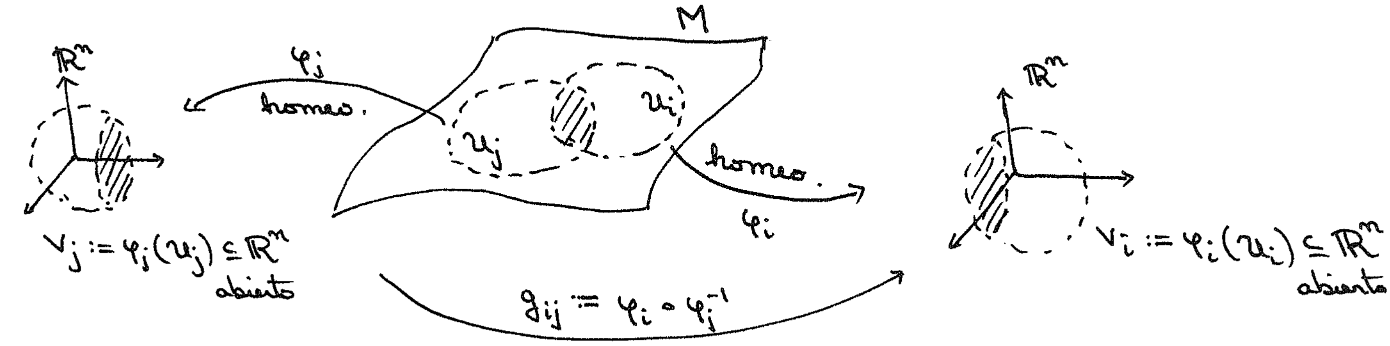
MAT426: "Introducción a la Geometría Algebraica"

Motivación: En geometría diferencial, una variedad diferenciable es:



función $\mathcal{C}^\infty$ en $\varphi_j^{-1}(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \subseteq \mathbb{R}^n$

Además, una función $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathcal{U}_i \subseteq M$ abierto es $f : M \to \mathbb{R}$ tal que $f_i := f|_{\mathcal{U}_i}$ verifica:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U}_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\varphi_i", "\wr"'] & \mathbb{R} \\ V_i \subseteq \mathbb{R}^n \arrow[ur, "F_i"'] & \end{tikzcd} \qquad F_i := f_i \circ \varphi_i^{-1} : V_i \to \mathbb{R} \quad \text{es } \mathcal{C}^\infty.$$
$$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto F_i(x_1, \ldots, x_n)$$

Ejemplo: Si para todo $p \in \mathcal{U}_i$ escribimos $\varphi_i(p) = (x_1(p), \ldots, x_n(p)) \in \mathbb{R}^n$ "coordenadas"

$\Rightarrow \forall j = 1, \ldots, n$ la función $x_j : \mathcal{U}_i \to \mathbb{R}$, $p \mapsto x_j(p)$ es $\mathcal{C}^\infty$.

Importante: Podemos definir una variedad diferenciable M a partir de:

① Un atlas: Definimos M como un espacio topológico junto con un cubrimiento abierto $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ (i.e., $M = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$) tq para todo $i \in I$ hay homeomorfismos $\varphi_i : \mathcal{U}_i \xrightarrow{\sim} \underset{\text{abierto}}{V_i \subseteq \mathbb{R}^n}$, y tal que $\forall i, j \in I$ con $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \neq \emptyset$ hay

$$\begin{tikzcd} \underbrace{\varphi_j^{-1}(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)}_{\subseteq V_j \subseteq \mathbb{R}^n} \arrow[r, "\sim", "\varphi_j"'] \arrow[rr, bend right, "g_{ij}"'] & \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j & \underbrace{\varphi_i^{-1}(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)}_{\subseteq V_i \subseteq \mathbb{R}^n} \arrow[l, "\sim"', "\varphi_i"] \end{tikzcd}$$

difeomorfismos g_{ij}, con inversa dada por $g_{ij}^{-1} = g_{ji}$.

Equivalentemente, a partir de:

② Un "haz" de funciones $\mathcal{C}^\infty$: Definimos M como un espacio topológico junto con un haz $\mathcal{F} := \mathcal{C}^\infty_M$ tal que para todo abierto $\mathcal{U} \subseteq M$ le asociamos un $\mathbb{R}$-álgebra de "funciones regulares" $\mathcal{C}^\infty_M(\mathcal{U}) = \{f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}\}$ tq para todo $p \in M$ existe $\mathcal{U}_p \subseteq M$ vecindad abierta de p y $V_p \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto tq

$$\mathcal{C}^\infty_M(\mathcal{U}_p) \cong \mathcal{C}^\infty(V_p) = \{F : V_p \to \mathbb{R} \text{ función } \mathcal{C}^\infty\}$$

como $\mathbb{R}$-álgebras.

Objetivo: Reemplazar $\mathbb{R}$ por otros cuerpos k usando ② !

↳ Necesitamos introducir el lenguaje de categorías y haces.

§1. Categorías y Functores

Def: Una categoría (pequeña) $\mathcal{C}$ consiste en:

① Una colección $Ob(\mathcal{C})$ de conjuntos, llamados los objetos de la categoría.

② Para todo par A, B de objetos en $\mathcal{C}$, un conjunto $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ (o bien, simplemente $Hom(A,B)$), cuyos elementos $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ son llamados morfismos y que cumplen:

a) Podemos componerlos:

$$\begin{aligned} Hom(A,B) \times Hom(B,C) &\longrightarrow Hom(A,C) \\ (f,g) &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

b) La composición es asociativa: $(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$.

c) Para todo objeto $A \in Ob(\mathcal{C})$ existe (un único) $Id_A \in Hom(A,A)$ tal que $Id_A \circ f = f$ y $g \circ Id_A = g$ para todos f, g.

Terminología: Un isomorfismo entre dos objetos $A, B \in Ob(\mathcal{C})$ es un morfismo $f \in Hom(A,B)$ tal que existe (un único) $g \in Hom(B,A)$ que cumple:

$$f \circ g = Id_B \quad \text{y} \quad g \circ f = Id_A \rightsquigarrow \text{Notación: } A \cong B \ \text{ o } \ A \cong_{\mathcal{C}} B.$$

En part, un automorfismo de A es un isomorfismo $\varphi \in Hom(A,A)$.

Ejemplos típicos: Las categorías más comunes son (la notación varía en la literatura) Conj (conjuntos), Anillos, An (anillos conmutativos con unidad), Grp (grupos), Ab (grupos abelianos), Vec_k (k-espacios vectoriales), A-Mod (A-módulos), Top (espacios topológicos), Man^{∞} (variedades $\mathcal{C}^{\infty}$); con sus morfismos respectivos.

Obs: A-Mod tiene la propiedad adicional que $Hom_{A\text{-mod}}(M,N)$ son grupos abelianos (Más adelante: es una "categoría abeliana"). Notar también que si $A = k$ entonces k-Mod $= Vec_k$ y si $A = \mathbb{Z}$ entonces $\mathbb{Z}$-Mod $=$ Ab.

Ejemplos más exóticos:

① Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $A \in Ob(\mathcal{C})$ un objeto. La categoría fibrada $\mathcal{C}_A$ (definida por Grothendieck en 1959) está dada por:

① Objetos: (B, φ), donde $B \in Ob(\mathcal{C})$ y $\varphi \in Hom(B,A)$

② Morfismos: Diagramas de la forma

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & C \arrow[dl, "\psi"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

ie, $Hom_{\mathcal{C}_A}((B,\varphi),(C,\psi)) = \{ f \in Hom(B,C) \text{ tq } \varphi = \psi \circ f \}$.

En part, la composición $g \circ f$ está dada por

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] \arrow[d, "\varphi"'] & C \arrow[r, "g"] \arrow[dl, "\psi"] \arrow[d, "\psi"] & D \arrow[dl, "\theta"] \\ A & A & \end{tikzcd}$$

donde $\varphi = \theta \circ (g \circ f)$ pues $\theta \circ g = \psi$ y $\varphi = \psi \circ f$.

② Sea $\mathcal{C}$ una categoría. La categoría opuesta $\mathcal{C}^{op}$ está dada por:

① $Obj(\mathcal{C}^{op}) := Obj(\mathcal{C})$, ② $Hom_{\mathcal{C}^{op}}(A,B) := Hom_{\mathcal{C}}(B,A)$.

Ejemplo importante: Sea X un espacio topológico, definimos como $\underline{Top}(X)$ la categoría cuyos objetos son los abiertos de X, y cuyos morfismos son:

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{U},V) = \begin{cases} \{i : \mathcal{U} \hookrightarrow V\} \text{ (inclusión)} & \text{si } \mathcal{U} \subseteq V. \\ \emptyset & \text{si } \mathcal{U} \not\subseteq V. \end{cases}$$

Ejercicio Describir geométricamente la composición de morfismos en $\underline{Top}(X)$.

Tal como consideramos morfismos entre objetos, podemos considerar "functores" entre categorías:

Def: Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías. Un functor covariante $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ consiste en:

① Funciones que asignan cada $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ en un $\mathcal{F}(A) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$.

② Funciones entre los morfismos: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(A),\mathcal{F}(B))$ para todos $A,B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, que son compatibles con la composición e identidad:

a) Si para cada $f : A \to B$ en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ escribimos $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(A) \to \mathcal{F}(B)$ en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(A),\mathcal{F}(B))$, entonces $\mathcal{F}(\mathrm{Id}_A) = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(A)}$.

b) Para cada $f : A \to B$ en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ y $g : B \to C$ en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C)$ se tiene que $\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$.

En part, los functores preservan isomorfismos: $A \cong B \Rightarrow \mathcal{F}(A) \cong \mathcal{F}(B)$.

Obs: Para definir un functor contravariante $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ consiste en la misma información excepto que en ② intercambiamos la dirección de las flechas: Si $f : A \to B$ morfismo en $\mathcal{C}$, entonces $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(B) \to \mathcal{F}(A)$ y también $\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$. Notar que un functor contravariante $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es lo mismo que un functor covariante $\mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$.

Ejemplos típicos:

① Los functores de olvido sirven para "olvidar" estructuras adicionales. Por ejemplo, $\underline{An} \to \underline{Conj}$ asocia al anillo $(A,+,\cdot)$ el conjunto A subyacente, y asocia al morfismo de anillos $f : A \to B$ la función entre conjuntos subyacente.

Otros ejemplos: $\underline{Vec}_k \to \underline{Conj}$, $\underline{A\text{-Mod}} \to \underline{Ab}$, $\underline{Man}^{\infty} \to \underline{Top}$, etc.

② Extensión de escalares: Sea $A \in \underline{An}$ anillo abeliano y sea B una A-álgebra entonces $\mathcal{F} : \underline{A\text{-Mod}} \to \underline{B\text{-Mod}}$, $M \mapsto M \otimes_A B$ es un functor covariante.

③ Sea A anillo abeliano y P un A-módulo. Entonces el functor

a) $\mathcal{F} : \underline{A\text{-Mod}} \to \underline{Ab}$, $M \mapsto \mathrm{Hom}_A(M,P)$ es contravariante; $\mathcal{F}(f) := f^*$ "pull back"

b) $\mathcal{F} : \underline{A\text{-Mod}} \to \underline{Ab}$, $M \mapsto \mathrm{Hom}_A(P,M)$ es covariante; $\mathcal{F}(f) := f_*$ "push forward"

④ Functor de puntos (o Functor de Yoneda): Sea A un objeto en $\mathcal{C}$. Definimos $h^A : \mathcal{C} \to \underline{Conj}$ mediante $h^A(B) := \mathrm{Hom}(B,A)$ para $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ y para un morfismo $f : B \to C$ definimos

$$h^A(f) : \mathrm{Hom}(C,A) \to \mathrm{Hom}(B,A)$$
$$[g : C \to A] \mapsto [g \circ f : B \to A]$$

§2. Transformaciones naturales y Functores adjuntos

Def: Sean $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $\mathcal{G} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ dos functores covariantes. Por definición, una <u>transformación natural</u> $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ entre $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ consiste en una colección $\varphi_A : \mathcal{F}(A) \to \mathcal{G}(A)$ de funciones, una para cada $A \in Ob(\mathcal{C})$, que son compatibles con los morfismos: si $f : A \to B$ en $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ entonces:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(A) & \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} & \mathcal{F}(B) \\ {\scriptstyle \varphi_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_B} \\ \mathcal{G}(A) & \xrightarrow{\mathcal{G}(f)} & \mathcal{G}(B) \end{array}$$

es conmutativo para todos $A, B \in Ob(\mathcal{C})$. (ie, $\varphi_B \circ \mathcal{F}(f) = \mathcal{G}(f) \circ \varphi_A$).

En part, si cada φ_A es biyectiva decimos que $\varphi : \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$ es un <u>isomorfismo natural</u>.

Obs: Si $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son tres categorías, y si $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $\mathcal{G} : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ son functores covariantes entonces podemos definir el functor $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ mediante $(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})(A) = \mathcal{G}(\mathcal{F}(A))$ para $A \in Ob(\mathcal{A})$ y para $f : A_1 \to A_2$ morfismo en $Hom_{\mathcal{A}}(A_1, A_2)$ se tiene $(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})(f) = \mathcal{G}(\mathcal{F}(f)) : \mathcal{G}(\mathcal{F}(A_1)) \to \mathcal{G}(\mathcal{F}(A_2))$.

Las transformaciones naturales permiten formalizar la intuición detrás de la frase "las categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son esencialmente las mismas":

Def: Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías. Decimos que $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son <u>equivalentes</u> si existen functores covariantes $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $\mathcal{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tales que $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ es naturalmente isomorfo a $Id_{\mathcal{D}}$ y $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ es naturalmente isomorfo a $Id_{\mathcal{C}}$, en cuyo caso decimos que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ definen una <u>equivalencia de categorías</u>. Aquí, $Id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ y $Id_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ son los functores identidad.

<u>Ejemplo</u>: Consideremos las categorías $\mathcal{V}_k$ y $\underline{Vec}_k^{fin}$ dadas por: sea k un cuerpo:

$\mathcal{V}_k \rightsquigarrow$ <u>Objetos</u>: $\{k^n\}_{n \in \mathbb{N}}$

<u>Morfismos</u>: $Hom(k^n, k^m) = \{f : k^n \to k^m \text{ lineal}\} \overset{\text{"canónico"}}{\cong} M_{m \times n}(k)$

$\underline{Vec}_k^{fin} \rightsquigarrow$ <u>Objetos</u>: k-ev de <u>dimensión finita</u>

<u>Morfismos</u>: $Hom(V, W) = \{f : V \to W \text{ lineal}\}$

Así, hay un functor $\mathcal{F} : \mathcal{V}_k \to \underline{Vec}_k^{fin}$, $k^n \mapsto k^n$ con $\mathcal{F}(f) = f$.

Por otro lado, si consideramos el functor "elegir una base" $\mathcal{G} : \underline{Vec}_k^{fin} \to \mathcal{V}_k$ donde para cada $V \in \underline{Vec}_k^{fin}$ <u>fijamos</u> una base $\mathcal{B}$ de V. (y donde para $V = k^n$ escogemos la base canónica $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$).

$V \mapsto (V, \mathcal{B}) \underset{\text{coordenadas}}{\cong} k^n$

$f \mapsto Mat_{\mathcal{B}}(f)$

$\Rightarrow \mathcal{F} \circ \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} Id_{\underline{Vec}_k^{fin}}$ y $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} Id_{\mathcal{V}_k}$

Luego, $\mathcal{F}$ (o $\mathcal{G}$) define una equivalencia entre las categorías $\mathcal{V}_k$ y $\underline{Vec}_k^{fin}$

Obs: Veremos que hay una equivalencia entre las categorías de "variedades algebraicas afines sobre k" y de "k-álgebras (abelianas) <u>finitamente generadas</u> y <u>reducidas</u> (ie, sin nilpotentes no-nulos)" (cf. pág 1: ① $\Leftrightarrow$ ②).

<u>Recuerdo/Motivación</u>: Recordemos que si $u: H \to H$ es un operador lineal acotado en un espacio de Hilbert H, entonces el teorema de representación de Riesz implica que existe un único $u^*: H \to H$ lineal acotado tq $\langle u(f), g\rangle = \langle f, u^*(g)\rangle$ para todo $f, g \in H$. Decimos que u^* es el <u>adjunto</u> de u.

<u>Def</u>: Sean $\mathcal{F}: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ dos functores covariantes. Decimos que $(\mathcal{F}, G)$ es un par de functores <u>adjuntos</u> si para todos $A \in Ob(\mathcal{C})$ y $B \in Ob(\mathcal{D})$ hay una "biyección natural"

$$\tau_{AB}: Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(A), B) \xrightarrow{\sim} Hom_{\mathcal{C}}(A, G(B)).$$

Aquí, "biyección natural" significa que si $f: A_1 \to A_2$ y $g: B_1 \to B_2$ son morfismos en $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, respectivamente, entonces:

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(A_1), B_1) \arrow[r, "\sim", "\tau_{A_1B_1}"'] \arrow[d] & Hom_{\mathcal{C}}(A_1, G(B_1)) \arrow[d] \\ Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(A_2), B_2) \arrow[r, "\sim", "\tau_{A_2B_2}"'] & Hom_{\mathcal{C}}(A_2, G(B_2)) \end{tikzcd}$$ es conmutativo.

En este caso decimos que $\mathcal{F}$ es el <u>adjunto izquierdo</u> de G, y que G es el <u>adjunto derecho</u> de $\mathcal{F}$. Además, escribiremos $\mathcal{F} \dashv G$.

<u>Ejemplo importante</u>: Sea A un anillo abeliano y sean M, N, P tres A-módulos. Recordemos que $Bil_A(M \times N, P) = \{B: M \times N \to P \text{ aplicación } A\text{-bilineal}\}$.

Por un lado, la <u>propiedad universal</u> del producto tensorial $\otimes_A$ nos dice que $Bil_A(M \times N, P) \cong Hom_A(M \otimes_A N, P)$ como A-módulos.

Por otro lado, fijando la primera variable de $B: M \times N \to P$ obtenemos una aplicación A-lineal $\hat{B}: M \to Hom_A(N, P)$, $m \mapsto B(m, \cdot)$

$\Rightarrow Bil_A(M \times N, P) \cong Hom_A(M, Hom_A(N, P))$ como A-módulos.

Luego, obtenemos un isomorfismo

$$Hom_A(\underbrace{M \otimes_A N}_{:= \mathcal{F}(M)}, P) \cong Hom_A(M, \underbrace{Hom_A(N, P)}_{:= G(P)})$$

Con un poco de paciencia se verifica que dicho isomorfismo es functorial y así los functores $\mathcal{F}: \underline{A\text{-Mod}} \to \underline{A\text{-Mod}}$, $M \mapsto M \otimes_A N$ y $G: \underline{A\text{-Mod}} \to \underline{A\text{-Mod}}$, $P \mapsto Hom_A(N, P)$ son adjuntos para todo N fijo, ie, $(\cdot) \otimes_A N$ y $Hom_A(N, \cdot)$ son adjuntos.

<u>Caso particular</u>: Si $A = k$ es un cuerpo y $\mathcal{U}, V, W$ son k-ev de dimensión <u>finita</u> entonces $Hom_k(V, W) \cong V^* \otimes_k W$. Luego:

$$Hom_k(\mathcal{U} \otimes_k V, W) \cong Hom_k(\mathcal{U}, V^* \otimes_k W)$$

<u>Convención</u> (espacio dual): Dado que en geometría la notación $(\cdot)^*$ se usa usualmente para <u>pullback</u>, es que el espacio dual de un k-ev V será denotado $V^\vee$. En particular, el isomorfismo anterior se escribe como:

$$Hom_k(\mathcal{U} \otimes_k V, W) \cong Hom_k(\mathcal{U}, V^\vee \otimes_k W).$$

§3. Prehaces y Haces

Motivación: Sea $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $g : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ función holomorfa tal que $g(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathcal{U}$. ¿Existe $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $g = e^f$?

La respuesta depende de $\mathcal{U}$:

a) Si $\mathcal{U} = \mathbb{C}$ la respuesta es sí: La función $f(z) = \int_1^z \frac{g'(s)}{g(s)} ds$ funciona ✓

b) Si $\mathcal{U} = \mathbb{C}^*$ la respuesta es no: Considerar $g = \mathrm{Id}$ (obtendríamos un logaritmo en todo $\mathbb{C}^*$, lo cual no es posible).

Por otro lado, localmente la respuesta es sí: basta tomar cualquier logaritmo en un pequeño disco y considerar $f = \log(g)$.

⇝ La noción de haz (Leray, 1945) fue creada para tomar en cuenta estas propiedades locales, y obtener a partir de ellas enunciados globales.

