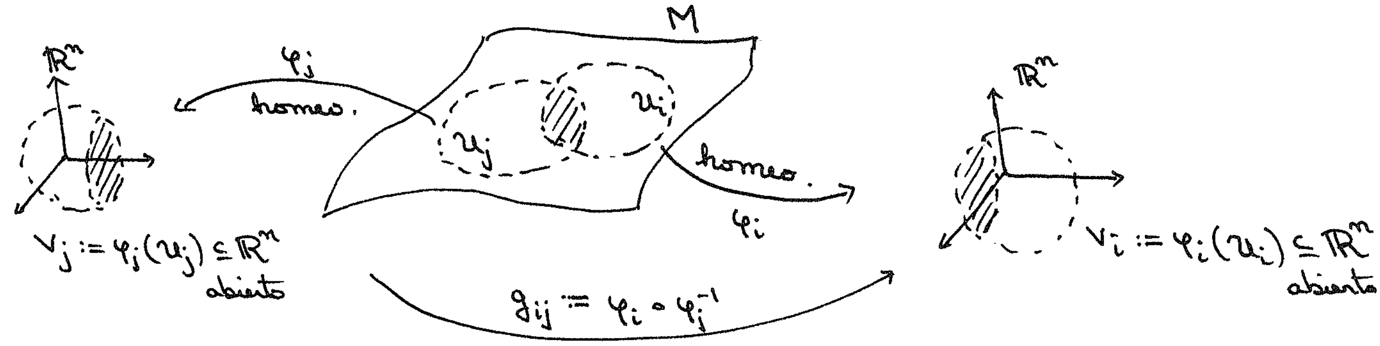
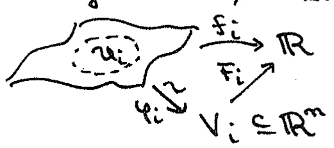
MAT426: "Introducción a la Geometría Algebraica"

<u>Motivación</u>: En geometría diferencial, una variedad diferenciable es:



función $\mathcal{C}^\infty$ en $\varphi_j^{-1}(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \subseteq \mathbb{R}^n$

Además, una función $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathcal{U}_i \subseteq M$ abierto es $f : M \to \mathbb{R}$ tal que $f_i := f|_{\mathcal{U}_i}$ verifica:



$$F_i := f_i \circ \varphi_i^{-1} : V_i \to \mathbb{R} \quad \text{es } \mathcal{C}^\infty.$$
$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto F_i(x_1, \dots, x_m)$$

<u>Ejemplo</u>: Si para todo $p \in \mathcal{U}_i$ escribimos $\varphi_i(p) = (x_1(p), \dots, x_m(p)) \in \mathbb{R}^n$ "coordenadas"

$\Rightarrow \forall j = 1, \dots, n$ la función $x_j : \mathcal{U}_i \to \mathbb{R}$, $p \mapsto x_j(p)$ es $\mathcal{C}^\infty$.

<u>Importante</u>: Podemos definir una variedad diferenciable M a partir de:

① <u>Un atlas</u>: Definimos M como un espacio topológico junto con un cubrimiento abierto $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ (i.e., $M = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$) tq para todo $i \in I$ hay homeomorfismos $\varphi_i : \mathcal{U}_i \xrightarrow{\sim} \underset{\text{abierto}}{V_i \subseteq \mathbb{R}^n}$, y tal que $\forall i, j \in I$ con $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \neq \emptyset$ hay

$$\underbrace{\varphi_j^{-1}(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)}_{\subseteq V_j \subseteq \mathbb{R}^n} \xrightarrow[\varphi_j]{\sim} \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \xleftarrow[\varphi_i]{\sim} \underbrace{\varphi_i^{-1}(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)}_{\subseteq V_i \subseteq \mathbb{R}^n}$$

$$g_{ij}$$

difeomorfismos g_{ij}, con inversa dada por $g_{ij}^{-1} = g_{ji}$.

