\mathcal{V}_k}$

Luego, $\mathcal{F}$ (o $\mathcal{G}$) define una equivalencia entre las categorías $\mathcal{V}_k$ y $\underline{Vec}_k^{fin}$

Obs: Veremos que hay una equivalencia entre las categorías de "variedades algebraicas afines sobre k" y de "k-álgebras (abelianas) <u>finitamente generadas</u> y <u>reducidas</u> (ie, sin nilpotentes no-nulos)" (cf. pág 1 : ① $\Leftrightarrow$ ②).

<u>Recuerdo/Motivación</u>: Recordemos que si $u: H \to H$ es un operador lineal acotado en un espacio de Hilbert H, entonces el teorema de representación de Riesz implica que existe un único $u^*: H \to H$ lineal acotado tq $\langle u(f), g\rangle = \langle f, u^*(g)\rangle$ para todo $f, g \in H$. Decimos que u^* es el <u>adjunto</u> de u.

<u>Def</u>: Sean $\mathcal{F}: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $\mathcal{G}: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ dos functores covariantes. Decimos que $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es un par de functores <u>adjuntos</u> si para todos $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ y $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ hay una "biyección natural"

$$\tau_{AB}: \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(A), B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \mathcal{G}(B)).$$

Aquí, "biyección natural" significa que si $f: A_1 \to A_2$ y $g: B_1 \to B_2$ son morfismos en $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, respectivamente, entonces:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(A_1), B_1) & \xrightarrow[\tau_{A_1B_1}]{\sim} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A_1, \mathcal{G}(B_1)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(A_2), B_2) & \xrightarrow[\tau_{A_2B_2}]{\sim} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A_2, \mathcal{G}(B_2)) \end{array} \quad \text{es conmutativo.}$$

En este caso decimos que $\mathcal{F}$ es el <u>adjunto izquierdo</u> de $\mathcal{G}$, y que $\mathcal{G}$ es el <u>adjunto derecho</u> de $\mathcal{F}$. Además, escribiremos $\mathcal{F} \dashv \mathcal{G}$.

<u>Ejemplo importante</u>: Sea A un anillo abeliano y sean M, N, P tres A-módulos. Recordemos que $\mathrm{Bil}_A(M \times N, P) = \{B: M \times N \to P \text{ aplicación } A\text{-bilineal}\}$.

Por un lado, la <u>propiedad universal</u> del producto tensorial $\otimes_A$ nos dice que $\mathrm{Bil}_A(M \times N, P) \cong \mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N, P)$ como A-módulos.

Por otro lado, fijando la primera variable de $B: M \times N \to P$ obtenemos una aplicación A-lineal $\hat{B}: M \to \mathrm{Hom}_A(N, P)$, $m \mapsto B(m, \cdot)$

$\Rightarrow \mathrm{Bil}_A(M \times N, P) \cong \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N, P))$ como A-módulos.

Luego, obtenemos un isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_A(\underbrace{M \otimes_A N}_{:= \mathcal{F}(M)}, P) \cong \mathrm{Hom}_A(M, \underbrace{\mathrm{Hom}_A(N, P)}_{:= \mathcal{G}(P)})$$

Con un poco de paciencia se verifica que dicho isomorfismo es functorial y así los functores

$$\mathcal{F}: \underline{A\text{-Mod}} \to \underline{A\text{-Mod}}, \quad M \mapsto M \otimes_A N \qquad \text{y} \qquad \mathcal{G}: \underline{A\text{-Mod}} \to \underline{A\text{-Mod}}, \quad P \mapsto \mathrm{Hom}_A(N, P)$$

son adjuntos para todo N fijo, ie, $(\cdot) \otimes_A N$ y $\mathrm{Hom}_A(N, \cdot)$ son adjuntos.

<u>Caso particular</u>: Si $A = k$ es un cuerpo y $\mathcal{U}, V, W$ son k-ev de dimensión <u>finita</u> entonces $\mathrm{Hom}_k(V, W) \cong V^* \otimes_k W$. Luego:

$$\mathrm{Hom}_k(\mathcal{U} \otimes_k V, W) \cong \mathrm{Hom}_k(\mathcal{U}, V^* \otimes_k W)$$

<u>Convención</u> (espacio dual): Dado que en geometría la notación $(\cdot)^*$ se usa usualmente para <u>pullback</u>, es que el espacio dual de un k-ev V será denotado $V^\vee$. En particular, el isomorfismo anterior se escribe como:

$$\mathrm{Hom}_k(\mathcal{U} \otimes_k V, W) \cong \mathrm{Hom}_k(\mathcal{U}, V^\vee \otimes_k W).$$