Durante toda esta sección X será un espacio topológico.

Recuerdo: Una base $\mathcal{B}$ de X es una colección de subconjuntos de X tal que todo abierto de X es unión de conjuntos abiertos en $\mathcal{B}$. Así,

$\mathcal{B}$ es una base de X $\iff$ Para todos $\mathcal{U}, V \subseteq X$ abiertos y todo $x \in \mathcal{U} \cap V$, existe $W \in \mathcal{B}$ abierto tal que $x \in W \subseteq \mathcal{U} \cap V$.

Ejemplos:

① $X = \mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{B} = \{\text{bolas abiertas}\}$

② Si X es sólo un conjunto, decimos que $\mathcal{B}$ es una base si

a) Para todo $x \in X$, existe $\mathcal{U} \in \mathcal{B}$ tal que $x \in \mathcal{U}$.

b) Si $x \in \mathcal{U} \cap V$ con $\mathcal{U}, V \in \mathcal{B}$, entonces existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $x \in W \subseteq \mathcal{U} \cap V$.

Una base en este sentido define una topología en X: los abiertos serán todas las posibles uniones de elementos de $\mathcal{B}$.

③ Si X es un conjunto y consideramos $\mathcal{B} = \left\{ \begin{matrix} \text{complementos de} \\ \text{conjuntos finitos} \end{matrix} \right\}$, entonces si X es un conjunto infinito, la topología definida por $\mathcal{B}$ no es Hausdorff.

Def: Un prehaz $\mathcal{F}$ en el espacio topológico X consiste en:

① Para todo abierto $\mathcal{U} \subseteq X$, un conjunto $\mathcal{F}(\mathcal{U})$

② Para cada inclusión $\mathcal{U} \hookrightarrow V$ de abiertos, una aplicación de restricción

$$r_{V,\mathcal{U}} : \mathcal{F}(V) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{U}),$$
$$s \longmapsto r_{V,\mathcal{U}}(s) =: s|_{\mathcal{U}}$$

tal que:

a) Si $\mathcal{U} \hookrightarrow V \hookrightarrow W$ son inclusiones de abiertos, las restricciones conmutan:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(W) \arrow[r, "r_{W,V}"] \arrow[rr, bend right, "r_{W,\mathcal{U}}"'] & \mathcal{F}(V) \arrow[r, "r_{V,\mathcal{U}}"] & \mathcal{F}(\mathcal{U}) \end{tikzcd}$$

, i.e., $r_{W,\mathcal{U}} = r_{V,\mathcal{U}} \circ r_{W,V}$

b) $r_{\mathcal{U},\mathcal{U}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(\mathcal{U})}$ para todo abierto $\mathcal{U} \subseteq X$.

Terminología: Los elementos $s \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ son llamados secciones de $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{U}$. Además, por motivos que veremos después, en la práctica escribimos

$$\mathcal{F}(\mathcal{U}) =: \Gamma(\mathcal{U},\mathcal{F}) =: H^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$$

Por convención, cuando hablamos de "secciones de $\mathcal{F}$" nos referimos implícitamente al caso $\mathcal{U} = X$, ie, elementos de $\Gamma(X,\mathcal{F})$ $\rightsquigarrow$ secciones globales.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Recordemos (ver §1) que $\underline{Top}(X)$ es la categoría cuyos objetos son los abiertos de X y cuyos morfismos son las inclusiones. Probar que un prehaz es lo mismo que un functor contravariante

$$\mathcal{F} : \underline{Top}(X) \longrightarrow \underline{Conj}$$

Obs: Esta interpretación es útil pues puede generalizarse (cf. "topologías de Grothendieck").

Ejemplos

① $X = \mathbb{R}^n$ (o una variedad diferenciable) y $\mathcal{F} = \mathcal{C}^\infty$ el prehaz de funciones diferenciables, donde $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}) = \{ f : \mathcal{U} \to \mathbb{R} \text{ diferenciable}\}$ es un $\mathbb{R}$-álgebra! Aquí, la restricción $\mathcal{C}^\infty(V) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$, $f \longmapsto f|_{\mathcal{U}}$ es la restricción de funciones.

② Prehaz constante: Sea S un conjunto fijo. El prehaz constante $\mathcal{F} := S$ está dado por $\mathcal{F}(\mathcal{U}) = S$ para todo abierto $\mathcal{U} \subseteq X$, y donde las restricciones son Id_S.

③ Funciones localmente constantes: Sea S un conjunto fijo. Decimos que una función $f : \mathcal{U} \to S$, donde $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto, es localmente constante si para cada punto $x \in \mathcal{U}$ existe una vecindad abierta V_x tal que $x \in V_x \subseteq \mathcal{U}$ y $f|_{V_x}$ es constante. (eg. En $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ la función $sgn(x) = \frac{x}{|x|}$ es loc. constante)
El prehaz $\mathcal{F}$ dado por $\mathcal{F}(\mathcal{U}) = \{ f : \mathcal{U} \to S \text{ localmente constante}\}$, donde las restricciones son las restricciones de funciones, es denotado $\underline{S}$.

④ Prehaz rascacielo: Sea S un conjunto fijo y $x_0 \in X$ un punto. El prehaz rascacielo asociado está dado por $i_{x_0}(S)$, donde:

$$(i_{x_0}(S))(\mathcal{U}) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x_0 \notin \mathcal{U} \\ S & \text{si } x_0 \in \mathcal{U} \end{cases}.$$

⚠ Estructura adicional: Típicamente consideramos prehaces tales que $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ tiene una estructura adicional y los morfismos de restricción preservan dicha estructura:

•) Un prehaz de grupos: $\underbrace{\mathcal{F}(V)}_{\text{grupo}} \xrightarrow{r_{V,\mathcal{U}}} \underbrace{\mathcal{F}(\mathcal{U})}_{\text{grupo}}$, además: $\underbrace{\mathcal{F}(\emptyset) = \{0\}}_{\text{grupo trivial}}$
morfismo de grupo

•) Similar: Prehaz en grupos abelianos, k-esp. vectoriales, k-álgebras, etc.

Obs: En términos categóricos, consideramos functores contravariantes

$$\mathcal{F} : \underline{Top}(X) \longrightarrow \mathcal{C}$$

donde $\mathcal{C}$ es su categoría favorita.

Def: Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos prehaces en X con valores en la misma categoría $\mathcal{C}$ (eg. $\mathcal{C} = \underline{\mathrm{Conj}}$ o $\mathcal{C} = \underline{\mathrm{Ab}}$, etc). Un <u>morfismo de prehaces</u> $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ consiste en:

① Para todo abierto $\mathcal{U} \subseteq X$, un morfismo $\varphi_{\mathcal{U}} : \mathcal{F}(\mathcal{U}) \to \mathcal{G}(\mathcal{U})$

② Para cada inclusión $\mathcal{U} \hookrightarrow V$ de abiertos, el diagrama

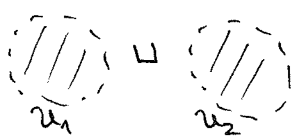
$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\varphi_V"] \arrow[d, "r_{V,\mathcal{U}}"'] & \mathcal{G}(V) \arrow[d, "r_{V,\mathcal{U}}"] \\ \mathcal{F}(\mathcal{U}) \arrow[r, "\varphi_{\mathcal{U}}"] & \mathcal{G}(\mathcal{U}) \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que un morfismo de prehaces es lo mismo que una transformación natural $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ entre los functores $\mathcal{F} : \underline{\mathrm{Top}}(X) \to \mathcal{C}$ y $\mathcal{G} : \underline{\mathrm{Top}}(X) \to \mathcal{C}$.

<u>Ejemplo</u>: Sea G un grupo abeliano, y sean G y $\underline{G}$ los prehaces de (funciones) constantes y funciones localmente constantes con valores en G. Entonces, hay un morfismo de prehaces $\varphi : G \to \underline{G}$ donde para cada abierto $\mathcal{U} \subseteq X$: $\varphi_{\mathcal{U}} : G(\mathcal{U}) \to \underline{G}(\mathcal{U})$ envía $g \in G(\mathcal{U}) = G$ en la función (globalmente!) constante $f : \mathcal{U} \to G$, $x \mapsto f(x) = g$.

Notar que $\varphi_{\mathcal{U}}$ <u>no</u> es necesariamente un isomorfismo de grupos:

$\mathcal{U} =$  (unión disjunta de $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$)

$$f(x) = \begin{cases} g_1 & \text{si } x \in \mathcal{U}_1 \\ g_2 & \text{si } x \in \mathcal{U}_2 \end{cases}$$

es localmente constante, pero <u>no</u> es constante si $g_1 \neq g_2$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ $\varphi_{\mathcal{U}}$ es un isomorfismo si $\mathcal{U}$ es conexo.

Def: Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos prehaces de grupos abelianos en X, y sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de prehaces. Definimos los prehaces $\ker \varphi$ e $\mathrm{im}\, \varphi$ por:

$(\ker \varphi)(\mathcal{U}) := \ker[\varphi_{\mathcal{U}} : \mathcal{F}(\mathcal{U}) \to \mathcal{G}(\mathcal{U})]$ e $(\mathrm{im}\, \varphi)(\mathcal{U}) := \mathrm{Im}[\varphi_{\mathcal{U}} : \mathcal{F}(\mathcal{U}) \to \mathcal{G}(\mathcal{U})]$ para todo $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto.

Más aún, si $\mathcal{E}$ es otro prehaz de grupos abelianos en X decimos que $\mathcal{E}$ es un <u>sub-prehaz</u> de $\mathcal{F}$ (y escribimos $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$) si para todo abierto $\mathcal{U} \subseteq X$ $\mathcal{E}(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{U})$ sub-grupo abeliano y $r_{V,\mathcal{U}}(\mathcal{E}(V)) \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{U})$. En este caso, definimos el <u>prehaz cociente</u> por $(\mathcal{F}/\mathcal{E})(\mathcal{U}) := \mathcal{F}(\mathcal{U})/\mathcal{E}(\mathcal{U})$ para todo abierto $\mathcal{U} \subseteq X$.

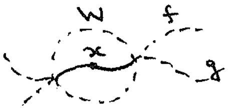
En particular, $\ker \varphi \subseteq \mathcal{F}$ e $\mathrm{im}\, \varphi \subseteq \mathcal{G}$ son sub-prehaces, y definimos el prehaz $\mathrm{coker}\, \varphi$ por $(\mathrm{coker}\, \varphi)(\mathcal{U}) := \mathcal{G}(\mathcal{U}) / (\mathrm{im}\, \varphi)(\mathcal{U})$ para todo abierto $\mathcal{U} \subseteq X$

Antes de definir el concepto de haz, recordemos la definición del "germen" de una función diferenciable en un punto:

Recuerdo (gérmenes): Sea $X = \mathbb{R}^n$ (o una variedad diferenciable) y $\mathcal{F} = \mathcal{C}^\infty$ el prehaz de funciones diferenciables. Dados un punto $x \in X$, los gérmenes de funciones diferenciables en x son (clases de equivalencia de) pares de la forma

$$\{(f, \mathcal{U}), \text{ donde } x \in \mathcal{U} \text{ abierto y } f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})\},$$

donde $(f,\mathcal{U}) \sim (g, V)$ si existe $W \subseteq \mathcal{U} \cap V$ abierto tal que $x \in W$ y $f|_W = g|_W$.



El conjunto de gérmenes de funciones diferenciables en $x \in X$ se llama el tallo de $\mathcal{C}^\infty$ en x, y se denota $\mathcal{C}^\infty_x$.

Ejercicio: Verificar que $\mathcal{C}^\infty_x$ es un anillo y que $m_x := \{f \in \mathcal{C}^\infty_x \text{ tal que } f(x) = 0\}$ es un ideal de $\mathcal{C}^\infty_x$. Más aún, si consideramos el morfismo de anillos

$$ev_x : \mathcal{C}^\infty_x \twoheadrightarrow \mathbb{R}, \quad f \longmapsto f(x)$$

entonces $m_x = \ker(ev_x)$ y luego m_x es un ideal maximal. De hecho, es el único ideal maximal de $\mathcal{C}^\infty_x$ (pues todo germen en $\mathcal{C}^\infty_x \setminus m_x$ es invertible). En otras palabras, $\mathcal{C}^\infty_x$ es un anillo local (ie, un anillo con un único ideal maximal).

Def: Sea $\mathcal{F}$ un prehaz en X. El tallo ("stalk") de $\mathcal{F}$ en un punto $x \in X$ es:

$$\mathcal{F}_x := \varinjlim_{\substack{\mathcal{U} \\ x \in \mathcal{U}}} \mathcal{F}(\mathcal{U}) = \left(\coprod_{\substack{\mathcal{U} \text{ abierto} \\ \text{tq } x \in \mathcal{U}}} \mathcal{F}(\mathcal{U}) \right) \Big/ \sim,$$

donde para $s \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ y $t \in \mathcal{F}(V)$ se tiene que $s = t$ en $\mathcal{F}_x$ si existe $W \subseteq \mathcal{U} \cap V$ abierto tal que $x \in W$ y $s|_W = t|_W$ en $\mathcal{F}(W)$.

Si $\mathcal{U}$ es una vecindad abierta del punto $x \in X$ y $s \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ es una sección de $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{U}$, denotamos por s_x la clase de s en el tallo $\mathcal{F}_x$ y la llamamos el germen de s en el punto $x \in X$.

Finalmente, a continuación definimos qué es un haz: es un prehaz donde exigimos que secciones locales s_i en abiertos $\mathcal{U}_i$ que cubren un abierto $\mathcal{U}$ y que coinciden en las intersecciones $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$ pueden pegarse de manera única en una sección s en el abierto $\mathcal{U}$.

Def: Sea $\mathcal{F}$ un prehaz de grupos abelianos en X. Decimos que $\mathcal{F}$ es un haz si se cumplen las siguientes condiciones para todo $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto:

1. Pegado: Si $\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$ cubrimiento abierto, y si $s_i \in \mathcal{F}(\mathcal{U}_i)$ son secciones tales que $s_i|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j} = s_j|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j}$ para todos $i, j \in I$. Entonces, existe $s \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ una sección tal que $s|_{\mathcal{U}_i} = s_i$ para todo $i \in I$.
2. Unicidad: Si $\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$ cubrimiento abierto y $s \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ una sección, entonces si $s|_{\mathcal{U}_i} = 0$ en $\mathcal{F}(\mathcal{U}_i)$ para todo $i \in I$ $\Rightarrow s = 0$ en $\mathcal{F}(\mathcal{U})$.

Ejercicio: Escribir la condición de unicidad 2 cuando $\mathcal{F}$ es un prehaz con valores en una categoría arbitraria $\mathcal{C}$.

Ejemplos: ① El prehaz $\mathcal{C}^\infty$ de funciones diferenciables es un haz.

② Sea G un grupo abeliano. El prehaz constante G no es necesariamente un haz: $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \sqcup \mathcal{U}_2$ si $g_i \in G(\mathcal{U}_i) \underset{\text{df}}{=} G$ son diferentes $(i=1,2)$ $\Rightarrow \nexists\, g \in G(\mathcal{U}) = G$ tal que $g|_{\mathcal{U}_1} = g_1$ y $g|_{\mathcal{U}_2} = g_2$.

Por otra parte, si todo abierto no vacío de X es conexo entonces G es un haz (veremos que esto ocurre en una variedad algebraica irreducible).

③ Sea G un grupo abeliano. El prehaz $\underline{G}$ de funciones localmente constantes en X con valores en G es un haz.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea G un grupo abeliano y $x_0 \in X$ un punto. Demostrar que el prehaz rascacielos $i_{x_0}(G)$ dado por

$$(i_{x_0}(G))(\mathcal{U}) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } x_0 \notin \mathcal{U} \\ G & \text{si } x_0 \in \mathcal{U} \end{cases}$$

es un haz.

⚠ Importante: Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ haces de grupos abelianos en X. Por definición, un morfismo de haces $\varphi: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un morfismo entre los prehaces subyacentes. Notemos que si $\varphi: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un morfismo de haces de grupos abelianos:

① El prehaz $\ker\varphi$ es siempre un haz: Veamos el "pegado" y "unicidad" simultaneamente:

Sea $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto y $\mathcal{U} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$ cubrimiento abierto. Sean $s_i \in \mathcal{F}(\mathcal{U}_i)$ secciones tal que $s_i \in (\ker\varphi)(\mathcal{U}_i)$ para todo $i \in I$, ie, $\varphi_{\mathcal{U}_i}(s_i) = 0$ en $\mathcal{G}(\mathcal{U}_i)$.

Si $s_i|_{\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j} = s_j|_{\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j}$ en $\mathcal{F}(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$ para todo $i,j \in I$ $\underset{\mathcal{F}\text{ haz}}{\Longrightarrow} \exists!\, s \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ tal que $s|_{\mathcal{U}_i} = s_i \ \forall i \in I$. Más aún, tenemos que $\varphi_{\mathcal{U}}(s)|_{\mathcal{U}_i} = \varphi_{\mathcal{U}_i}(s|_{\mathcal{U}_i}) = \varphi_{\mathcal{U}_i}(s_i) = 0$ en $\mathcal{G}(\mathcal{U}_i)\ \forall i \in I \underset{\mathcal{G}\text{ haz}}{\Longrightarrow} \varphi_{\mathcal{U}}(s) = 0$.

Luego, $s \in (\ker\varphi)(\mathcal{U})$.

② El prehaz $\operatorname{im}\varphi$ no necesariamente es un haz:

Sea $X = \mathbb{C}$ (o una variedad compleja) y sea $\mathcal{O}_X$ (resp. $\mathcal{O}_X^*$) el haz de funciones holomorfas (resp. el haz de funciones holomorfas que no se anulan). Consideremos el morfismo exponencial

$$\exp: \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X^*$$

grupo multiplicativo

dado por $\exp_{\mathcal{U}}: \mathcal{O}_X(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{O}_X^*(\mathcal{U}),\ f \longmapsto e^{2\pi i f}$

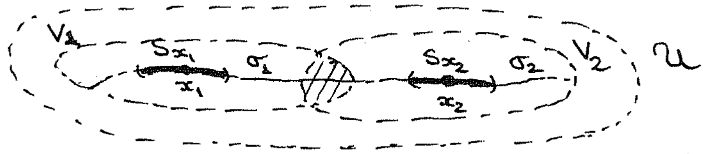
$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que $\ker(\exp) = \underline{\mathbb{Z}}$, pero que el prehaz $\operatorname{im}(\exp)$ no es un haz (la condición de pegado falla) y $\operatorname{coker}(\exp)$ tampoco.

Nos gustaría poder definir un "haz imagen". Es natural entonces preguntar ¿Cómo construir un haz a partir de un prehaz?

Def: Sea $\mathcal{F}$ un prehaz de grupos abelianos en X. Definimos el prehaz $\mathcal{F}^+$ en X, asociando a cada abierto $\mathcal{U} \subseteq X$ el grupo $\mathcal{F}^+(\mathcal{U})$ de "gérmenes compatibles" de $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{U}$. Explícitamente:

$$\mathcal{F}^+(\mathcal{U}) = \left\{ (s_x)_{x\in\mathcal{U}} \in \prod_{x\in\mathcal{U}} \mathcal{F}_x \text{ tal que: } \begin{array}{l} \text{Para todo } x \in \mathcal{U}, \text{ existe } V \subseteq \mathcal{U} \\ \text{vecindad abierta de } x \text{ y una sección} \\ \sigma \in \mathcal{F}(V) \text{ tal que } \sigma_y = s_y \text{ en } \mathcal{F}_y \ \forall y \in V \end{array} \right\}$$

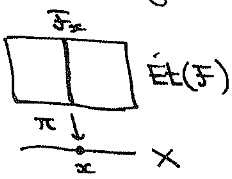
Geometricamente:



Obs: Para todo prehaz $\mathcal{F}$ hay un morfismo natural $j : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ que para todo abierto $\mathcal{U} \subseteq X$ y toda sección $s \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ le asocia $(s_x)_{x\in\mathcal{U}}$ el conjunto de gérmenes $s_x \in \mathcal{F}_x$ para todo $x \in \mathcal{U}$.

Prop: Sea $\mathcal{F}$ un prehaz de grupos abelianos en X. Entonces, $\mathcal{F}^+$ es un haz en X.

Dem: Definimos el "espacio étalé" de $\mathcal{F}$ como el conjunto

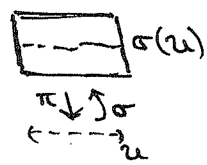


$$\text{Ét}(\mathcal{F}) = \coprod_{x\in X} \mathcal{F}_x,$$

que viene dotado de una proyección natural $\pi : \text{Ét}(\mathcal{F}) \to X$.