Equivalentemente, a partir de:

② <u>Un "haz" de funciones $\mathcal{C}^\infty$</u>: Definimos M como un espacio topológico junto con un <u>haz</u> $\mathcal{F} := \mathcal{C}^\infty_M$ tal que para todo abierto $\mathcal{U} \subseteq M$ le asociamos un $\mathbb{R}$-álgebra de "funciones regulares" $\mathcal{C}^\infty_M(\mathcal{U}) = \{f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}\}$ tq para todo $p \in M$ existe $\mathcal{U}_p \subseteq M$ vecindad abierta de p y $V_p \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto tq

$$\mathcal{C}^\infty_M(\mathcal{U}_p) \cong \mathcal{C}^\infty(V_p) = \{F : V_p \to \mathbb{R} \text{ función } \mathcal{C}^\infty\}$$

como $\mathbb{R}$-álgebras.

<u>Objetivo</u>: Reemplazar $\mathbb{R}$ por otros cuerpos $\Bbbk$ usando ② !

↳ Necesitamos introducir el lenguaje de <u>categorías</u> y <u>haces</u>.

§1. Categorías y Functores

<u>Def</u>: Una <u>categoría</u> (pequeña) $\mathcal{C}$ consiste en:

① Una colección $Ob(\mathcal{C})$ de conjuntos, llamados los <u>objetos</u> de la categoría.

② Para todo par A, B de objetos en $\mathcal{C}$, un conjunto $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ (o bien, símplemente $Hom(A,B)$), cuyos elementos $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ son llamados <u>morfismos</u> y que cumplen:

a) Podemos componerlos:

$$\begin{aligned} Hom(A,B) \times Hom(B,C) &\longrightarrow Hom(A,C) \\ (f,g) &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

b) La composición es asociativa: $(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$.

c) Para todo objeto $A \in Ob(\mathcal{C})$ existe (un <u>único</u>) $Id_A \in Hom(A,A)$ tal que $Id_A \circ f = f$ y $g \circ Id_A = g$ para todos f, g.

<u>Terminología</u>: Un <u>isomorfismo</u> entre dos objetos $A, B \in Ob(\mathcal{C})$ es un morfismo $f \in Hom(A,B)$ tal que existe (un único) $g \in Hom(B,A)$ que cumple:

$$f \circ g = Id_B \quad y \quad g \circ f = Id_A \rightsquigarrow \underline{\text{Notación}}: A \cong B \;\; o \;\; A \cong_{\mathcal{C}} B.$$

En part, un <u>automorfismo</u> de A es un isomorfismo $\varphi \in Hom(A,A)$.

<u>Ejemplos típicos</u>: Las categorías más comunes son (la notación varía en la literatura) <u>Conj</u> (conjuntos), <u>Anillos</u>, <u>An</u> (anillos conmutativos con unidad), <u>Grp</u> (grupos), <u>Ab</u> (grupos abelianos), <u>Vec_k</u> (k-espacios vectoriales), <u>A-Mod</u> (A-módulos), <u>Top</u> (espacios topológicos), <u>Man^∞</u> (variedades $\mathcal{C}^\infty$); con sus morfismos respectivos.

<u>Obs</u>: <u>A-Mod</u> tiene la propiedad adicional que $Hom_{A\text{-mod}}(M,N)$ son grupos abelianos (Más adelante: es una "<u>categoría abeliana</u>"). Notar también que si $A = k$ entonces <u>k-Mod</u> = <u>Vec_k</u> y si $A = \mathbb{Z}$ entonces <u>$\mathbb{Z}$-Mod</u> = <u>Ab</u>.

<u>Ejemplos más exóticos</u>:

① Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $A \in Ob(\mathcal{C})$ un objeto. La <u>categoría fibrada</u> $\mathcal{C}_A$ (definida por Grothendieck en 1959) está dada por:

① <u>Objetos</u>: (B, φ), donde $B \in Ob(\mathcal{C})$ y $\varphi \in Hom(B,A)$

② <u>Morfismos</u>: Diagramas de la forma
$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & C \arrow[dl, "\psi"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

ie, $Hom_{\mathcal{C}_A}((B,\varphi),(C,\psi)) = \{ f \in Hom(B,C) \text{ tq } \varphi = \psi \circ f \}$.

En part, la composición $g \circ f$ está dada por
$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] \arrow[rrrr, bend left, "g\circ f"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & C \arrow[dl, "\psi"] \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\psi"'] & & D \arrow[dl, "\theta"] \\ & A & & A & \end{tikzcd}$$
donde $\varphi = \theta \circ (g \circ f)$ pues $\theta \circ g = \psi$ y $\varphi = \psi \circ f$.