Una sección $s \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ define una función $\sigma : \mathcal{U} \to \text{Ét}(\mathcal{F})$

$$x \in \mathcal{U} \mapsto s_x \in \mathcal{F}_x$$



Los subconjuntos de $\text{Ét}(\mathcal{F})$ de la forma $\sigma(\mathcal{U})$ pueden ser usados como base para definir una topología de $\text{Ét}(\mathcal{F})$.

$\Rightarrow$ El conjunto $\mathcal{F}^+(\mathcal{U})$ coincide con el conjunto de funciones $\sigma : \mathcal{U} \to \text{Ét}(\mathcal{F})$ que son continuas respecto a esta topología. En part, $\mathcal{F}^+$ es un haz en X ■

Lema: Si $\mathcal{F}$ es un haz de grupos abelianos en X, entonces para todo $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto se tiene que $j_{\mathcal{U}} : \mathcal{F}(\mathcal{U}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}^+(\mathcal{U})$ es un isomorfismo.

Dem: Para la inyectividad, consideramos una sección $s \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ tal que $j_{\mathcal{U}}(s) = (s_x)_{x\in\mathcal{U}} = 0$ en $\mathcal{F}^+(\mathcal{U})$. En part, existe $\mathcal{U} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$ cubrimiento abierto tq $s|_{\mathcal{U}_i} = 0 \ \forall i \in I \underset{\mathcal{F} \text{ haz}}{\Rightarrow} s = 0$ ✓

Para la sobreyectividad consideramos $(s_x)_{x\in\mathcal{U}} \in \mathcal{F}^+(\mathcal{U})$ gérmenes compatibles de $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{U}$. La condición de compatibilidad implica la existencia de un cubrimiento abierto $\mathcal{U} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$ y secciones $\sigma_i \in \mathcal{F}(\mathcal{U}_i)$ tales que $(\sigma_i)_x = s_x \ \forall x \in \mathcal{U}_i$. En part, $(\sigma_i)_x = (\sigma_j)_x$ para todo $x \in \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$
$\underset{\text{Inyectividad}}{\Rightarrow} \sigma_i|_{\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j} = \sigma_j|_{\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j}$ para todos $i, j \in I \underset{\mathcal{F} \text{ haz}}{\Rightarrow}$ Las σ_i se pegan en $\sigma \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$

Más aún, $\sigma|_{\mathcal{U}_i} = \sigma_i \ \forall i \in I$ implica $\sigma_x = s_x \ \forall x \in \mathcal{U}$ ✓ ■

<u>Teorema</u> (propiedad universal): Sea $\mathcal{F}$ un prehaz de grupos abelianos en X. Entonces, el haz $\mathcal{F}^+$ junto con el morfismo de prehaces $j : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ cumplen la propiedad universal siguiente:

"Para todo haz de grupos abelianos $\mathcal{G}$ en X y cualquier morfismo de prehaces $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ existe un único morfismo de haces $\varphi^+ : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ tal que

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "j"'] & \mathcal{G} \\ \mathcal{F}^+ \arrow[ur, "\exists!\, \varphi^+"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo".

En particular, el par $(\mathcal{F}^+, j)$ es único módulo un único isomorfismo, y decimos que es el <u>haz asociado</u> a $\mathcal{F}$ (o la <u>hacificación</u> de $\mathcal{F}$).

<u>Dem</u>: La construcción de $\mathcal{F}^+$ y $j : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ es functorial: un morfismo de prehaces $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ induce un morfismo de haces $\varphi^+ : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}^+$ tal que

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \mathcal{G} \arrow[d] \\ \mathcal{F}^+ \arrow[r, "\varphi^+"] & \mathcal{G}^+ \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Luego, si $\mathcal{G}$ es un haz entonces $\mathcal{G} \cong \mathcal{G}^+$ por el Lema anterior. Luego, obtenemos el diagrama conmutativo deseado $\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "j"'] & \mathcal{G} \\ \mathcal{F}^+ \arrow[ur, "\varphi^+"'] & \end{tikzcd}$. $(\bigstar)$

Resta verificar la unicidad de φ^+: sea $\sigma = (s_x)_{x \in \mathcal{U}}$ una sección de $\mathcal{F}^+(\mathcal{U})$, y sea $\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$ cubrimiento abierto junto con secciones $\sigma_i \in \mathcal{F}(\mathcal{U}_i)$ tales que $(\sigma_i)_x = s_x \ \forall x \in \mathcal{U}_i$. La conmutatividad de $(\bigstar)$ implica que $\varphi^+(\sigma)|_{\mathcal{U}_i} = \varphi(\sigma_i)$, lo cual determina completamente $\varphi^+(\sigma)$ pues $\mathcal{G}$ es un haz. ∎

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $\mathcal{F}$ un prehaz de grupos abelianos en X. Probar que $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}_x^+ \ \forall x \in X$.

<u>Ejemplos</u>: ① Sea G un grupo abeliano. El haz asociado al prehaz constante G es el haz $\underline{G}$ de funciones localmente constantes, i.e., $G^+ = \underline{G}$.

② Sea $\mathcal{F}$ un haz de grupos abelianos en X y sea $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ un <u>sub-haz</u>. Definimos el <u>haz cociente</u> $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ como el haz asociado al prehaz cociente $(\mathcal{F}/\mathcal{E})_{pre}$, i.e., $\mathcal{F}/\mathcal{E} := (\mathcal{F}/\mathcal{E})_{pre}^+$. En part, si $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un morfismo de haces, definimos el <u>haz cokernel</u> como $\mathrm{Coker}(\varphi) := (\mathrm{coker}\,\varphi)^+$.

③ Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de haces. Definimos el <u>haz imagen</u> $\mathrm{Im}(\varphi)$ como el haz asociado al prehaz imagen $\mathrm{im}\,\varphi$, i.e., $\mathrm{Im}(\varphi) := (\mathrm{im}\,\varphi)^+$.

<u>Concretamente</u>: Una sección $\sigma \in \mathcal{G}(\mathcal{U})$ pertenece a $(\mathrm{Im}(\varphi))(\mathcal{U})$ si existe un cubrimiento abierto $\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$ y secciones $s_i \in \mathcal{F}(\mathcal{U}_i)$ tales que $\varphi(s_i) = \sigma|_{\mathcal{U}_i} \ \forall i \in I$. Es decir, son las secciones de $\mathcal{G}$ que provienen <u>localmente</u> de secciones de $\mathcal{F}$.

Def: Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de haces de grupos abelianos en X. Decimos que φ es:

① Inyectivo si $\ker(\varphi) = 0$.

② Sobreyectivo si $\mathrm{Im}(\varphi) = (\mathrm{im}\,\varphi)^+ = \mathcal{G}$.

③ Un isomorfismo de haces si es inyectivo y sobreyectivo.

Prop: Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de haces de grupos abelianos en X. Entonces, φ es un isomorfismo si y sólo si para todo $x \in X$ el morfismo inducido

$$\varphi_x : \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x$$

es un isomorfismo.

Dem: Dado $x \in X$, el morfismo inducido $\varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ a nivel de tallos se define considerando para todo germen $s_x \in \mathcal{F}_x$ un abierto $\mathcal{U}$ tq $x \in \mathcal{U}$ y una sección $s \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ tal que $s_x = [(s, \mathcal{U})]$, y definiendo $\varphi_x(s_x)$ como el germen de $\varphi(s) \in \mathcal{G}(\mathcal{U})$ en $\mathcal{G}_x$, ie, $\varphi_x(s_x) = [(\varphi(s), \mathcal{U})]$. En part, si φ es un isomorfismo entonces φ_x también, para todo $x \in X$ ✓

Sup. que $\varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ es un isomorfismo de grupos abelianos $\forall x \in X$ y veamos:

a) φ inyectiva: Sea $s \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ sección sobre un abierto $\mathcal{U} \subseteq X$ tq $\varphi(s) = 0$ en $\mathcal{G}(\mathcal{U}) \Rightarrow \varphi_x(s_x) = 0$ en $\mathcal{G}_x$ $\forall x \in \mathcal{U}$ $\underset{\varphi_x \text{ iny.}}{\Longrightarrow}$ $s_x = 0$ $\forall x \in \mathcal{U}$ $\underset{\mathcal{F} \text{ haz}}{\Longrightarrow}$ $s = 0$ ✓

b) φ sobreyectiva: Ejercicio. ■

Corolario: Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ morfismo de haces de grupos abelianos en X. Entonces, hay un isomorfismo de haces

$$\mathcal{F} / \ker\varphi \cong \mathrm{Im}(\varphi).$$

Dem: Usar el teorema del isomorfismo (de grupos!) para $\varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ $\forall x \in X$ ■

Gracias a la discusión anterior, podemos hablar de kernel, cokernel e imagen de haces. En particular, podemos hablar de sucesiones exactas.

Def: Sea $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una colección de haces de grupos abelianos en X y sean $\varphi_n : \mathcal{F}_n \to \mathcal{F}_{n+1}$ morfismos de haces $\forall n \in \mathbb{Z}$. Diremos que la sucesión

$$\cdots \xrightarrow{\varphi_{n-2}} \mathcal{F}_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} \mathcal{F}_n \xrightarrow{\varphi_n} \mathcal{F}_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} \cdots$$

es exacta si $\ker(\varphi_n) = \mathrm{Im}(\varphi_{n-1}) = (\mathrm{im}\,\varphi_{n-1})^+$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Más aún, una sucesión exacta corta es una sucesión exacta de la forma

$$0 \to \mathcal{F}' \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}'' \to 0.$$

Ejemplo importante: Sea $X = \mathbb{C}$ (o una variedad compleja). Entonces, la sucesión exponencial (Kodaira - Spencer, 1953):

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp(2\pi i\,\cdot)} \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0$$

es exacta.

§4. Espacios anillados y $\mathcal{O}_X$-módulos

Comenzamos por usar funciones continuas para conectar (pre)haces entre dos espacios topológicos X e Y.

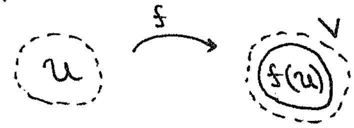
<u>Motivación</u>: Si $f: X \to Y$ es una función continua y $V \subseteq Y$ abierto, entonces $f^{-1}(V)$ es un abierto de X. Luego, a partir de un prehaz $\mathcal{F}$ en X podemos definir un prehaz $f_*\mathcal{F}$ en Y mediante:

$$(f_*\mathcal{F})(V) := \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \quad \text{para todo } V \subseteq Y \text{ abierto.}$$

Sin embargo, la imagen $f(\mathcal{U}) \subseteq Y$ de un abierto $\mathcal{U} \subseteq X$ <u>no</u> es necesariamente un abierto de Y. Luego, dado un prehaz $\mathcal{G}$ en Y <u>no</u> podemos usar $\mathcal{G}(f(\mathcal{U}))$, con $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto, para definir un prehaz en X.

Lo "mejor" que podemos hacer es "<u>aproximar</u>" $f(\mathcal{U}) \subseteq Y$ por abiertos, i.e., considerar vecindades abiertas de $f(\mathcal{U})$ y gérmenes de secciones:

$$(f^{-1}\mathcal{G})_{pre}(\mathcal{U}) := \varinjlim_{\substack{V \subseteq Y \text{ abierto} \\ \text{tq } f(\mathcal{U}) \subseteq V}} \mathcal{G}(V)$$



Concretamente, los elementos de $(f^{-1}\mathcal{G})_{pre}(\mathcal{U})$ son (clases de equivalencia) de gérmenes (s, V), con $s \in \mathcal{G}(V)$ y $f(\mathcal{U}) \subseteq V$ abierto, y donde $(s_1, V_1) \sim (s_2, V_2)$ si existe $W \subseteq Y$ abierto tal que $f(\mathcal{U}) \subseteq W \subseteq V_1 \cap V_2$ y $s_1|_W = s_2|_W$.

<u>Def</u>: Sea $f: X \to Y$ una función continua entre espacios topológicos. Sea $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{G}$) un prehaz en X (resp. en Y) entonces definimos

① El prehaz <u>imagen directa</u> $f_*\mathcal{F}$ en Y mediante

$$(f_*\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \quad \text{para todo } V \subseteq Y \text{ abierto.}$$

② El prehaz <u>imagen inversa</u> $(f^{-1}\mathcal{G})_{pre}$ en X mediante

$$(f^{-1}\mathcal{G})_{pre}(\mathcal{U}) = \varinjlim_{\substack{V \subseteq Y \text{ abierto} \\ \text{tq } f(\mathcal{U}) \subseteq V}} \mathcal{G}(V) \quad \text{para todo } \mathcal{U} \subseteq X \text{ abierto.}$$

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Con la misma notación de la definición anterior:

① Probar que si $\mathcal{F}$ es un haz en X, entonces $f_*\mathcal{F}$ es un haz en Y.

② Dar un ejemplo que muestre que incluso si $\mathcal{G}$ es un haz, <u>no</u> necesariamente $(f^{-1}\mathcal{G})_{pre}$ es un haz en X. [Indicación: Considerar $Y = \{pt\}$ un punto]

<u>Obs</u>: Por lo anterior, si $\mathcal{G}$ es un haz definimos el <u>haz imagen inversa</u> $f^{-1}\mathcal{G}$ como el haz asociado al prehaz $(f^{-1}\mathcal{G})_{pre}$, i.e., $f^{-1}\mathcal{G} := (f^{-1}\mathcal{G})^+_{pre}$.

③ Sea $x \in X$ y sea $y = f(x) \in Y$. Probar que hay morfismos de grupos $f_*(\mathcal{F})_y \to \mathcal{F}_x$ y $(f^{-1}(\mathcal{G}))_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_y$, donde este último es un isomorfismo.

④ (Adjunción) Sup. que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son haces en X e Y, resp. Probar que hay un isomorfismo de grupos abelianos

$$\mathrm{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}).$$

<u>Caso particular importante</u>: En el caso de una inclusión $X \subseteq Y$ de un sub-espacio topológico, consideramos la inclusión (continua) $i : X \hookrightarrow Y$:
Dado un haz $\mathcal{G}$ en Y, denotamos el haz imagen inversa $i^{-1}\mathcal{G}$ en X por $\mathcal{G}|_X$ y se llama la <u>restricción de $\mathcal{G}$ en X</u>.
En el caso en que $X = V$ es un <u>abierto</u> de Y, entonces $\mathcal{G}|_V$ es el haz en V que asocia a todo abierto $\mathcal{U} \subseteq V$ el grupo abeliano $\mathcal{G}(\mathcal{U})$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que si $X = \{y\}$ es un punto de Y, entonces $\mathcal{G}|_y$ es el haz (constante) $\mathcal{G}_y$ en $\{y\}$.

<u>Def</u>: Sea k un cuerpo. Un <u>espacio anillado</u> en k-álgebras es un par $(X, \mathcal{O}_X)$ donde X es un espacio topológico y un haz $\mathcal{O}_X$ de k-álgebras (conmutativas con unidad) llamado el <u>haz estructural</u>.
Más aún, un <u>morfismo</u> de espacios anillados en k-álgebras $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ es un par (f, φ) formado por una función continua $f : X \to Y$ y un morfismo de haces de k-álgebras

$$\varphi : \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X$$

("pullback de funciones regulares de Y a X"). Además, la composición de morfismos está bien definida y por ende obtenemos una categoría. En particular, la noción de isomorfismo de espacios anillados en k-álgebras tiene sentido.

<u>Obs</u>: Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado. Si $\mathcal{U} \subseteq X$ es un abierto, entonces podemos considerar el haz de k-álgebras $\mathcal{O}_\mathcal{U} = \mathcal{O}_X|_\mathcal{U}$, lo que permite considerar a $\mathcal{U}$ como un espacio anillado.

<u>Ejemplo</u>: Sea M una variedad diferenciable y $\mathcal{O}_M = \mathcal{C}^\infty_M$ el haz de funciones diferenciables. Entonces, $(M, \mathcal{O}_M)$ es un espacio anillado en $\mathbb{R}$-álgebras.

<u>Def</u>: Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado. Un <u>$\mathcal{O}_X$-módulo</u> es un haz de k-espacios vectoriales $\mathcal{F}$ tal que para todo abierto $\mathcal{U}$ de X, el k-e.v. $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ es un $\mathcal{O}_X(\mathcal{U})$-módulo tal que para cada inclusión $V \hookrightarrow \mathcal{U}$ de abiertos, las aplicaciones lineales de restricción $\mathcal{F}(\mathcal{U}) \to \mathcal{F}(V)$ son compatibles con las estructuras de módulos.
Más aún, un <u>morfismo</u> de $\mathcal{O}_X$-módulos es un morfismo $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ entre haces de k-espacios vectoriales tal que para todo abierto $\mathcal{U} \subseteq X$ la aplicación $\varphi_\mathcal{U} : \mathcal{F}(\mathcal{U}) \to \mathcal{G}(\mathcal{U})$ es $\mathcal{O}_X(\mathcal{U})$-lineal. Además, la composición de morfismos de $\mathcal{O}_X$-módulos está bien definida y por ende obtenemos una categoría, donde los conjuntos de morfismos se denotan por

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \quad \text{o bien} \quad \mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G}),$$

y los cuales son grupos abelianos que además pueden ser dotados de una estructura de $\mathcal{O}_X(X)$-módulo. (ie, $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$-módulo).

⚠ Importante: Todas las construcciones válidas para módulos sobre un anillo poseen análogos en el contexto de $\mathcal{O}_X$-módulos. Sin embargo, en ocasiones hay que considerar el haz asociado al prehaz en cuestión. Los principales ejemplos son:

① $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ sub-$\mathcal{O}_X$-módulo y el $\mathcal{O}_X$-módulo cociente $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ (haz asociado).

② Dado un morfismo $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ de $\mathcal{O}_X$-módulos, los haces $\ker(\varphi)$, $\mathrm{Im}(\varphi)$ y $\mathrm{Coker}(\varphi)$ son $\mathcal{O}_X$-módulos (para los dos últimos se considera el haz asociado).

③ Dados dos $\mathcal{O}_X$-módulos, la suma directa $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo. Más generalmente, $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}_i$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo.

④ Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos $\mathcal{O}_X$-módulos, el producto tensorial $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ (o también $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$) es el haz asociado al prehaz

$$\mathcal{U} \longmapsto \mathcal{F}(\mathcal{U}) \otimes_{\mathcal{O}_X(\mathcal{U})} \mathcal{G}(\mathcal{U})$$

para todo $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto.

⑤ Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos $\mathcal{O}_X$-módulos y sea $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto. Entonces, $\mathcal{F}|_{\mathcal{U}}$ y $\mathcal{G}|_{\mathcal{U}}$ son $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$-módulos. El $\mathcal{O}_X$-módulo obtenido como el haz asociado al prehaz

$$\mathcal{U} \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathcal{U}}}(\mathcal{F}|_{\mathcal{U}}, \mathcal{G}|_{\mathcal{U}})$$

es denotado $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ o $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

⑥ Sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo. El $\mathcal{O}_X$-módulo dual de $\mathcal{F}$ es $\mathcal{F}^\vee := \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$

⑦ Podemos hablar de sucesiones exactas de $\mathcal{O}_X$-módulos, de álgebra tensorial, álgebra exterior y álgebra simétrica. Por ejemplo, la potencia exterior $\Lambda^d \mathcal{F}$ de un $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathcal{F}$ es el haz asociado al prehaz $\mathcal{U} \mapsto \Lambda^d \mathcal{F}(\mathcal{U})$.

⑧ Un $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathcal{F}$ es libre si $\mathcal{F} \cong \mathcal{O}_X^{\oplus |I|} = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_X$ para cierto conjunto de índices I. El cardinal de I es el rango de $\mathcal{F}$.

⑨* Un $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathcal{F}$ es localmente libre si existe un cubrimiento abierto $X = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$ tal que $\mathcal{F}|_{\mathcal{U}_i}$ es un $\mathcal{O}_{\mathcal{U}_i}$-módulo libre, i.e., $\mathcal{F}|_{\mathcal{U}_i} \cong \mathcal{O}_{\mathcal{U}_i}^{\oplus r_i}$

Si el espacio topológico X es conexo, entonces todos los rangos r_i son iguales y será llamado el rango del $\mathcal{O}_X$-módulo localmente libre.

⑩ Un haz invertible en X es un $\mathcal{O}_X$-módulo localmente libre $\mathcal{L}$ de rango 1, i.e., X puede cubrirse por abiertos $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{L}|_{\mathcal{U}} \cong \mathcal{O}_{\mathcal{U}}$. En part, si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo, entonces $\mathcal{F}|_{\mathcal{U}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{U}}} \mathcal{L}|_{\mathcal{U}} \cong \mathcal{F}|_{\mathcal{U}}$.

⑪ Un haz de ideales $\mathcal{I}$ es un sub-$\mathcal{O}_X$-módulo de $\mathcal{O}_X$. En otras palabras, para todo abierto $\mathcal{U} \subseteq X$, $\mathcal{I}(\mathcal{U})$ es un ideal de $\mathcal{O}_X(\mathcal{U})$.

Ejercicio Sea $\mathcal{L}$ un haz invertible en X. Probar que $\mathcal{L}^\vee \otimes \mathcal{L} \cong \mathcal{O}_X$. y que $\mathcal{L}^{\vee\vee} \cong \mathcal{L}$. ("haz reflexivo").

Finalmente, si consideramos $(X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ un morfismo de espacios anillados dados por el par (f,φ), donde $f: X \to Y$ función continua y $\varphi: \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ morfismo de haces de k-álgebras (i.e, para todo abierto $V \subseteq Y$ un morfismo $\varphi_V: \mathcal{O}_Y(V) \to f_*\mathcal{O}_X(V) \underset{\text{def}}{=} \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$.), y consideramos $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo (en X) y $\mathcal{G}$ un $\mathcal{O}_Y$-módulo (en Y) entonces:

① El haz imagen directa $f_*\mathcal{F}$ es un $f_*\mathcal{O}_X$-módulo. Dado que poseemos un morfismo de haces $\varphi: \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$, este permite definir una estructura de $\mathcal{O}_Y$-módulo en $f_*\mathcal{F}$. Así, $f_*\mathcal{F}$ es el $\mathcal{O}_Y$-módulo imagen directa.

② El haz imagen inversa $f^{-1}\mathcal{G}$ es un $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-módulo. Por la adjunción entre f^{-1} y f_* (ver pág. 14), se tiene que:

$$\mathrm{Hom}(f^{-1}\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_Y, f_*\mathcal{O}_X).$$

Luego, $\varphi: \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ corresponde a un único morfismo $\psi: f^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ y por ende $\mathcal{O}_X$ es un $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-módulo. Así, para obtener un $\mathcal{O}_X$-módulo a partir de $f^{-1}\mathcal{G}$ basta considerar la extensión de escalares (ver pág 3, Ejemplo 2):

$$f^*\mathcal{G} := f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X.$$

Así, $f^*\mathcal{G}$ es el $\mathcal{O}_X$-módulo imagen inversa (o pullback).

Obs: Tal como antes, hay un isomorfismo (functorial)

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

de donde obtenemos que f^* y f_* son functores adjuntos.

Ejemplo: Sea $X = \mathbb{R}^n$ (o una variedad diferenciable) y $\mathcal{O}_X = \mathcal{C}^\infty$ el haz de funciones diferenciables. Si elegimos coordenadas (locales) $x_1, \ldots, x_n$ de X y denotamos por $dx_1, \ldots, dx_n$ sus diferenciales, entonces el haz cotangente Ω_X (o Ω^1_X) esta dado por: para cada abierto $\mathcal{U} \subseteq X$, los elementos de $\Omega_X(\mathcal{U})$ son 1-formas diferenciales de la forma

$$\omega(x) = \sum_{j=1}^n f_j(x)\, dx_j \quad , \text{ donde } f_j \in \mathcal{O}_X(\mathcal{U}).$$

En part, $\Omega_X|_\mathcal{U} \cong \mathcal{O}_\mathcal{U}^{\oplus n}$ es localmente libre de rango $n = \dim_\mathbb{R}(X)$.

Más generalmente, podemos considerar el haz $\Omega^d_X := \Lambda^d \Omega_X$ de d-formas diferenciales, cuyas secciones sobre el abierto $\mathcal{U} \subseteq X$ son de la forma

$$\omega(x) = \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_d \le n} f_{j_1,\ldots,j_d}(x)\, dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_d}$$

con $f_{j_1,\ldots,j_d} \in \mathcal{O}_X(\mathcal{U})$. Así, Ω^d_X es localmente libre de rango $\binom{n}{d}$.

En particular, $\omega_X := \Omega^n_X = \Lambda^n \Omega_X$ es un haz invertible, llamado el haz canónico de X. Además, $\mathcal{T}_X := \mathcal{H}om(\Omega_X, \mathcal{O}_X)$ es el haz tangente.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que $\omega_X \otimes (\Omega^d_X)^\vee \cong \Omega^{n-d}_X$ y en particular $\omega_X \otimes \mathcal{T}_X \cong \Omega^{n-1}_X$.

(Obs: También diremos que ω_X es el haz dualizante de X).

§5. Variedades algebraicas afines y topología de Zariski

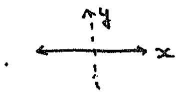
Sea k un cuerpo. Dotaremos al conjunto k^n de una topología, llamada la topología de Zariski, y de un haz de k-álgebras, llamado el haz de funciones regulares. El correspondiente espacio anillado se llamará el <u>espacio afín</u> y será denotado $\mathbb{A}^n$ (o también $\mathbb{A}^n(k)$).

<u>Notación</u>: Durante esta sección, denotamos por $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ al anillo de polinomios $k[X_1, \dots, X_n]$ en n variables con coeficientes en k.

<u>Def</u>: Sea $S \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ sub-conjunto de polinomios. El conjunto
$$V(S) := \{(x_1, \dots, x_n) \in k^n \text{ tal que } f(x_1, \dots, x_n) = 0 \ \forall f \in S\}$$
es llamado una <u>sub-variedad afín</u> de k^n.

<u>Ejemplos</u>: ① $V(1) = \emptyset$ y $V(\emptyset) = V(0) = k^n$ son sub-variedades afines.

② $V(X_1 - x_1, \dots, X_n - x_n) = \{(x_1, \dots, x_n)\}$, ie, todo punto es una sub-var. afín.

③ En k^2, con $\mathcal{O}(\mathbb{A}^2) = k[X, Y]$, $V(Y) = V(Y^2)$ es el eje x. 

④ Todo sub-espacio afín de k^n es una sub-variedad afín.

<u>Observación</u>: ① Notar que si $T \subseteq S \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ entonces $V(S) \subseteq V(T)$.

② Sea $S \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ sub-conjunto y sea $\langle S \rangle$ el <u>ideal</u> generado por S (ie, sumas finitas de la forma $\sum f_i g_i$ con $f_i \in S$ y $g_i \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ arbitrarios), entonces $V(S) = V(\langle S \rangle)$. En part, siempre podemos suponer que $S = I \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ es un ideal.

<u>Recuerdo</u> (Teorema de la base de Hilbert): El anillo $k[X_1, \dots, X_n]$ es <u>noetheriano</u>. Es decir:

① Todo ideal I está generado por un número <u>finito</u> de polinomios.

$\Updownarrow$

② Toda sucesión creciente de ideales es eventualmente constante, ie,
$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_m \subseteq \dots \Rightarrow \exists N$ tal que $I_m = I_{m+1}$ para todo $m \geq N$.

En otras palabras, $V(S) = V(\langle S \rangle) = V(f_1, \dots, f_r)$ y luego <u>toda</u> sub-variedad afín de k^n puede definirse por un número <u>finito</u> de ecuaciones.

<u>Prop</u>: ① Intersección arbitraria de sub-variedades afines de k^n es una sub-var. afín de k^n.

② Unión finita de sub-variedades afines de k^n es una sub-var. afín de k^n.

<u>Dem</u>: Para ① basta notar que $\bigcap_{i \in I} V(S_i) = V\left(\bigcup_{i \in I} S_i\right)$. Para ② probaremos que $V(S_1) \cup V(S_2) = V(S_1 S_2)$, donde $S_1 S_2$ es el conjunto de productos $s_1 s_2$, $s_i \in S_i$. Notar que $V(S_1) \cup V(S_2) \subseteq V(S_1 S_2)$ por definición. Por otro lado, si $x \notin V(S_1) \cup V(S_2)$ entonces existen $f_1 \in S_1$ y $f_2 \in S_2$ tq $f_1(x) \neq 0$ y $f_2(x) \neq 0 \Rightarrow (f_1 f_2)(x) \neq 0$, ie, $x \notin V(S_1 S_2)$. ∎

Consecuencia: Las sub-variedades afines $V(S) \subseteq k^n$ verifican los axiomas de los conjuntos cerrados de una topología: Definimos la topología de Zariski de k^n declarando como abiertos Zariski a los conjuntos de la forma $\mathcal{U} = k^n \setminus V(S)$ para algún sub-conj. $S \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$.

Notación: Denotamos por $\mathbb{A}^n$ al espacio afín k^n dotado de la topología de Zariski, ie, los cerrados son ceros de polinomios y los abiertos sus complementos.

Veamos algunas propiedades de la topología de Zariski:

Def: Un espacio topológico es noetheriano si toda sucesión decreciente de conjuntos cerrados es eventualmente constante, ie, $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots \supseteq F_n \supseteq \ldots \Rightarrow \exists N$ tal que $F_m = F_{m+1}$ para todo $m \geq N$.

Ejemplo: $\mathbb{A}^n$ es noetheriano, pues $I \mapsto V(I)$ es decreciente y $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ noetheriano.

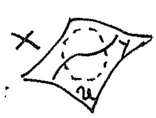
Def: Un espacio topológico X es quasi-compacto si todo cubrimiento abierto de X admite un sub-cubrimiento finito.

Prop: Todo espacio topológico noetheriano es quasi-compacto.

Dem: Sea X esp. top. noetheriano y $X = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$ cubrimiento abierto. Queremos probar que existe $J \subseteq I$ sub-conj finito tal que $X = \bigcup_{j \in J} \mathcal{U}_j$.
Para cada $i \in I$, sea $F_i := X \setminus \mathcal{U}_i$ cerrado. Notar que si $J \subseteq I$ entonces los $\{\mathcal{U}_j\}_{j \in J}$ cubren X si y sólo si $\bigcap_{j \in J} F_j = \emptyset$. Por contradicción, supongamos que toda intersección finita de los cerrados F_i es no-vacía:
Agregando todas las intersecciones finitas si fuese necesario, podemos suponer que la familia $\{F_i\}_{i \in I}$ es estables por intersecciones finitas. Como X es un espacio noetheriano, existe un elemento minimal F_m en esta familia.
$\Rightarrow F_m \cap F_i \subseteq F_m$ es una igualdad (por minimalidad), ie, $F_m \subseteq F_i \ \forall i \in I$.
Esto último es imposible, pues por hipótesis $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$. ■

Consecuencia: El espacio afín $\mathbb{A}^n$ es quasi-compacto.

Recuerdo (topología inducida): Sea X un espacio topológico y sea $Y \subseteq X$ un sub-conjunto. Entonces, la topología inducida (o topología traza) en Y es la topología obtenida al declarar que los cerrados (resp. abiertos) de Y son la intersección de cerrados (resp. abiertos) de X con Y.
En part, un subconj. de un espacio noetheriano es también noetheriano.



Corolario: Todo subconjunto del espacio afín $\mathbb{A}^n$ es un espacio topológico noetheriano respecto a la topología de Zariski (inducida). En part, toda subvariedad afín $X \subseteq \mathbb{A}^n$ es un espacio topológico noetheriano, y luego es quasi-compacto.

§6. Funciones regulares y morfismos

Sea k un cuerpo y $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n) = k[X_1, \dots, X_n]$. Comencemos por dar una construcción "dual" a $S \mapsto V(S)$ definida en la sección anterior.

Def: Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ un subconjunto. Definimos el ideal de V como
$$\mathcal{I}(V) := \{ f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n) \text{ tq } f(x) = 0 \quad \forall x \in V \}$$

Ejemplos: ① $\mathcal{I}(\emptyset) = \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$.

② Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ subconj. Entonces, $X \subseteq V(\mathcal{I}(X))$ con igualdad si y sólo si X es una subvariedad afín. Así, $V(\mathcal{I}(X)) = \overline{X}^{\mathrm{Zar}}$ es la adherencia de Zariski.

③ Sea $S \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ subconj. Entonces, $S \subseteq \mathcal{I}(V(S))$ pero en general no es una igualdad, incluso si S es un ideal: $\mathcal{I}(V(y^2)) = \langle y \rangle$ en $k[X,Y]$.

Notar que la subvariedad afín $V(XY) \subseteq \mathbb{A}^2$ se descompone en la unión $V(X) \cup V(Y)$ de los ejes coordenados. Sin embargo, si k es infinito, $V(X)$ y $V(Y)$ no pueden descomponerse.

Def: Sea X un espacio topológico (no vacío). Decimos que X es irreducible si no es la unión de dos subconjuntos cerrados estrictos, i.e., si $X = X_1 \cup X_2$ con X_1, X_2 cerrados entonces $X_1 = X$ o bien $X_2 = X$.

Ejercicio Sea X espacio no-vacío. Probar que X es irreducible si y sólo si:
① Todo par de abiertos no-vacíos de X se intersectan.
$\Updownarrow$
② Todo abierto no-vacío de X es denso.

Teorema: Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ subvariedad afín. Entonces, X es irreducible si y sólo si $\mathcal{I}(X) \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ es un ideal primo.

Dem: ($\Rightarrow$) Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ subvar. afín irreducible, y sean $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ polinomios tq fg se anula en X, i.e., $fg \in \mathcal{I}(X)$. $\Rightarrow X \subseteq V(fg) = V(f) \cup V(g)$. En part, $X = X_1 \cup X_2$ con $X_1 = V(f) \cap X$ y $X_2 = V(g) \cap X$ cerrados. Dado que X es irreducible $X_1 = X$ o $X_2 = X$, i.e., $X \subseteq V(f)$ o $X \subseteq V(g)$, i.e., $f \in \mathcal{I}(X)$ o $g \in \mathcal{I}(X)$ ✓
($\Leftarrow$) Sup. que $\mathcal{I}(X)$ es un ideal primo de $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ y sup. que $X = X_1 \cup X_2$, con $X_i \subsetneq X$ $(i=1,2)$. Como $X_i \subsetneq X$, $\exists f_i \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ que se anula en X_i pero no en X. $\Rightarrow f_i \notin \mathcal{I}(X)$ pero $f_1 f_2 \in \mathcal{I}(X)$, una contradicción! ■

Corolario: Sea k un cuerpo infinito (eg. alg. cerrado). Entonces, $\mathbb{A}^n$ es irreducible.

Dem: Dado que k es infinito, todo polinomio nulo sobre $\mathbb{A}^n$ es nulo (fijar $n-1$ variables) y luego $\mathcal{I}(\mathbb{A}^n) = \langle 0 \rangle$ es un ideal primo ✓ ■

Recuerdo: Sea A un anillo conmutativo y sea $I \subseteq A$ un ideal. El ideal
$$\sqrt{I} := \{ f \in A \text{ tq } \exists m \in \mathbb{N}^{\geq 1} \text{ tal que } f^m \in I \}$$
es el radical de I. Decimos que I es un ideal radical si $I = \sqrt{I}$. Más aún, $I \subseteq A$ es un ideal radical $\Leftrightarrow$ El único elemento nilpotente de A/I es el 0.
En part, $\{\text{ideales maximales}\} \subseteq \{\text{ideales primos}\} \subseteq \{\text{ideales radicales}\}$.

Hechos (Hilbert, 1893): Sea $k=\bar{k}$ cuerpo algebraicamente cerrado (eg. $k=\mathbb{C}, \overline{\mathbb{F}_p}, \overline{\mathbb{Q}}$, etc). y sea $I \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^n) = k[X_1,\dots,X_n]$ un ideal. Entonces:

① ["Nullstellensatz débil"] Si $I=\mathfrak{m}$ es maximal $\Rightarrow \mathfrak{m} = \langle X_1-a_1,\dots,X_n-a_n\rangle$ para ciertos $a_i \in k$

② ["Nullstellensatz"] Para todo I se cumple que $\mathcal{I}(V(I)) = \sqrt{I}$.

En particular, $V(I)=\phi \Leftrightarrow I = \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$.

⚠ En todo lo que sigue del curso, supondremos k algebraicamente cerrado!

Consecuencia: La aplicación $X \mapsto \mathcal{I}(X)$ establece una biyección decreciente (de inversa $I \mapsto V(I)$) entre:

a) Las subvariedades afines de $\mathbb{A}^n$ y los ideales radicales de $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$.

b) Las subvariedades afines irreducibles de $\mathbb{A}^n$ y los ideales primos de $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$.

c) Los puntos de $\mathbb{A}^n$ y los ideales maximales de $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$.

Terminología: Un subconjunto $X \subseteq \mathbb{A}^n$ es localmente cerrado si es la intersección de un abierto y un cerrado de $\mathbb{A}^n$.

Def: Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ localmente cerrado. Una función regular en X es una función $f: X \to k$ tal que para todo punto $x\in X$ existe $\mathcal{U}_x \subseteq X$ vecindad abierta de x en X y existen polinomios $P_x, Q_x \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ tales que $Q_x(x)\neq 0$ y

$$f\Big|_{\mathcal{U}_x} = \frac{P_x}{Q_x}\Big|_{\mathcal{U}_x}.$$

Denotamos por $\mathcal{O}(X) = \{f: X \to k \text{ regular}\}$ al k-álgebra de funciones regulares en X.

Prop: Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ un cerrado de Zariski (ie, una subvar. afín). Entonces, toda función regular $f: X\to k$ es la restricción de un polinomio $P\in\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ a X, ie, $f = P|_X$. En particular, $\mathcal{O}(X) \cong \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)/\mathcal{I}(X)$. Más precisamente, la sucesión

$$0 \to \mathcal{I}(X) \xhookrightarrow{i} \mathcal{O}(\mathbb{A}^n) \xrightarrow{res_X} \mathcal{O}(X) \to 0$$

es exacta.

Dem: Sea $X = V(I)$, con $I\subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ ideal (radical). Sea $f: X\to k$ regular. Dado $x\in X$, sea $\mathcal{U}_x \subseteq X$ vecindad abierta de $x\in X$, y P_x, Q_x tq $fQ_x = P_x$ en $\mathcal{U}_x$. Como $\mathcal{U}_x$ abierto de Zariski, $X\setminus \mathcal{U}_x = \{y\in X \text{ tq } A_1(y)=\dots=A_m(y)=0\}$ para ciertos $A_i\in\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ polinomios $\Rightarrow (A_1 f Q_x)(y) = (A_1P_x)(y)$ para todo $y\in X$.

Luego, redefiniendo $Q_x := A_1Q_x$ y $P_x := A_1P_x$, tenemos que para cada $x\in X$ la igualdad $fQ_x = P_x$ es válida en todo X, y además $Q_x(x)\neq 0$ por definición.

Sea $J := \langle \{Q_x\}_{x\in X}\rangle \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ ideal. Por construcción, los Q_x no tienen ceros comunes en X, ie, $\phi = V(J)\cap X = V(J)\cap V(I) = V(I+J)$.

Nullstellensatz: $V(I+J)=\phi \Leftrightarrow I+J = \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$. En part, existen $B\in I$ y $\sum_{j=1}^r G_{x_j}Q_{x_j} \in J$ tal que $B + \sum_{j=1}^r G_{x_j}Q_{x_j} = 1$. Luego, en $X = V(I)$ se tiene $B=0$ y así $f = f\cdot 1 = \sum_{j=1}^r G_{x_j}(fQ_{x_j}) = \sum_{j=1}^r G_{x_j}P_{x_j} =: P$ ✓

La última parte se deduce al considerar $res_X: \mathcal{O}(\mathbb{A}^n) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(X)$, $P\mapsto P|_X$ y notar que por definición $\ker(res_X) = \mathcal{I}(X)$. ∎

Importante: Dado $X \subseteq \mathbb{A}^n$ localmente cerrado, definimos el haz de funciones regulares en X como el haz en k-álgebras $\mathcal{O}_X$ que a cada abierto $\mathcal{U} \subseteq X$ asocia el k-álgebra $\mathcal{O}_X(\mathcal{U}) := \mathcal{O}(\mathcal{U}) = \{f : \mathcal{U} \to k \text{ regular}\}$. Más aún, si dotamos a k de la topología de Zariski (ie, lo pensamos como la recta afín $\mathbb{A}^1$) entonces toda función regular es continua, ie, $\mathcal{O}_X(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{C}_X(\mathcal{U}) \rightsquigarrow$ sub haz del ~~haz de~~ funciones continuas en X.

Def: Sean $X \subseteq \mathbb{A}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ subvariedades afines. Una función $f : X \to Y$ es un morfismo regular si es la restricción de una función polinomial $F : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ que cumple $F(X) \subseteq Y$.