② Sea $\mathcal{C}$ una categoría. La <u>categoría opuesta</u> $\mathcal{C}^{op}$ está dada por:

① $Obj(\mathcal{C}^{op}) := Obj(\mathcal{C})$, ② $Hom_{\mathcal{C}^{op}}(A,B) := Hom_{\mathcal{C}}(B,A)$.

Ejemplo importante: Sea X un espacio topológico, definimos como $\underline{Top}(X)$ la categoría cuyos objetos son los abiertos de X, y cuyos morfismos son:

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{U},V) = \begin{cases} \{i : \mathcal{U} \hookrightarrow V\} \text{ (inclusión)} & \text{si } \mathcal{U} \subseteq V. \\ \emptyset & \text{si } \mathcal{U} \not\subseteq V. \end{cases}$$

Ejercicio Describir geométricamente la composición de morfismos en $\underline{Top}(X)$.

Tal como consideramos morfismos entre objetos, podemos considerar "functores" entre categorías:

Def: Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías. Un functor covariante $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ consiste en:

① Funciones que asignan cada $A \in Ob(\mathcal{C})$ en un $\mathcal{F}(A) \in Ob(\mathcal{D})$.

② Funciones entre los morfismos: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(A),\mathcal{F}(B))$ para todos $A,B \in Ob(\mathcal{C})$, que son compatibles con la composición e identidad:

a) Si para cada $f : A \to B$ en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ escribimos $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(A) \to \mathcal{F}(B)$ en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(A),\mathcal{F}(B))$, entonces $\mathcal{F}(Id_A) = Id_{\mathcal{F}(A)}$.

b) Para cada $f : A \to B$ en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ y $g : B \to C$ en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C)$ se tiene que $\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$.

En part, los functores preservan isomorfismos: $A \cong B \Rightarrow \mathcal{F}(A) \cong \mathcal{F}(B)$.

Obs: Para definir un functor contravariante $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ consiste en la misma información excepto que en ② intercambiamos la dirección de las flechas: Si $f : A \to B$ morfismo en $\mathcal{C}$, entonces $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(B) \to \mathcal{F}(A)$ y también $\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$. Notar que un functor contravariante $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es lo mismo que un functor covariante $\mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$.

Ejemplos típicos:

① Los functores de olvido sirven para "olvidar" estructuras adicionales. Por ejemplo, $\underline{An} \to \underline{Conj}$ asocia al anillo $(A,+,\cdot)$ el conjunto A subyacente, y asocia al morfismo de anillos $f : A \to B$ la función entre conjuntos subyacente.
Otros ejemplos: $\underline{Vec}_k \to \underline{Conj}$, $\underline{A\text{-}Mod} \to \underline{Ab}$, $\underline{Man}^\infty \to \underline{Top}$, etc.

② Extensión de escalares: Sea $A \in \underline{An}$ anillo abeliano y sea B una A-álgebra entonces $\mathcal{F} : \underline{A\text{-}Mod} \to \underline{B\text{-}Mod}$, $M \mapsto M \otimes_A B$ es un functor covariante.

③ Sea A anillo abeliano y P un A-módulo. Entonces el functor

a) $\mathcal{F} : \underline{A\text{-}Mod} \to \underline{Ab}$, $M \mapsto \mathrm{Hom}_A(M,P)$ es contravariante; $\mathcal{F}(f) := f^*$ "pull back"

b) $\mathcal{F} : \underline{A\text{-}Mod} \to \underline{Ab}$, $M \mapsto \mathrm{Hom}_A(P,M)$ es covariante; $\mathcal{F}(f) := f_*$ "push forward"

④ Functor de puntos (o Functor de Yoneda): Sea A un objeto en $\mathcal{C}$. Definimos $h^A : \mathcal{C} \to \underline{Conj}$ mediante $h^A(B) := \mathrm{Hom}(B,A)$ para $B \in Ob(\mathcal{C})$ y para un morfismo $f : B \to C$ definimos

$$h^A(f) : \mathrm{Hom}(C,A) \to \mathrm{Hom}(B,A)$$
$$[g : C \to A] \mapsto [g \circ f : B \to A]$$