Obs: Gracias a la proposición anterior, $\mathcal{O}(X) = \{f : X \to \mathbb{A}^1 \text{ morfismo regular}\}$
Notar que si $f : X \to Y$ morfismo regular, entonces el pullback de f define un morfismo de k-álgebras $f^* : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$, $g \mapsto g \circ f$

Ejemplos: ① Toda función polinomial $f : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$, $x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ es regular.
② Todo morfismo regular es continuo para la topología de Zariski.
③ $\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $C = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \text{ tq } y = x^2\}$ (parábola). Probar que $\mathcal{I}(C) = \langle X^2 - Y \rangle$ en $\mathcal{O}(\mathbb{A}^2) = k[X,Y]$ y deducir que C es irreducible. Demostrar que las funciones $f : C \to \mathbb{A}^1$, $(x,y) \mapsto x$ y $g : \mathbb{A}^1 \to C$, $t \mapsto (t, t^2)$ son morfismos regulares e inversas una de la otra: diremos que f es un isomorfismo. Describir $f^* : \mathcal{O}(\mathbb{A}^1) \to \mathcal{O}(C)$.
④ Sup. que $car(k) = p > 0$ (eg. $k = \overline{\mathbb{F}_p}$). La función $Fr : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$, $x \mapsto x^p$ es llamada el morfismo de Frobenius y es un morfismo regular y biyectivo. Sin embargo, veremos más adelante que no es un isomorfismo. El morfismo de k-álgebras asociado es $Fr^* : k[X] \to k[X]$, $X \mapsto X^p$.

Prop: Sean $X \subseteq \mathbb{A}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ subvariedades afines. Entonces, la función $f \mapsto f^*$ establece una biyección entre los conjuntos de morfismos regulares $X \to Y$ y de morfismos de k-álgebras $\mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$. En part, X e Y son isomorfas si y sólo si las k-álgebras $\mathcal{O}(X) \cong \mathcal{O}(Y)$ son isomorfas.

Dem: Podemos reconstruir f a partir de f^* de la manera siguiente: si $y_1, \ldots, y_m$ son las funciones coordenadas de $\mathbb{A}^m$, entonces $f = (f^*(y_1), \ldots, f^*(y_m)) = (f_1, \ldots, f_m)$ ✓
Luego, $f \mapsto f^*$ es inyectiva.
Por otro lado, dados un morfismo de k-álgebras $\varphi : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ consideramos las imágenes $f_1 = \varphi(\overline{Y}_1), \ldots, f_m = \varphi(\overline{Y}_m)$, donde $k[Y_1, \ldots, Y_m] \to \mathcal{O}(Y) = \mathcal{O}(\mathbb{A}^m)/\mathcal{I}(Y)$ envía Y_i en $\overline{Y_i} = y_i$, y definimos así $f : X \to \mathbb{A}^m$. Basta verificar que $f(X) \subseteq Y$: sea $g \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^m)$ tal que g se anula en Y (ie, $g \in \mathcal{I}(Y)$), entonces

$$g(f(x)) = g(f_1(x), \ldots, f_m(x)) = g(\varphi(y_1)(x), \ldots, \varphi(y_m)(x)) = \varphi(g(y_1, \ldots, y_m)) = 0$$

pues $g = 0$ en $\mathcal{O}(Y) = \mathcal{O}(\mathbb{A}^m)/\mathcal{I}(Y)$. Luego $f(x) \in Y$ y así $f \mapsto f^*$ sobreyectiva ✓ ∎

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $C = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \text{ tq } y^2 = x^3\}$ (cúbica cuspidal). Probar que C es irreducible y calcular $\mathcal{I}(C)$. Deducir que C no es isomorfa a $\mathbb{A}^1$.
Indicación: Basta probar que $\mathcal{O}(C)$ no es isomorfo a $k[X]$, por ejemplo notando que no todo ideal de $\mathcal{O}(C)$ es principal (ie, generado por un elemento).

§7. Variedades algebraicas

Recordemos que k siempre será un cuerpo algebraicamente cerrado.

Def: Una <u>variedad algebraica afín</u> sobre k es un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ que es isomorfo (como espacio anillado en k-álgebras) a un <u>cerrado</u> de Zariski en un espacio afín, junto con su haz de funciones regulares.

Obs: Típicamente el haz estructural $\mathcal{O}_X$ se omite si es claro en el contexto, y escribimos "la variedad algebraica afín X" simplemente. Notar que el tallo $\mathcal{O}_{X,x}$ formado por gérmenes de funciones regulares en $x \in X$ es una k-álgebra <u>local</u>, ie, posee un único ideal maximal $\mathfrak{m}_x = \{ f \in \mathcal{O}_{X,x} \text{ tal que } f(x) = 0 \}$, pues todo germen fuera de $\mathfrak{m}_x$ es invertible. Más aún, $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x \cong k$ para todo $x \in X$.

Def: Una <u>variedad algebraica</u> (reducida) sobre k es un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ tal que:
① X es un espacio topológico noetheriano.
② Cada punto de X admite una vecindad abierta $\mathcal{U} \subseteq X$ tal que $(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X|_{\mathcal{U}})$ es una variedad algebraica afín; diremos que $\mathcal{U}$ es un <u>abierto afín</u> de X.

Obs: En la práctica, agregaremos una condición de "separación" que será descrita después.

Def: Un <u>morfismo</u> de variedades algebraicas $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ es un morfismo entre los espacios anillados subyacentes.

<u>Ejemplo principal</u>: Sean X e Y dos variedades algebraicas. Diremos que una función continua $f : X \to Y$ es un <u>morfismo regular</u> si para toda función regular $u : V \to k$ sobre un abierto (afín) $V \subseteq Y$ (ie, $u \in \mathcal{O}_Y(V)$) la función definida por el pullback $f^*(u) := u \circ f : f^{-1}(V) \to k$ es una función regular en $f^{-1}(V) \subseteq X$. Luego, un morfismo regular define un morfismo de haces en k-álgebras (pullback) $f^* : \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X$ y por ende un morfismo de espacios anillados:

$$(f, f^*) : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y).$$

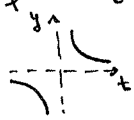
Veremos que <u>todo</u> morfismo entre variedades algebraicas es regular, ie, para todo morfismo $(f, \varphi) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ de espacios anillados entre variedades algebraicas se tiene que $f : X \to Y$ es regular (en el sentido anterior) y $\varphi = f^*$.

<u>Terminología</u>: Un morfismo regular $f : X \to Y$ entre variedades algebraicas es un <u>isomorfismo</u> si f es biyectivo y $f^{-1} : Y \to X$ es un morfismo regular, ie, el morfismo (f, f^*) de espacios anillados es un isomorfismo (de espacios anillados). En ocasiones, también se dice que $f : X \to Y$ es un <u>morfismo birregular</u>.

Prop: Sea X una variedad algebraica. Entonces, todo abierto y todo cerrado de X posee una estructura inducida de variedad algebraica.

Dem: Sea $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto no-vacío. Entonces, sabemos que $(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{U}})$ es un espacio anillado, donde $\mathcal{O}_{\mathcal{U}} = \mathcal{O}_X|_{\mathcal{U}}$. Además, $\mathcal{U}$ es un espacio noetheriano. Luego, basta probar que $\mathcal{U}$ está cubierto por abiertos afines:

sabemos que $X = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$, donde $\mathcal{U}_i$ abierto afín de $X \Rightarrow \mathcal{U} = \bigcup_{i\in I} (\mathcal{U} \cap \mathcal{U}_i)$, donde $V_i = \mathcal{U} \cap \mathcal{U}_i$ es un abierto de la variedad algebraica afín $\mathcal{U}_i$.
Luego, tenemos que probar que todo abierto V de una subvariedad afín $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ (ie, un cerrado de Zariski) puede ser cubierto por abiertos afines:
Dado que V es un abierto (de Zariski), existen polinomios $p_1, \dots, p_m \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ tales que $Y \setminus V = \{ y \in Y$ tal que $p_1(y) = \dots = p_m(y) = 0\}$. En part, si denotamos por $V_i := \{y \in Y$ tal que $p_i(y) \neq 0\}$ entonces $V = \bigcup_{i=1}^{m} V_i$. Veamos que cada V_i es un abierto afín (ie, isomorfo a una subvariedad afín): En $\mathbb{A}^{n+1}$ consideremos $W_i := \{(y,t) \in \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1 = \mathbb{A}^{n+1}$ tal que $y \in Y$ y $p_i(y)t = 1\} \underset{\text{cerrado Zariski}}{\subseteq} \mathbb{A}^{n+1}$ y notamos que $W_i \to V_i$, $(y,t) \mapsto y$ es un isomorfismo (de inversa $y \mapsto \left(y, \frac{1}{p_i(y)}\right)$ regular)



$\{yt = 1\} \cong \{y \neq 0\}$ Así, $(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{U}})$ es una variedad algebraica ✓

Sea $Y \subseteq X$ cerrado no-vacío. Entonces, sabemos que Y es un espacio topológico noetheriano. Es importante destacar que la definición del haz estructural $\mathcal{O}_Y$ es más sutil (la idea es análoga al hecho que si $Y \subseteq X \subseteq \mathbb{A}^n$ subvar afines entonces Y está determinada por el ideal $\mathcal{I}_X(Y) := \mathcal{I}(Y)/\mathcal{I}(X)$ en $\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)/\mathcal{I}(X)$):
Sea $\mathcal{I}_Y \subseteq \mathcal{O}_X$ el haz de ideales (ie, un sub-$\mathcal{O}_X$-módulo) de funciones regulares que se anulan en Y. Luego, definimos $\mathcal{O}_Y$ como $(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y)|_Y$.
(Obs: A diferencia de $\mathcal{O}_X|_Y$, el haz $(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y)|_Y$ tiene la ventaja de que sus secciones son funciones regulares en Y, y no en una vecindad abierta de Y.)
Así, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ es un espacio anillado. Veamos que Y puede ser cubierto por abiertos afines: Sea $X = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$ cubrimiento afín $\Rightarrow Y = \bigcup_{i \in I} (Y \cap \mathcal{U}_i)$, donde $W_i = Y \cap \mathcal{U}_i$ es un <u>cerrado</u> de la variedad algebraica afín $\mathcal{U}_i$, y luego W_i es una subvariedad afín. Más aún, dado que si $Y \subseteq X \subseteq \mathbb{A}^n$ son subvar afines entonces $\mathcal{O}_X|_Y \cong \mathcal{O}_Y$ (restricción de polinomios!), tenemos $\mathcal{O}_Y|_{W_i} \cong \mathcal{O}_{W_i}$ ✓ ∎

¡Atención! En general, un <u>abierto</u> de una variedad algebraica afín <u>no</u> es afín: Sea $X = \mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$ variedad algebraica (con $\mathcal{U} \cup V = \{x \neq 0\} \cup \{y \neq 0\}$ cubrimiento afín). Entonces, $\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}(\mathbb{A}^2)$. En efecto, una sección global $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ puede escribirse como $f = \frac{P}{x^n} = \frac{Q}{y^m}$ para $P, Q \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^2) \Rightarrow Py^m = Qx^n$ y luego y^m divide a Q y x^n divide a P, ie, $f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^2)$.
Por otra parte, si X fuera afín habría una biyección entre los puntos de X y los ideales maximales de $\mathcal{O}(X) \cong \mathcal{O}(\mathbb{A}^2)$. Sin embargo, $\mathfrak{m}_{(0,0)} \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^2) \cong \mathcal{O}(X)$ pero $(0,0) \notin X \Rightarrow X$ <u>no</u> es una variedad algebraica afín.

<u>Terminología</u>: Decimos que un abierto de una variedad algebraica afín es una variedad <u>quasi-afín</u>.

El siguiente es un ejemplo central en geometría algebraica.

Ejemplo muy importante: Consideremos la relación de equivalencia siguiente en $k^{n+1}\setminus\{0\}$: dos vectores x e y no-nulos son equivalentes si son colineales, ie, si existe $\lambda\in k^*$ tal que $y=\lambda x$.

El conjunto de clases de equivalencia por esta relación se llama el espacio proyectivo de dimensión n sobre k, y será denotado $\mathbb{P}^n$ (o también $\mathbb{P}^n(k)$).

Terminología: Tradicionalmente se denota la clase de $x=(x_0,\dots,x_n)\in k^{n+1}\setminus\{0\}$ en $\mathbb{P}^n$ por $[x_0,\dots,x_n]$ (o también $[x_0:\dots:x_n]$) y se dice que $x_0,\dots,x_n$ son las coordenadas homogéneas de $[x]\in\mathbb{P}^n$ (aunque sólo están definidas módulo mult. por una constante no-nula).

De manera más general, si V es un k-espacio vectorial no-nulo, se define el espacio proyectivo asociado a V (o la proyectivización de V) como el conjunto
$$\mathbb{P}(V)=\{L\subseteq V \text{ tal que } \dim_k(L)=1\}.$$
Notar que si $W\subseteq V$ sub-ev no-nulo, entonces $\mathbb{P}(W)\subseteq\mathbb{P}(V)$.

Veamos que $\mathbb{P}^n$ es una variedad algebraica: Para esto, consideremos el grupo multiplicativo $\mathbb{G}_m=(k^*,\cdot)$ y la acción en $\mathbb{A}^{n+1}\setminus\{0\}$ dada por
$$\lambda\cdot(x_0,\dots,x_n)=(\lambda x_0,\dots,\lambda x_n) \quad \text{para todo } \lambda\in\mathbb{G}_m.$$
Luego, $\mathbb{P}^n=(\mathbb{A}^{n+1}\setminus\{0\})/\mathbb{G}_m$ conjunto cociente. Sea $\pi:\mathbb{A}^{n+1}\setminus\{0\}\longrightarrow\mathbb{P}^n$ la proyección canónica dada por $(x_0,\dots,x_n)\longmapsto[x_0,\dots,x_n]$.

Recuerdo (topología): Sea X espacio topológico y $\sim$ rel. de equiv. en X, y sean $Y=X/\sim$ el conjunto cociente y $\pi:X\to Y$, $x\mapsto[x]$ la proyección canónica. Entonces, la topología cociente en Y es la topología obtenida al declarar que los abiertos $V\subseteq Y$ son aquellos conjuntos tales que $\pi^{-1}(V)=\{x\in X \text{ tal que } [x]\in V\}$ es abierto en X.

Luego, dotamos a $\mathbb{P}^n$ de la topología de Zariski (cociente). Más aún, el haz estructural de $\mathbb{P}^n$ está dado por
$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}:=\pi_*\left((\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1}\setminus\{0\}})^{\mathbb{G}_m}\right)$$
ie, la imagen directa por π del sub-haz $(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1}\setminus\{0\}})^{\mathbb{G}_m}$ de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1}\setminus\{0\}}$ de funciones regulares que son $\mathbb{G}_m$-invariantes.

Concretamente: Una sección (local) de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1}\setminus\{0\}}$ es una función racional de la forma $u(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ con $P,Q\in\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$. Por otra parte, las secciones $\mathbb{G}_m$-invariantes deben cumplir para todo $\lambda\in\mathbb{G}_m$ que: $u(\lambda x)=\dfrac{P(\lambda x)}{Q(\lambda x)}=u(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$,
ie, $P(\lambda x)=\lambda^d P(x)$ y $Q(\lambda x)=\lambda^d Q(x)$ para cierto $d\in\mathbb{N}$.

En otras palabras, una sección local de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ es una función racional dada por el cociente de dos polinomios homogéneos del mismo grado.

Finalmente, veamos que el espacio anillado $(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$ es una variedad algebraica:

Sea $A_i \cong \mathbb{A}^n$ el sub-espacio afín $A_i = \{(x_0,\dots,x_n) \in \mathbb{A}^{n+1}$ tal que $x_i = 1\} \subseteq \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}$.
Consideramos el abierto $\mathcal{U}_i \subseteq \mathbb{P}^n$ dado por $\mathcal{U}_i = \{[x_0,\dots,x_n] \in \mathbb{P}^n$ tal que $x_i \neq 0\}$.
Notar que $\pi(A_i) = \mathcal{U}_i$. Más aún, $\varphi_i : \mathcal{U}_i \xrightarrow{\sim} A_i$ dada por $\varphi_i([x]) = \frac{x}{x_i}$ está bien definida y es un homeomorfismo (de inversa $\pi|_{A_i} : A_i \to \mathcal{U}_i$).

Por otro lado, si $V \subseteq A_i \cong \mathbb{A}^n$ abierto y $f \in \mathcal{O}(V)$ función regular, entonces la función $\varphi_i^*(f) \underset{\text{dy}}{=} f \circ \varphi_i : \varphi_i^{-1}(V) \to k$ es regular en el abierto $\varphi_i^{-1}(V)$.
Así, obtenemos un isomorfismo de haces en k-álgebras $\varphi_i^* : \mathcal{O}_{A_i} \xrightarrow{\sim} (\varphi_i)_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}|_{\mathcal{U}_i})$ dado explícitamente por:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}|_{\mathcal{U}_i}(\varphi_i^{-1}(V)) \cong \mathcal{O}_{A_i}(V)$$

$$\text{homogeneos del mismo grado} \to \frac{P(x_0,\dots,x_n)}{Q(x_0,\dots,x_n)} \xmapsto{(\varphi_i^*)^{-1}} \frac{P(x_0,\dots,x_{i-1},1,x_{i+1},\dots,x_n)}{Q(x_0,\dots,x_{i-1},1,x_{i+1},\dots,x_n)}$$

$$\varphi_i^*(f) = \frac{A\left(\frac{x_0}{x_i},\dots,\frac{x_n}{x_i}\right)}{B\left(\frac{x_0}{x_i},\dots,\frac{x_n}{x_i}\right)} \xleftarrow{\varphi_i^*} \frac{A(x_0,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)}{B(x_0,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)} = f$$

Luego, obtenemos un isomorfismo de espacios anillados $(\varphi_i,\varphi_i^*) : (\mathcal{U}_i, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}|_{\mathcal{U}_i}) \xrightarrow{\sim} (A_i, \mathcal{O}_{A_i})$ para cada $i = 0,1,\dots,n$, de donde concluimos que $(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$ es una variedad algebraica ✓

$\boxed{\text{Ejercicio importante}}$ Probar que $\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \cong k$, y deducir que $\mathbb{P}^n$ <u>no</u> es una variedad afín.

Recordemos que una función continua $f : X \to Y$ entre dos variedades algebraicas es un <u>morfismo regular</u> si para todo abierto $V \subseteq Y$ y toda función regular $u : V \to k$, la función continua $u \circ f : f^{-1}(V) \to k$ es regular, ie, $f^* : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X \subseteq f_*\mathcal{C}_X$.

<u>Teorema</u>: Sean X e Y variedades algebraicas, y sea $(f,\varphi) : (X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ un morfismo de espacios anillados (ie, $f : X \to Y$ y $\varphi : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$). Entonces, $f : X \to Y$ es un morfismo regular y $\varphi = f^*$.

<u>Dem</u>: La afirmación es <u>local</u> en Y, por lo que podemos suponer que Y es una variedad afín, ie, $Y \subseteq \mathbb{A}^m$. Además, cubriendo X por abiertos afines $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ obtenemos $f_*\mathcal{O}_X \hookrightarrow \bigoplus_{i\in I} (f_i)_*\mathcal{O}_{X_i}$ donde $f_i = f|_{X_i}$, por lo que podemos suponer que $X = X_i$ es una variedad afín, ie, $X \subseteq \mathbb{A}^n$.
Sea $A = \mathcal{O}(X)$ y $B = \mathcal{O}(Y)$, y sea $\varphi : B \to A$ morfismo de k-álgebras. Dado $x \in X$, sea $m_x \subseteq A$ el ideal maximal correspondiente $\Rightarrow \eta := \varphi^{-1}(m_x)$ ideal primo en B.
Entonces, φ induce un morfismo $B/\eta \hookrightarrow A/m_x \cong k$ que es un isomorfismo !
Luego, $\eta = \eta_y$ es un ideal maximal, donde $y = f(x) \in Y$. Luego, para toda función regular $u \in B$ se tiene que:

$$\begin{array}{ccccc} u \in B & \xrightarrow{\quad\varphi\quad} & A & \ni & \varphi(u) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ u_y \in \mathcal{O}_{Y,y} & & \mathcal{O}_{X,x} & \ni & \varphi(u)_x \\ \downarrow\ \downarrow ev_y & & ev_x \downarrow & & \downarrow \\ u(y) \in \mathcal{O}_{Y,y}/m_y \cong k & \xrightarrow[\text{Id}]{\sim} & k \cong \mathcal{O}_{X,x}/m_x & \ni & \varphi(u)(x) \end{array}$$

$$\Rightarrow u(y) = \underbrace{u(f(x))}_{= f^*(u)(x)} = \varphi(u)(x)$$

Luego, $\varphi = f^*$ en B ✓ ■

§8. Introducción a los Esquemas (Grothendieck, 1960)

Recuerdo (localización): Sea A un anillo conmutativo. Un subconjunto $S \subseteq A$ es un conjunto multiplicativo si $1 \in S$ y si para todos $s, s' \in S$ se tiene que $ss' \in S$.

En $A \times S$ definimos la relación de equivalencia siguiente:

$$(a,s) \sim (a',s') \iff \exists t \in S \text{ tal que } t(as' - a's) = 0.$$

La localización de A respecto a S es el anillo cociente $A_S := (A \times S)/\sim$, donde denotamos por $\frac{a}{s}$ la clase de equivalencia de (a,s).

Ejemplos: ① Si A dominio entero, $S = A \setminus \{0\}$ es multiplicativo, y $A_S := k(A)$ o $Fr(A)$ es el cuerpo de fracciones de A (eg. $k(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$).

② Sea $f \in A$ y $S = \{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ multiplicativo. Entonces, $A_S := A_f$ es localización respecto a f. Notar que $A_f \neq 0$ si y sólo si f no es nilpotente. Además, $A_f \cong A[X]/\langle fX - 1 \rangle$.

③ Sea $\mathfrak{p} \subseteq A$ ideal primo, entonces $S := A \setminus \mathfrak{p}$ es multiplicativo. Diremos que $A_S := A_\mathfrak{p}$ es la localización en $\mathfrak{p}$. Además, $A_\mathfrak{p}$ es un anillo local con único ideal maximal $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ (todo elemento fuera de $\mathfrak{p}$ es invertible!)

Propiedad universal: Sea $\pi: A \to A_S$, $a \mapsto \frac{a}{1}$. Entonces, para todo morfismo de anillos $\varphi: A \to B$ tal que $\varphi(s) \in B^\times$ es invertible para todo $s \in S$, existe un único morfismo de anillos $\hat{\varphi}: A_S \to B$ tal que

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & B \\ & A_S \arrow[ur, "\exists! \hat{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Teorema: Hay una equivalencia de categorías entre:

① La categoría $\underline{Aff}_{k,\text{red}}$ de variedades algebraicas (reducidas) afines sobre k.

② La categoría $\underline{Alg}_{k,\text{red}}$ de k-álgebras (conmutativas) finitamente generadas y sin elementos nilpotentes no-triviales (ie, reducidas).

Dem: Dada una variedad algebraica afín $X \subseteq \mathbb{A}^n$, el álgebra de funciones regulares $\mathcal{O}(X) \cong k[X_1, \ldots, X_n]/\mathcal{I}(X)$ es finitamente generada y reducida. Además, a cada morfismo $f: X \to Y$ entre variedades afines asociamos (de manera contravariante) un morfismo $f^*: \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ entre las k-algebras correspondientes ✓

Para obtener la equivalencia de categorías, asociaremos (de manera functorial) a cada k-álgebra reducida y finitamente generada A una variedad algebraica afín $(X, \mathcal{O}_X)$, llamada el espectro maximal de A:

Sea $X := \text{Specm}(A) = \{\mathfrak{m} \subseteq A \text{ ideal maximal}\}$ el conjunto de ideales maximales de A.

Dotamos a X de la topología (de Zariski) obtenida al declarar que los cerrados de A son los conjuntos de la forma $V(I) = \{\mathfrak{m} \subseteq A \text{ maximal tal que } I \subseteq \mathfrak{m}\}$ para algún ideal $I \subseteq A$. Más aún, dado $f \in A$ no-nulo, los abiertos

$$\mathcal{U}_f := \{\mathfrak{m} \subseteq A \text{ maximal tal que } f \notin \mathfrak{m}\} = X \setminus V(f)$$

forman una base de la topología, por lo que pueden ser usados para definir $\mathcal{O}_X$:

Para cada $f \in A$ no-nulo, definimos $\mathcal{O}_X(\mathcal{U}_f) := A_f$ la localización de A respecto a f. Así, una sección $s \in \mathcal{O}_X(\mathcal{U}_f)$ es un elemento de la forma $s = \frac{u}{f^n}$ para $u \in A$ y $n \in \mathbb{N}$.

Notar que por definición $\mathcal{U}_f \cap \mathcal{U}_g = \mathcal{U}_{fg}$ (Ejercicio) y por ende basta considerar las inclusiones $\mathcal{U}_{fg} \subseteq \mathcal{U}_f$, en cuyo caso el morfismo de <u>restricción</u> está dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X(\mathcal{U}_f) = A_f &\longrightarrow \mathcal{O}_X(\mathcal{U}_{fg}) = A_{fg} \\ s = \frac{u}{f^n} &\longmapsto \frac{u g^n}{(fg)^n} \end{aligned}$$

Veamos que $\mathcal{O}_X$ es un haz:

Sea $\mathcal{U}_f \subseteq X$ abierto, y sea $\mathcal{U}_f = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_{g_i}$ cubrimiento abierto, ie, $V(f) = \bigcap_{i \in I} V(g_i)$:

① <u>Pegado</u>: Sea $s_i \in \mathcal{O}(\mathcal{U}_{g_i}) = A_{g_i}$ de la forma $s_i = \frac{u_i}{g_i^{n_i}}$ para $u_i \in A$ y $n_i \in \mathbb{N}$.

Supongamos que $s_i|_{\mathcal{U}_{g_i g_j}} = s_j|_{\mathcal{U}_{g_i g_j}}$ para todos $i, j \in I$, ie, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $(g_i g_j)^N (u_i g_j^{n_j} - u_j g_i^{n_i}) = 0$ en A_f.

<u>Obs</u>: La condición $V(f) = \bigcap_{i \in I} V(g_i)$ es equivalente a decir: "Para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \subseteq A$, se tiene que $f \in \mathfrak{m} \iff g_i \in \mathfrak{m}\ \forall i \in I$". Luego, dado que f es <u>invertible</u> en A_f (ie, $f \notin \mathfrak{m}$ para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \subseteq A_f$) <u>no</u> existe $\mathfrak{m} \subseteq A_f$ ideal maximal tal que $\langle \{g_i\}_{i \in I} \rangle \subseteq \mathfrak{m}$, ie, el ideal generado por los $\{g_i\}_{i \in I}$ es todo A_f. En particular, dado que para todo $m_i \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ se tiene que $V(g_i) = V(g_i^{m_i})$, deducimos:

(✱) Existen $v_i \in A_f$ tal que $\sum_{\text{finita}} v_i g_i^{m_i} = 1$ en A_f.

Considerando $m_i := n_i + N$ en (✱), obtenemos $\sum_{\text{finita}} v_i g_i^{n_i + N} = 1$ en A_f $\quad / \cdot g_j^N u_j$

$$\Rightarrow g_j^N u_j = \sum_{i \in F} v_i (g_i g_j)^N u_j g_i^{n_i} = \sum_{i \in F} v_i (g_i g_j)^N u_i g_j^{n_j} = g_j^{n_j + N} \underbrace{\sum_{i \in F} u_i v_i g_i^N}_{:= s \text{ en } A_f}$$

Notamos que la restricción de $s \in A_f = \mathcal{O}(\mathcal{U}_f)$ a $A_{g_j} \in \mathcal{O}(\mathcal{U}_{g_j})$ es s_j, pues:

$$s_j = \frac{u_j}{g_j^{n_j}} = \frac{g_j^N u_j}{g_j^{n_j + N}} = \frac{g_j^{n_j + N} s}{g_j^{n_j + N}} = s \quad ✓$$

② <u>Unicidad</u>: Sea $s \in \mathcal{O}(\mathcal{U}_f) = A_f$ tal que para todo $i \in I$, $s|_{\mathcal{U}_{g_i}} = 0$ en $\mathcal{O}(\mathcal{U}_{g_i}) = A_{g_i}$.

Si $s = \frac{u}{f^m} \in A_f$, entonces $s = 0$ en A_{g_i} si existe $m_i \in \mathbb{N}$ tal que $g_i^{m_i} u = 0$ en A_f. Por (✱): $\exists v_i \in A_f$ tq $\sum_{i \in I} v_i g_i^{m_i} = 1 \Rightarrow u = \sum_{i \in I} v_i \underbrace{g_i^{m_i} u}_{=0} = 0$ en A_f

$\Rightarrow s = 0$ en A_f ✓

Luego, $(X, \mathcal{O}_X)$ es un espacio anillado. Veamos que es una variedad algebraica afín:

Sean $a_1, \ldots, a_n \in A$ generadores de A, entonces $\Bbbk[X_1, \ldots, X_n] \twoheadrightarrow A$, $X_i \mapsto a_i$ es sobreyectiva de kernel $I \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ (ideal), y $A \cong \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)/I$. Por definición, A es reducida $\iff I \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ ideal radical. Luego, $V(I) =: Y \subseteq \mathbb{A}^n$ subvar. afín y además $\mathcal{O}(Y) \cong A$. En particular, $\mathcal{O}(Y)$ tiene "los mismos" ideales maximales que A, ie, hay una biyección (Nullstellensatz débil):

$Y \xrightarrow{\sim} X = \mathrm{Specm}(A)$, $y \mapsto m_y = \{f \in \mathcal{O}(Y) \cong A$ tal que $f(y) = 0\}$. Más aún, para $f \in \mathcal{O}(Y)$ no-nula, se tienen homeomorfismos

$$Y_f := \{y \in Y \text{ tq } f(y) \neq 0\} \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}_f \subseteq X ,$$

donde $\mathcal{O}(Y_f) \cong \mathcal{O}(\mathcal{U}_f) = A_f$. Finalmente, notamos que Y_f es una variedad algebraica afín, pues $Y_f \cong \{(y,t) \in \mathbb{A}^{n+1}$ tq $y \in Y$ y $f(y)t = 1\}$ ✓

De este modo, obtenemos el functor contravariante

$$\mathrm{Specm} : \underline{\mathrm{Alg}}_{k,\mathrm{red}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aff}}_{k,\mathrm{red}}$$

que permite obtener la equivalencia de categorías. ■

En palabras simples, la teoría de esquemas buscar reemplazar la categoría $\underline{\mathrm{Alg}}_{k,\mathrm{red}}$ por k-álgebras o anillos más generales, y obtener usando "espectros" objetos geométricos más generales: los esquemas.

<u>Caso particular importante</u>: Sea A una k-álgebra finitamente generada que <u>no</u> necesariamente es reducida (eg. $A = k[X,Y]/\langle Y^2\rangle$). La construcción del espacio anillado $\mathrm{Specm}(A)$ se extiende a este contexto, y diremos que es un <u>esquema afín</u> (de tipo finito o finitamente generado) <u>sobre k</u>.

Concretamente, si $A \cong \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)/I$ donde I es un ideal (<u>no</u> necesariamente radical), entonces el espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ está dado por el espacio topológico

$$X := \mathrm{Specm}(A) = \{\mathfrak{m} \subseteq A \text{ ideal maximal}\}$$

que es homeomorfo a $Y = V(I) := X_{\mathrm{red}} \subseteq \mathbb{A}^n$ sub-variedad afín. Sin embargo, el haz estructural está dado por $\mathcal{O}_X(\mathcal{U}_f) := A_f$ para cada $f \in A$ no-nilpotente.

<u>Obs</u>: Si $x \in X$ corresponde al ideal maximal $\mathfrak{m} \subseteq A$, entonces $\mathcal{O}_{X,x} = A_{\mathfrak{m}}$ es la localización en $\mathfrak{m}$, el cual es un anillo local con único ideal maximal $\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ que cumple $A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}} \cong A/\mathfrak{m} \cong k$.

En particular, si bien $f \in \mathcal{O}_X(\mathcal{U})$ <u>no</u> es realmente una función, de todas formas podemos definir su valor en $x \in X$ como $f(x) \in \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x \cong k$. Por ejemplo, si $f \in \mathcal{O}_X(\mathcal{U})$ es <u>nilpotente</u>, entonces $f(x) \in k$ también es nilpotente y luego $f(x) = 0$.

Si denotamos por $\mathrm{Nil}(A) = \{a \in A \text{ tq } \exists m \in \mathbb{N}^{\geq 1} \text{ tq } a^m = 0\}$ el <u>nilradical</u> de A, y definimos $A_{\mathrm{red}} := A/\mathrm{Nil}(A)$ es anillo reducido asociado a A. Por ejemplo, si $A = \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)/I$ entonces $A_{\mathrm{red}} = \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)/\sqrt{I}$.

Más aún, el morfismo sobreyectivo $A \twoheadrightarrow A_{\mathrm{red}}$ induce una inclusión de espacios anillados $X_{\mathrm{red}} = \mathrm{Specm}(A_{\mathrm{red}}) \hookrightarrow X = \mathrm{Specm}(A)$, que es la identidad a nivel de espacios topológicos.

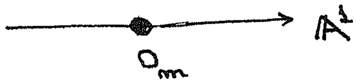
<u>Hecho</u> (sin demostración): Hay una equivalencia de categorías entre:

① La categoría $\underline{\mathrm{Aff}}_k$ de esquemas afines (de tipo finito) sobre k.

② La categoría $\underline{\mathrm{Alg}}_k$ de k-álgebras finitamente generadas

$$X \mapsto \mathcal{O}(X) \qquad \mathrm{Specm}(A) \leftarrow A$$

<u>Ejemplos</u>: ① En $\mathbb{A}^1 = \mathrm{Specm}(k[X])$ consideramos el sub-esquema afín dado por $O_m := \mathrm{Specm}(k[X]/\langle X^m\rangle)$ que no es reducido si $m \geq 2$:



"origen de multiplicidad m"

Notar que si pensamos un punto $x \in X \subseteq \mathbb{A}^n$ en una var. alg. afín como un morfismo $\varphi_x : \mathrm{Specm}(k) \hookrightarrow \mathrm{Specm}(X)$, $\{*\} \longmapsto x$, que corresponde a $\mathcal{O}(X) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(X)/\mathfrak{m}_x \cong k$, entonces podemos pensar puntos de mayor multiplicidad como morfismos

$$\mathrm{Specm}(k[X]/\langle X^m\rangle) \longrightarrow \mathrm{Specm}(X)$$
$$\{*\} \longmapsto x$$

singleton (como conjunto!)

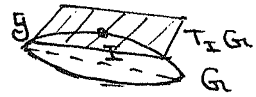
Por ejemplo, sea $D = k[\varepsilon]/\langle \varepsilon^2\rangle$ el anillo de "<u>números duales</u>" (Clifford, 1873), i.e, $a + \varepsilon b \in D$ con $a, b \in k$ y $\varepsilon^2 = 0 \rightsquigarrow$ "aproximación lineal", entonces veremos que se puede pensar el "espacio tangente" $T_{X,x}$ de X en $x \in X$ como el conjunto de morfismos $\mathrm{Specm}(k[\varepsilon]/\langle\varepsilon^2\rangle) \longrightarrow \mathrm{Specm}(X)$.

Informalmente: sea $X = O_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{A}^{n^2}(\mathbb{R})$ tq ${}^tAA = I_n\} \subseteq \mathbb{A}^{n^2}$ subvariedad afín (grupo algebraico y grupo de Lie) y sea $A \in X$, entonces:

$A + \varepsilon B \in O_n(\mathbb{R}[\varepsilon]/\langle\varepsilon^2\rangle)$ si ${}^t(A+\varepsilon B)(A+\varepsilon B) = I_n$

$\Rightarrow {}^tAA + \varepsilon({}^tBA + {}^tAB) + \underbrace{\cancel{\varepsilon^2\, {}^tBB}}_{0} = \cancel{I_n}$, i.e, $T_A X \cong \{B \in M_n(\mathbb{R})$ tq ${}^tBA = -{}^tAB\}$.

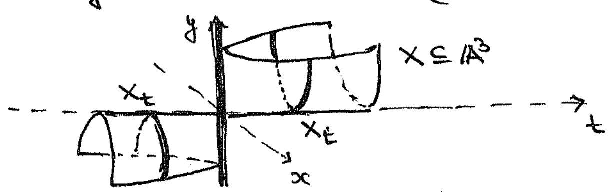
En part, $T_I O_n(\mathbb{R}) \cong \{B \in M_n(\mathbb{R})$ tq ${}^tB = -B\}$ "álgebra de Lie".



② Sea $X = \{(x,y,t) \in \mathbb{A}^3$ tal que $yt = x^2\}$ y sea $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{A}^1_t$, $(x,y,t) \longmapsto t$ regular. Si para cada $t \in \mathbb{A}^1$ definimos:

$$X_t := \mathrm{Specm}(k[X,Y]/\langle Yt - X^2\rangle)$$

sub-esquema afín de X, la <u>fibra</u> de φ en $t \in \mathbb{A}^1$, entonces para $t \neq 0$ se tiene que X_t es una sub-variedad afín (reducida). Sin embargo, para $t = 0$ obtenemos un esquema afín no-reducido ("recta doble"):



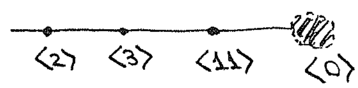
X_0 (eje y <u>doble</u>)

<u>Grothendieck</u>: Sea A anillo conmutativo. Definimos el <u>espectro</u> de A por

$$\mathrm{Spec}(A) := \{\mathfrak{p} \subseteq A \text{ ideal primo}\}.$$

Los cerrados de $X = \mathrm{Spec}(A)$ son los $V(I) = \{\mathfrak{p} \subseteq A$ primo tal que $I \subseteq \mathfrak{p}\}$ y se define $\mathcal{O}_X$ igual que antes: $\mathcal{O}_X(\mathcal{U}_f) := A_f$. <u>Aquí</u>: si $x \in X$ corresponde al ideal primo $\mathfrak{p} \subseteq A$, entonces $\mathcal{O}_{X,x} = A_\mathfrak{p}$ localización en $\mathfrak{p}$.

<u>Ejemplo</u>: $A = \mathbb{Z} \rightsquigarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) = \{0\} \cup \{\langle p\rangle,\ p$ número primo$\}$



¡punto denso!

$\overline{\langle p\rangle}^{\mathrm{Zar}} = \langle p\rangle$ <u>punto cerrado</u>, $\overline{\langle 0\rangle}^{\mathrm{Zar}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ <u>punto genérico</u>

$\mathcal{O}_{X,\langle p\rangle} = \mathbb{Z}_{\langle p\rangle} \rightsquigarrow \mathcal{O}_{X,\langle p\rangle}/\mathfrak{m}_{\langle p\rangle} = \mathbb{Z}_{\langle p\rangle}/p\mathbb{Z}_{\langle p\rangle} \cong \mathbb{F}_p$ y $\mathcal{O}_{X,\langle 0\rangle} = \mathbb{Z}_{\langle 0\rangle} \cong \mathbb{Q}$.

§9. Atlas algebraicos

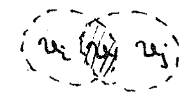
Tal como para variedades diferenciables, podemos construir variedades algebraicas "pegando" variedades afines usando un atlas:

Teorema: Sea X un espacio topológico. Consideremos:
1. Un cubrimiento abierto $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ de X.
2. Para cada $i\in I$, un haz de k-álgebras $\mathcal{A}_i$ en $\mathcal{U}_i$.
3. Para todos $i,j\in I$ un isomorfismo de haces $\varphi_{ji}: \mathcal{A}_i|_{\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_j|_{\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j}$ que verifica: a) $\varphi_{ii} = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}_i}$ para todo $i\in I$.
   b) Para todos $i,j,k\in I$ se tiene $\varphi_{ki} = \varphi_{kj}\circ\varphi_{ji}$ en $\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j\cap\mathcal{U}_k$.

Entonces, existe un único haz de k-álgebras $\mathcal{A}$ en X junto con isomorfismos de haces $\varphi_i: \mathcal{A}|_{\mathcal{U}_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_i$ en $\mathcal{U}_i$, tales que $\varphi_{ji} = \varphi_j\circ\varphi_i^{-1}$ en $\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j$.

Dem: Los abiertos $\mathcal{U}\subseteq X$ contenidos en alguno de los $\mathcal{U}_i$ forman una base de abiertos. Para un tal abierto, definimos

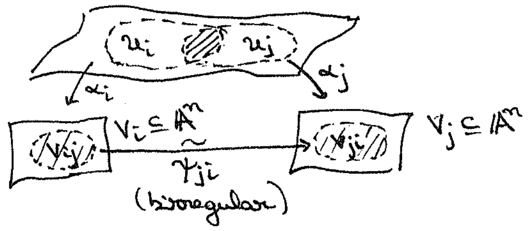
$$\mathcal{A}(\mathcal{U}) := \coprod_{\substack{i\in I\\ \mathcal{U}\subseteq\mathcal{U}_i}} \mathcal{A}_i(\mathcal{U}) \Big/ \sim$$



donde $(s,\mathcal{U}_i)\sim(t,\mathcal{U}_j)$, con $s\in\mathcal{A}_i(\mathcal{U})$ y $t\in\mathcal{A}_j(\mathcal{U})$, si $t=\varphi_{ji}(s)$ en $\mathcal{A}_j|_{\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j}(\mathcal{U})$.
Las condiciones a) y b) aseguran que $\sim$ es una relación de equivalencia. El hecho que los $\mathcal{A}_i$ son haces implica que $\mathcal{A}$ es un haz y que es único. ■

Caso particular importante: Sea X espacio topológico noetheriano, y supongamos que cada espacio anillado $(\mathcal{U}_i, \mathcal{A}_i)$ es una variedad algebraica. Entonces, el espacio anillado $(X,\mathcal{A})$ es una variedad algebraica ✓

Concretamente: Un atlas algebraico en X son homeomorfismos $\alpha_i:\mathcal{U}_i\xrightarrow{\sim} V_i$ llamados cartas locales, donde V_i es una variedad algebraica $\forall i\in I$ y donde se cumple:
Sea $V_{ij}\subseteq V_i$ la imagen de $\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j\subseteq\mathcal{U}_i$ por α_i. Entonces, para todos $i,j\in I$ se tiene que $\psi_{ji} := \alpha_j\circ\alpha_i^{-1}: V_{ij}\xrightarrow{\sim} V_{ji}$ isomorfismo entre las var. alg. V_{ij} y V_{ji}.



← caso particular: $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ abiertos afines.

Ejemplo: Sean $[x,y]$ coord. homogéneas en $\mathbb{P}^1 = (\mathbb{A}^2\setminus\{0\})/\mathbb{G}_m$ y sean:

$$\mathcal{U}_0 = \{[x,y]\in\mathbb{P}^1 \text{ tq } x\neq 0\} \quad \text{y} \quad \mathcal{U}_1 = \{[x,y]\in\mathbb{P}^1 \text{ tq } y\neq 0\}.$$

Cartas locales: $\alpha_0:\mathcal{U}_0\xrightarrow{\sim} V_0=\mathbb{A}^1$, $[x,y]\longmapsto \frac{y}{x}$ y $\alpha_1:\mathcal{U}_1\xrightarrow{\sim} V_1=\mathbb{A}^1$, $[x,y]\longmapsto\frac{x}{y}$

Notar que $\alpha_0(\mathcal{U}_0\cap\mathcal{U}_1) = \alpha_1(\mathcal{U}_0\cap\mathcal{U}_1) = \mathbb{A}^1\setminus\{0\}$. Más aún, si z coordenada en $\mathbb{A}^1\setminus\{0\}$ entonces $\psi_{01} := \alpha_1\circ\alpha_0^{-1}$ está dada por $\psi_{01}(z) = \frac{1}{z}$ morfismo birregular ✓

Ejercicio Describir un atlas algebraico en $\mathbb{P}^n$.

(**Indicación**: Considerar $\mathcal{U}_i = \{[x_0,\dots,x_n]\in\mathbb{P}^n \text{ tq } x_i\neq 0\}\xrightarrow{\sim}\mathbb{A}^n$ carta local
$$[x_0,\dots,x_n]\longmapsto\left(\frac{x_0}{x_i},\dots,\frac{x_{i-1}}{x_i},\frac{x_{i+1}}{x_i},\dots,\frac{x_n}{x_i}\right)\Bigg)$$

§10. Producto de variedades y separación

Sea $\mathcal{C}$ una categoría y sean $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ dos objetos. Un producto de X e Y en $\mathcal{C}$ es un objeto $Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ junto con dos morfismos $p : Z \to X$ y $q : Z \to Y$ tales que: "Para todo objeto $S \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ se tiene que

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S,Z) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S,X) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S,Y) \\ f &\longmapsto (p\circ f, q \circ f) \end{aligned}$$

, ie, "
$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & S \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "v"] & \\ X & & Y \end{tikzcd} \; = \; \begin{tikzcd}[column sep=small] & S \arrow[d, "\exists! f"] & \\ & Z \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ X & & Y \end{tikzcd} \quad \begin{aligned} u &= p\circ f \\ v &= q \circ f \end{aligned}$$ "

es biyectiva." (Propiedad universal).

En part, $(Z,(p,q))$ es único módulo un único isomorfismo, y usualmente se denota por $Z = X \times Y$ y por $pr_X : X\times Y \to X$ y $pr_Y : X \times Y \to Y$.

Prop: Los productos (finitos) existen en la categoría de variedades algebraicas afines.

Dem: Sean $X \subseteq \mathbb{A}^n$ y $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ subvar. afines dadas por $X = V(f_1, \dots, f_r)$ y por $Y = V(g_1, \dots, g_s)$, entonces el producto (conjuntista) $X \times Y \subseteq \mathbb{A}^{n+m}$ es una subvar. afín definida por las ecuaciones $V(f_1(x), \dots, f_r(x), g_1(y), \dots, g_s(y))$. Además, las proyecciones $pr_1 : X \times Y \to X$ y $pr_2 : X\times Y \to Y$ son regulares ✓

Para la propiedad universal, basta notar que si $u : S \to X$, $s \mapsto (u_1(s), \dots, u_m(s))$ y $v : S \to Y$, $s \mapsto (v_1(s), \dots, v_m(s))$ son regulares, entonces necesariamente tenemos $f : S \to X \times Y$, $s \mapsto (u_1(s), \dots, u_m(s), v_1(s), \dots, v_m(s))$ regular ✓ ■

⚠ Importante: La topología de $X \times Y$ no es la topología producto, ie, no es la topología generada por abiertos $U \times V$ con $U \subseteq X$ y $V \subseteq Y$ abiertos. Por ejemplo, los cerrados en $X = Y = \mathbb{A}^1$ son: $\emptyset$, $\mathbb{A}^1$ y conjuntos finitos. Sin embargo, $X \times Y = \mathbb{A}^2$ posee más cerrados (eg. curvas!).

Lema: Sean $X \subseteq \mathbb{A}^n$ y $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ subvar. afines. Entonces,

$$\mathcal{O}(X) \otimes_k \mathcal{O}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X \times Y), \quad \sum_{i,j} a_{ij} f_i(x) \otimes g_j(y) \longmapsto \sum_{i,j} a_{ij} f_i(x) g_j(y).$$

es un isomorfismo.

Dem: La inyectividad se obtiene fijando variables: para todo i,j se tiene $a_{ij} = 0$ si la función $\sum_{i,j} a_{ij} f_i(x) g_j(y)$ es nula en $\mathcal{O}(X\times Y)$.

Para la sobreyectividad: sea $h(x,y)$ regular en $X \times Y \subseteq \mathbb{A}^{n+m}$ dada por la restricción de $P(x,y) = \sum_{i,j} P_i(x) Q_j(x)$ polinomio en $\mathcal{O}(\mathbb{A}^{n+m})$. Luego, si $u_i := P_i|_X \in \mathcal{O}(X)$ y $v_j := Q_j|_Y \in \mathcal{O}(Y) \Rightarrow h$ proviene de $\sum_{i,j} u_i \otimes v_j$ en $\mathcal{O}(X) \otimes_k \mathcal{O}(Y)$. ■

Teorema: Los productos (finitos) existen en la categoría de variedades algebraicas

Dem: Sean X e Y variedades algebraicas, y consideremos cubrimientos por abiertos afines $\{U_i\}_{i\in I}$ y $\{V_j\}_{j \in J}$, respectivamente. Sabemos que $U_i \times V_j$ es una variedad afín y luego construimos $Z = X \times Y$ usando el atlas algebraico $Z_{ij} := U_i \times V_j$ con $i \in I$, $j \in J$. Aquí, $Z_{ij} \cap Z_{kl} = (U_i \cap U_k) \times (V_j \times V_l)$.

Dotamos al conjunto $X \times Y$ de la topología siguiente: Un abierto en $Z = X \times Y$ es un subconjunto tq su intersección con cada Z_{ij} es abierto en Z_{ij}. Por ejemplo, cada Z_{kl} es abierto en Z.

Dado que $\mathcal{U}_i$ y $\mathcal{U}_j$ se pegan (forman un atlas algebraico), las funciones regulares en $\mathcal{U}_i$ y $\mathcal{U}_j$ se restringen a las mismas funciones en $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$.

$\Rightarrow$ Funciones regulares en Z_{ij} y $Z_{k\ell}$ se restringen a las mismas funciones en $Z_{ij} \cap Z_{k\ell}$, y luego los $\{Z_{ij}\}_{(i,j)\in I\times J}$ forman un atlas algebraico ✓

Finalmente, si $u: S \to X$ y $v: S \to Y$ son morfismos regulares, entonces los abiertos $u^{-1}(\mathcal{U}_i) \times v^{-1}(V_j)$ forman un cubrimiento de S y luego la propiedad universal se verifica localmente. Dado que "ser regular" es una propiedad local, tenemos que la propiedad universal se verifica globalmente ✓ ■

Recuerdo: Dado que k es alg. cerrado (y luego infinito), tenemos que $\mathbb{A}^n$ es un espacio topológico irreducible y luego todo par de abiertos de Zariski no-vacíos de $\mathbb{A}^n$ se intersectan. En particular, $\mathbb{A}^n$ no es Hausdorff!

Obs: Sea X un espacio topológico. Entonces, son equivalentes:

① X es Hausdorff, ie, para todos $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen $\mathcal{U}, V \subseteq X$ abiertos tal que $x \in \mathcal{U}$, $y \in V$ y $\mathcal{U} \cap V = \emptyset$.

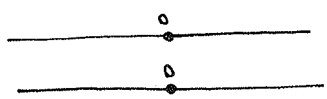
② La diagonal $\Delta_X := \{(x,x),\ x \in X\}$ es un cerrado en $X \times X$ (con la top. producto!)

Idea: ① dice que todo punto fuera de la diagonal posee una vecindad abierta para la topología producto de $X \times X$, ie, ②.

Def: Sea X una variedad algebraica. Diremos que X es separada si la diagonal $\Delta_X = \{(x,x),\ x \in X\}$ es un cerrado de Zariski de $X \times X$.

Ejemplos: ① Toda variedad algebraica afín es separada: En efecto, sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ subvar. afín y sea $(x,y) \notin \Delta_X$, ie, $x, y \in X$ con $x \neq y$. Entonces, existe $f \in \mathcal{O}(X)$ tal que $f(x) \neq f(y)$ (eg. funciones coordenadas). Luego, la función $h(x,y) = f(x) - f(y)$ en $\mathcal{O}(X \times X)$ se anula en Δ_X pero no se anula en (x,y), ie, $(X\times X) \setminus \Delta_X$ abierto ✓

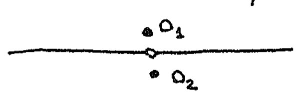
② Recta afín con dos orígenes: Consideremos dos copias de la recta afín $\mathbb{A}^1$ y sean $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2 = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$:



$X_1 = \mathbb{A}^1$

$X_2 = \mathbb{A}^1$ $\rightsquigarrow Z = X_1 \sqcup X_2 = \mathbb{A}^1 \times \{1,2\}$

Sea X la variedad algebraica obtenida al pegar X_1 y X_2 a lo largo de los abiertos $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ (usando la identidad), ie, $X = Z/\sim$ donde $(x;1) \sim (x;2)$ si $x \neq 0$.

X 

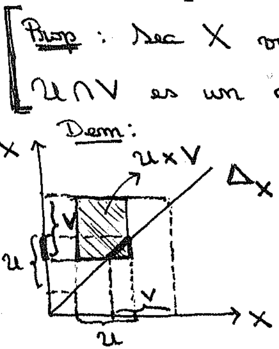
$O_1 = [(0;1)]$ y $O_2 = [(0;2)]$

La variedad X no es separada: en la clausura $\overline{\Delta_X}^{Zar}$ de la diagonal se encuentran los puntos $(O_1, O_2), (O_2, O_1) \in X \times X$ que no forman parte de Δ_X.

Veamos algunas consecuencias de la separación:

Prop: Sea X variedad algebraica separada, y sean $\mathcal{U}, V \subseteq X$ abiertos afines. Entonces, $\mathcal{U} \cap V$ es un abierto afín de X.

Dem:



Notamos que $(\mathcal{U} \times V) \cap \Delta_X \cong \mathcal{U} \cap V$. Dado que el producto $\mathcal{U} \times V$ es una var. alg. afín y $\Delta_X \subseteq X \times X$ es cerrado

$\Rightarrow \mathcal{U} \cap V$ es isomorfo a un cerrado de una var. afín ✓ ■

Def: Sea $f : X \to Y$ un morfismo regular entre variedades algebraicas. Definimos el grafo de f como el conjunto $\Gamma_f = \{(x,y) \in X \times Y$ tal que $y = f(x)\} \subseteq X \times Y$.

El siguiente resultado puede pensarse como la versión algebraica del "Teorema del Grafo cerrado" en topología o análisis funcional:

Prop: Sea X una variedad algebraica definida a partir del atlas algebraico (ver §9) $\{\alpha_i : \mathcal{U}_i \xrightarrow{\sim} V_i\}_{i\in I}$, donde los $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ son un cubrimiento abierto de X y donde V_i es una variedad algebraica separada (eg. afín). Entonces, la variedad algebraica X es separada si y solo si:

Para todo par de cartas locales distintas α_i y α_j, el grafo $\Gamma_{ji} := \Gamma_{\varphi_{ji}}$ del cambio de cartas $\varphi_{ji} = \alpha_j \circ \alpha_i^{-1} : V_{ij} \xrightarrow{\sim} V_{ji}$ es un cerrado Zariski de $V_i \times V_j$.

Dem: Los abiertos $\{\mathcal{U}_i \times \mathcal{U}_j\}_{(i,j)\in I\times I}$ cubren $X \times X$, y luego la diagonal Δ_X de $X \times X$ es cerrada si y solo si $\Delta_X \cap (\mathcal{U}_i \times \mathcal{U}_j)$ es cerrado en $\mathcal{U}_i \times \mathcal{U}_j$ para todo $i,j \in I$.
Recordemos que $V_{ij} \underset{\text{def}}{=} \alpha_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \subseteq V_i$ y que $(\mathcal{U}_i \times \mathcal{U}_j) \cap \Delta_X \cong \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$. Además, para $x \in V_{ij}$ se tiene $(x, \varphi_{ji}(x)) = (x, \alpha_j(\alpha_i^{-1}(x))) = (\alpha_i(y), \alpha_j(y))$, con $y = \alpha_i^{-1}(x) \in \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$.
Luego, la imagen de $(\mathcal{U}_i \times \mathcal{U}_j) \cap \Delta_X$ por $\alpha_i \times \alpha_j$ es el grafo Γ_{ji} de $\varphi_{ji} : V_{ij} \xrightarrow{\sim} V_{ji}$ en $V_i \times V_j$. Así, X es separada si y solo si $\Gamma_{ji} \subseteq V_i \times V_j$ es cerrado $\forall i,j \in I$.
Finalmente, notamos que si $i = j$ entonces $\Gamma_{ii} = \Gamma_{\mathrm{Id}_{V_i}} = \Delta_{V_i} \subseteq V_i \times V_i$ es cerrado pues V_i es separada, por lo que basta considerar el caso $i \neq j$. ■

Ejemplo: Recordemos que $\mathbb{P}^1$ se obtiene a partir del atlas algebraico

$$\alpha_0 : \mathcal{U}_0 = \{[x,y] \in \mathbb{P}^1 \text{ tq } x \neq 0\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^1, \quad [x,y] \longmapsto \frac{y}{x}$$

y

$$\alpha_1 : \mathcal{U}_1 = \{[x,y] \in \mathbb{P}^1 \text{ tq } y \neq 0\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^1, \quad [x,y] \longmapsto \frac{x}{y}$$

Más aún, si z es una coordenada en $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\} = \alpha_0(\mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_1) = \alpha_1(\mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_1)$, entonces $\varphi = \varphi_{01} = \alpha_1 \circ \alpha_0^{-1}$ está dado por $\varphi(z) = \frac{1}{z}$.

Luego, el grafo de φ está dado por los $(z,w) \in \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ tal que $zw = 1$, que es un cerrado de Zariski. Así, la recta proyectiva $\mathbb{P}^1$ es separada.

Ejercicio Probar que el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ es una variedad algebraica separada.

Ejercicio Sea X una variedad algebraica separada. Probar que todo abierto $\mathcal{U} \subseteq X$ y todo cerrado $Y \subseteq X$ es una variedad algebraica separada.

Obs: En particular, todo abierto y cerrado de $\mathbb{P}^n$ es una variedad alg. separada.

Convención: En lo que sigue del curso, todas las variedades serán separadas.

Atención: Históricamente, las variedades algebraicas definidas en §7 se les conoce como "prevariedades" y una variedad es una prevariedad algebraica separada. En todo lo que sigue adoptamos esa convención!

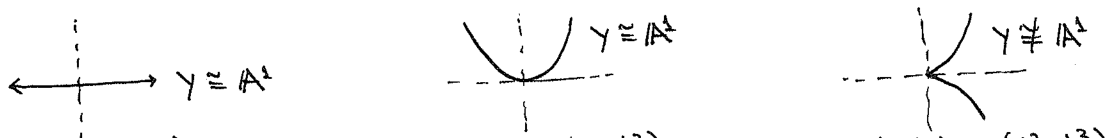
"Una variedad algebraica es un esquema reducido y separado de tipo finito sobre k"

Def: Una <u>subvariedad cerrada</u> de una variedad algebraica $(X, \mathcal{O}_X)$ es una variedad algebraica $(Y, \mathcal{O}_Y)$ tal que $Y \subseteq X$ cerrado y tal que $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X / \mathcal{I}_Y |_Y$, donde $\mathcal{I}_Y \subseteq \mathcal{O}_X$ es el haz de ideales de funciones regulares que se anulan en Y.
Más generalmente, si $f: Z \to X$ es un morfismo regular entre variedades algebraicas, decimos que f es una <u>incrustación</u> cerrada (embedding) si f se factoriza como

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\cong"', "\text{birregular}"] & & X \\ & Y \arrow[ur, hook, "i", "\text{subvariedad cerrada}"'] & \end{tikzcd}$$

ie, $f(Z) \subseteq X$ es una subvariedad cerrada y $Z \cong f(Z)$.

Ejemplo: Sea $Z = \mathbb{A}^1$ y $X = \mathbb{A}^2$. Consideremos $f_i : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^2$ dados por:



$f_1(t) = (t, 0)$ $\qquad$ $f_2(t) = (t, t^2)$ $\qquad$ $f_3(t) = (t^2, t^3)$

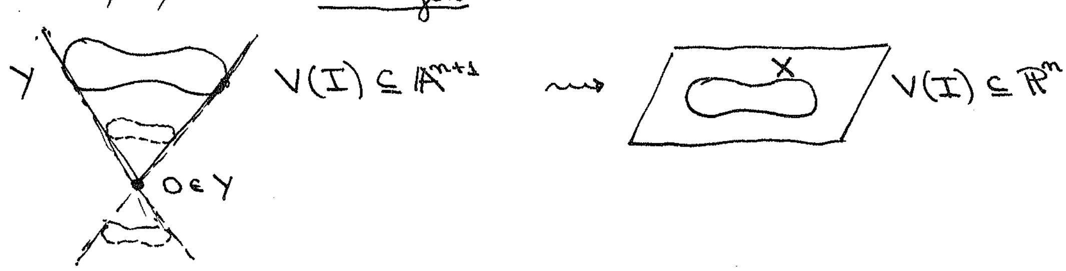
Entonces, f_1 y f_2 son incrustaciones cerradas, pero f_3 <u>no</u> lo es.

<u>Recuerdo</u>: Sea $V \cong k^{n+1}$ espacio vectorial. El espacio proyectivo $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^n$ es la variedad algebraica cuyos puntos corresponden a rectas vectoriales en V.
En part, si $W \subseteq V$ sub-ev no-nulo, entonces $\Lambda = \mathbb{P}(W) \subseteq \mathbb{P}(V)$ y diremos que $\Lambda \subseteq \mathbb{P}^n$ obtenido de este modo es un <u>sub-espacio lineal</u> de $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^n$.

Ejemplo: Sean $\Lambda_1 = \mathbb{P}(W_1) \cong \mathbb{P}^{r_1}$ y $\Lambda_2 = \mathbb{P}(W_2) \cong \mathbb{P}^{r_2}$ subespacios lineales de $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^n$. Entonces, si $r_1 + r_2 \geq n$ tenemos que $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \mathbb{P}(W_1 \cap W_2) \cong \mathbb{P}^d$ es no-vacío de dimensión $d \geq r_1 + r_2 - n$.
Por ejemplo, las rectas afines $\{x = 1\}$ y $\{x = 2\}$ en $\mathbb{A}^2_{(x,y)}$ <u>no</u> se intersectan, pero las rectas proyectivas $\{x = z\}$ y $\{x = 2z\}$ obtenidas al considerar $\mathbb{A}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2_{[x,y,z]}$ se intersectan en $[0, 1, 0]$.

<u>Recuerdo</u> (polinomios homogéneos): Sea $I \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^{n+1}) = k[X_0, X_1, \dots, X_n]$ un ideal.
Decimos que I es un <u>ideal homogéneo</u> si está generado por polinomios homogéneos, ie, $I = \langle P_1, \dots, P_r \rangle$ con $P_i(\lambda x) = \lambda^{d_i} P_i(x)$ para todo $\lambda \in k^*$, donde $d_i = gr(P_i) \in \mathbb{N}$.
En otras palabras, I es homogéneo si y sólo si $I = I^{\mathbb{G}_m}$ es invariante por la acción de $\mathbb{G}_m = (k^*, \cdot)$, ie, $p(x) \in I \Rightarrow p(\lambda x) \in I$ para todo $\lambda \in k^*$.

Sea $I \subseteq k[X_0, \dots, X_n]$ un ideal homogeneo. Entonces, la subvariedad afín $Y := V(I)$ de $\mathbb{A}^{n+1}$ es $\mathbb{G}_m$-invariante, ie, es un <u>cono afín</u>:



Consideramos el cociente $X := (Y \setminus \{0\}) / \mathbb{G}_m$, junto con la proyección $\pi : Y \setminus \{0\} \to X$.

Dotamos a X de la topología de Zariski cociente y del haz en k-álgebras dado por $\mathcal{O}_X := \pi_*((\mathcal{O}_{Y\setminus\{0\}})^{\mathbb{G}_m})$ de funciones regulares que son $\mathbb{G}_m$-invariantes. Entonces:

① El espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ es una subvariedad cerrada de $\mathbb{P}^n$ y escribiremos simplemente $X = V(I) \subseteq \mathbb{P}^n$. Explícitamente, si $I = \langle P_1, \ldots, P_r \rangle \subseteq k[X_0, \ldots, X_n]$ con P_i homogéneo de grado d_i, entonces

$$X = V(I) = \{[x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{P}^n \text{ tq } P_1(x_0, \ldots, x_n) = \ldots = P_r(x_0, \ldots, x_n) = 0\}.$$

② Debido a la construcción de $\mathbb{P}^n$ como cociente de $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}$, toda subvariedad cerrada de $\mathbb{P}^n$ es de la forma $X = V(I)$ para cierto $I \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^{n+1})$ homogéneo.

Terminología: Sea $P \in k[X_0, \ldots, X_n]$ polinomio homogéneo de grado d. Decimos que

$$V(P) = \{[x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{P}^n \text{ tq } P(x_0, \ldots, x_n) = 0\}$$

es una hipersuperficie de grado d en $\mathbb{P}^n$. Cuando $d = 1$ (resp, $d = 2$, $d = 3$, $d = 4$, etc) decimos que $V(P) = H$ es un hiperplano (resp, $V(P) = Q$ una cuádrica, resp. una cúbica, resp. cuártica, etc). Por ejemplo,

$$X = \{[x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{P}^n \text{ tq } x_0^d + x_1^d + \ldots + x_n^d = 0\} \subseteq \mathbb{P}^n$$

es la "hipersuperficie de Fermat" de grado d.

③ Sea $V \subseteq \mathbb{P}^n$ un subconjunto, entonces definimos el ideal de V como el ideal (homogéneo) $\mathcal{I}(V) \subseteq k[X_0, \ldots, X_n]$ generado por los polinomios homogéneos que se anulan en V. Tal como antes, $V(\mathcal{I}(X)) = \overline{X}^{Zar} \subseteq \mathbb{P}^n$ es la adherencia de Zariski.

Ejemplo: ① La curva afín $C \subseteq \mathbb{A}^2$ dada por $xy = 1$ puede verse dentro de $\mathbb{P}^2$ con coord. homogéneas $[x, y, z]$ al identificar $\mathbb{A}^2 \cong \mathcal{U}_2 = \{z \neq 0\}$. Entonces, $\overline{C} := \overline{C}^{Zar} \subseteq \mathbb{P}^2$ es la curva $xy = z^2$ obtenida al "homogeneizar" la ecuación. En part, obtenemos $\overline{C}$ a partir de C agregando los puntos $[1,0,0]$ y $[0,1,0]$ "al infinito".

② Sea $A = k[X_0, \ldots, X_n]$. Entonces, para $V = \emptyset \subseteq \mathbb{P}^n$ tenemos que $\mathcal{I}(\emptyset) = \langle X_0, \ldots, X_n \rangle$ pues $0 \in \mathbb{A}^{n+1}$ no se proyecta a $\mathbb{P}^n$. El ideal $A^+ := \langle X_0, \ldots, X_n \rangle$ es llamado el ideal irrelevante en este contexto.

④ La versión proyectiva del Hilbert Nullstellensatz se puede deducir de la versión afín: Sea $I \subseteq k[X_0, \ldots, X_n]$ un ideal homogéneo, entonces:

a) $V(I) = \emptyset$ en $\mathbb{P}^n$ $\Leftrightarrow$ I contiene una potencia de $A^+ = \langle X_0, \ldots, X_n \rangle$.

b) Si $V(I) \neq \emptyset$ en $\mathbb{P}^n$, entonces $\mathcal{I}(V(I)) = \sqrt{I}$.

⑤ Sup. que $k = \mathbb{C}$, y consideramos $\mathbb{A}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^n$ y $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ con la topología euclideana. Entonces $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ es compacto, pero $\mathbb{A}^n(\mathbb{C})$ no lo es!

Def: Sea X una variedad algebraica. Diremos que X es proyectiva si es isomorfa a una subvariedad cerrada de algún espacio proyectivo, ie, si existe $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ inmersión cerrada. Más generalmente, una variedad quasi-proyectiva es una variedad algebraica isomorfa a un abierto de Zariski de una variedad algebraica proyectiva.

Obs: Toda variedad algebraica quasi-proyectiva es separada y quasi-compacta. Más aún, las variedades afines, quasi-afines y proyectivas son ejemplos de variedades quasi-proyectivas.

Teorema: Sea X una variedad proyectiva. Entonces, para toda variedad algebraica Y, la proyección $pr_Y : X \times Y \to Y$ es cerrada (ie, la imagen de un cerrado es cerrada).

Dem: Dado que $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ proyectiva, basta considerar el caso $X = \mathbb{P}^n$. Más aún, el resultado es local en Y, podemos asumir Y afín y basta considerar el caso $Y = \mathbb{A}^m$. Sea $\pi : \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n$ la proyección canónica, y consideremos $F \subseteq X \times Y = \mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m$ un cerrado dado por ecuaciones polinomiales

$$P_1([x], y) = \dots = P_\ell([x], y) = 0 \quad \text{en } \mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m$$

homogéneas en $[x] = [x_0, \dots, x_n]$. Veamos que $pr_Y(F)$ es cerrado en $\mathbb{A}^m$:

Sea $y_0 \notin pr_Y(F)$. Entonces, los polinomios $P_i(x, y_0)$ homogeneos en x sólo poseen al origen $0 \in \mathbb{A}^{n+1}$ como cero común. Así, el Hilbert Nullstellensatz implica que

$$(\bigstar) \qquad \mathfrak{m}_0^r \subseteq \langle P_1(x, y_0), \dots, P_\ell(x, y_0) \rangle$$

donde $\mathfrak{m}_0 = \langle x_0, \dots, x_n \rangle$ es el ideal irrelevante y $r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

Notamos que $\mathfrak{m}_0^r = \langle x_0, \dots, x_n \rangle^r \supseteq A_r := k[x_0, \dots, x_n]_r \Leftarrow$ el k-ev de polinomios homogéneos de grado r. Luego, $(\bigstar)$ implica que la aplicación lineal

$$\varphi : A_{r-d_1} \oplus \dots \oplus A_{r-d_\ell} \twoheadrightarrow A_r \qquad d_i := gr_x(P_i)$$

$$(Q_1, \dots, Q_\ell) \longmapsto \sum_{i=1}^{\ell} Q_i(x) P_i(x, y_0)$$

es sobreyectiva. Esto último es una condición abierta para la topología de Zariski (pues equivale a que el determinante de una submatriz maximal es $\neq 0$) y luego en un $V \subseteq \mathbb{A}^m$ vecindad de y_0 se tiene que para todo $y \in V$ fijo el conjunto $P_1([x], y) = \dots = P_\ell([x], y) = 0$ es vacío en $\mathbb{P}^n$, ie, $y \notin pr_Y(F)$ y luego $pr_Y(F)$ es un cerrado. ■

Corolario: Sea X una variedad proyectiva. Entonces, para toda variedad algebraica Y y todo morfismo regular $f : X \to Y$ se tiene que $f(X)$ es cerrado en Y.

Dem: El grafo $\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in X\}$ es cerrado en $X \times Y$, y luego $pr_Y(\Gamma_f) = f(X)$ es cerrado en Y. ■

Obs: En particular, toda "realización" de una variedad proyectiva en un espacio proyectivo es siempre cerrada, contrariamente al caso de variedades afines.

Notamos también que si $f : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$, $(x, y) \mapsto (x, xy)$ entonces:

$f(\mathbb{A}^2) = \{(u, v) \in \mathbb{A}^2 \text{ tq } "u = 0 \Rightarrow v = 0"\}$ no es cerrado.

Corolario: Sea X una variedad proyectiva y sea $f : X \to k$ función regular. Entonces, $f(X)$ es un conjunto finito.

Dem: Consideremos la composición $\bar{f} : X \to \mathbb{P}^1$ dada por $X \xrightarrow{f} k = \mathbb{A}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^1$. Entonces, $\bar{f}(X)$ es un cerrado de $\mathbb{P}^1$, que es diferente de $\mathbb{P}^1$ pues $\bar{f}(X) = f(X) \subseteq \mathbb{A}^1$. Luego, es un conjunto de finitos puntos. ■

Obs: Más adelante veremos que si X es proyectiva e irreducible, entonces $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \cong k$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea X variedad proyectiva y supongamos que $X \hookrightarrow Y$ incrustación cerrada, donde Y es una variedad afín. Probar que X es un conjunto finito de puntos.

⚠ Notar que, contrariamente al espacio afín que cumple $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m \cong \mathbb{A}^{n+m}$, tenemos que $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \ncong \mathbb{P}^{n+m}$. Por ejemplo, en $\mathbb{P}^2$ todo par de rectas se intersecta, pero en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ no es así.

<u>Prop</u> (Segre, 1863-1924): La variedad producto $\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^m$ es isomorfa a una variedad proyectiva $\Sigma_{n,m}\subseteq\mathbb{P}^N$, llamada la <u>variedad de Segre</u>, donde $N=(n+1)(m+1)-1$.

<u>Dem</u>: Sean $V\cong k^{n+1}$ y $W\cong k^{m+1}$ espacios vectoriales, con $\mathbb{P}(V)\cong\mathbb{P}^n$ y $\mathbb{P}(W)\cong\mathbb{P}^m$. Entonces, $V\otimes W\cong k^{(n+1)(m+1)}$ y la aplicación $V\times W\to V\otimes W$, $(v,w)\mapsto v\otimes w$ induce una aplicación en los cocientes respectivos

$$\varphi:\mathbb{P}(V)\times\mathbb{P}(W)\longrightarrow\mathbb{P}(V\otimes W)\cong\mathbb{P}^N \qquad \text{"incrustación de Segre"}$$
$$([v],[w])\longmapsto[v\otimes w]$$

donde $N=(n+1)(m+1)-1=mn+m+n$. Si elegimos bases $(e_0,\dots,e_n)$ y $(f_0,\dots,f_m)$ de V y W, y escribimos $v=\sum_{i=0}^{n}x_ie_i$ y $w=\sum_{j=0}^{m}y_jf_j$, entonces $\{e_i\otimes f_j\}_{\substack{0\le i\le n\\0\le j\le m}}$ es una base de $V\otimes W$ y $v\otimes w=\sum_{i,j}x_iy_j\,e_i\otimes f_j$. En particular,

$$\varphi:\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^m\longrightarrow\mathbb{P}^N$$
$$([x_0,\dots,x_n],[y_0,\dots,y_m])\longmapsto[x_0y_0,x_0y_1,\dots,x_iy_j,\dots,x_ny_m]$$

es un morfismo regular. Veamos que $\Sigma_{n,m}:=\varphi(\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^m)\subseteq\mathbb{P}^N$ es un cerrado y que $\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^m\cong\Sigma_{n,m}$ (ie, φ es un incrustamiento cerrado):

Notamos que mediante el isomorfismo $V\otimes_kW\cong\mathrm{Hom}_k(V^*,W)$ tenemos que la imagen de φ, dada por los tensores <u>simples</u> de $V\otimes_kW$, corresponde a aplicaciones lineales de rango 1. Explícitamente, si consideramos coordenadas (homogéneas) $z=\sum_{k,l}z_{kl}\,e_k\otimes f_l$ de $\mathbb{P}(V\otimes W)\cong\mathbb{P}^N$ y consideramos los abiertos $W_{ij}=\{[z]\in\mathbb{P}^N \text{ tq } z_{ij}\neq0\}\cong\mathbb{A}^N$, entonces $\varphi^{-1}(W_{ij})=\mathcal{U}_i\times V_j$, con $\mathcal{U}_i=\{[x]\in\mathbb{P}^n \text{ tq } x_i\neq0\}$ y $V_j=\{[y]\in\mathbb{P}^m \text{ tq } y_j\neq0\}$. Si $i=j=0$, entonces $\varphi|_{\mathcal{U}_0\times V_0}:\mathcal{U}_0\times V_0\longrightarrow W_{0,0}$ está dada por

$$([1,x_1,\dots,x_m],[1,y_1,\dots,y_m])\longmapsto\begin{pmatrix}1 & x_1 & \cdots & x_m\\ y_1 & x_1y_1 & \cdots & x_my_1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ y_m & x_1y_m & \cdots & x_my_m\end{pmatrix}$$

que es un morfismo regular, y que define un isomorfismo entre $\mathcal{U}_0\times V_0$ y el conjunto <u>cerrado</u> dado por las matrices en $W_{0,0}$ de rango ≤ 1.

El mismo argumento es válido para (i,j) arbitrarios y obtenemos un isomorfismo entre $\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^m$ y la subvariedad cerrada $\Sigma_{n,m}\subseteq\mathbb{P}^N$ dada por

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix}z_{00} & z_{01} & \cdots & z_{0m}\\ z_{10} & z_{11} & \cdots & z_{1m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ z_{m0} & z_{m1} & \cdots & z_{mn}\end{pmatrix}\le 1 \iff \det\begin{vmatrix}z_{ik} & z_{il}\\ z_{jk} & z_{jl}\end{vmatrix}=z_{ik}z_{jl}-z_{il}z_{jk}=0$$

para todos $i,j=0,\dots,m$ y $k,l=0,\dots,n$. ■

<u>Corolario</u>: El producto (finito) de variedades algebraicas proyectivas es una variedad algebraica proyectiva.

<u>Dem</u>: Si $X\subseteq\mathbb{P}^n$ e $Y\subseteq\mathbb{P}^m$ cerrados, entonces $X\times Y\subseteq\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^m\hookrightarrow\mathbb{P}^{mn+m+n}$ cerrado. ■

<u>Ejemplo</u>: La incrustación de Segre $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\hookrightarrow\mathbb{P}^3$, $([x_0,x_1],[y_0,y_1])\mapsto[x_0y_0,x_0y_1,x_1y_0,x_1y_1]$ permite identificar $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ con la superficie cuádrica $S\subseteq\mathbb{P}^3$ dada por

$$\det\begin{pmatrix}z_0 & z_1\\ z_2 & z_3\end{pmatrix}=z_0z_3-z_1z_2=0.$$

La forma cuadrática $Q:k^4\to k$ dada por $Q(z_0,z_1,z_2,z_3)=z_0z_3-z_1z_2$ es <u>no-degenerada</u>.

<u>Obs</u>: Si $\mathrm{car}(k)\neq2$ toda forma cuadrática no-degenerada $Q:k^4\to k$ puede ser diagonalizada y luego $S=\{[z]\in\mathbb{P}^3 \text{ tq } Q(z)=0\}\cong\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ en ese caso.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Una cónica $C \subseteq \mathbb{P}^2$ es una hipersuperficie cuádrica de $\mathbb{P}^2$. Demostrar que si $\mathrm{car}(k) \neq 2$ entonces, en una base conveniente, podemos escribir $C = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2 \text{ tq } a_0 x_0^2 + a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 = 0\}$, para ciertos $a_0, a_1, a_2 \in k$. Deducir que si $a_0 a_1 a_2 \neq 0$ entonces $C \cong \mathbb{P}^1$.

Terminemos la sección mencionando dos variantes importantes del incrustamiento de Segre:

1° Incrustamiento de Veronese:

Recordemos que si $V \cong k^{n+1}$ y $d \in \mathbb{N}$, entonces la d-ésima potencia simétrica $S^d V$ es un k-ev. de dimensión $\dim_k S^d V = \binom{n+d}{d}$ y $(S^d V)^* \cong k[X_0, \dots, X_n]_d$ polinomios homogéneos de grado d en $n+1$ variables. Más aún, si $\mathrm{car}(k) = 0$ entonces $S^d V$ se identifica con el sub-ev de $T^d V = V^{\otimes d} = V \overset{d \text{ veces}}{\otimes \cdots \otimes} V$ de tensores simétricos.

Supongamos que $\mathrm{car}(k) = 0$, y consideremos la incrustación de Veronese dada por:

$$\nu_d : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(S^d V) \cong \mathbb{P}^N$$
$$[v] \longmapsto [v^d] = [v \overset{d \text{ veces}}{\otimes \cdots \otimes} v]$$

donde $N = \binom{n+d}{d} - 1$. Si elegimos una base $(e_0, \dots, e_n)$ de V y escribimos $v = \sum_{i=0}^{n} x_i e_i$, entonces $\{e_{i_0}^{k_0} \cdots e_{i_r}^{k_r}\}_{\substack{0 \leq i_0 < \dots < i_r \leq n \\ k_0 + \dots + k_r = d}}$ es una base de $S^d V$. Más aún, el teorema multinomial de Newton implica:

$$v^d = \sum_{|k| = d} \frac{d!}{k_0! \cdots k_n!} x^k e^k \quad , \text{ con } x^k = x_0^{k_0} \cdots x_n^{k_n} \text{ homogéneo de grado } d.$$

$\frac{d!}{k_0! \cdots k_n!} x^k \to$ base de $k[x_0, \dots, x_n]_d$.

En particular,

$$\nu_d : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^N \quad , [x_0, \dots, x_n] \mapsto [x_0^d, x_0^{d-1} x_1, \dots, x_n^d] \quad (\text{cf. "orden monomial"}).$$

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $V_{n,d} := \nu_d(\mathbb{P}^n) \subseteq \mathbb{P}^N$ la variedad de Veronese. Probar que:

1. $V_{n,d} \subseteq \mathbb{P}^N$ es un cerrado dado por las ecuaciones $z_i z_j = z_k z_l$ donde los $i, j, k, l \in \{0, \dots, N\}$ verifican $i + j = k + l$.

2. ν_d induce un isomorfismo $\mathbb{P}^n \cong V_{n,d}$ (ie, ν_d es un incrustamiento cerrado).

Ejemplo: La imagen de $\nu_3 : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$, $[x, y] \mapsto [x^3, x^2 y, x y^2, y^3]$ es la curva $C \subseteq \mathbb{P}^3$ dada por las ecuaciones $z_0 z_3 = z_1 z_2$, $z_1^2 = z_0 z_2$, $z_2^2 = z_1 z_3$ en $\mathbb{P}^3_{[z_0, \dots, z_3]}$, y es llamada la cúbica torcida ("twisted cubic") de $\mathbb{P}^3$.

Obs: Históricamente, $V_{2,2} = \nu_2(\mathbb{P}^2) \subseteq \mathbb{P}^5$ es conocida como la superficie de Veronese.

Prop: Sea $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una hipersuperficie definida por un polinomio homogéneo de grado d. Entonces, X es isomorfa a la intersección de la variedad de Veronese $V_{n,d} \subseteq \mathbb{P}^N$ y un hiperplano $H \cong \mathbb{P}^{N-1}$, donde $N = \binom{n+d}{d} - 1$. En particular, el complemento $\mathbb{P}^n \setminus X$ es una variedad algebraica afín.

Dem: Supongamos que X está definida por $P(x_0, \dots, x_n) = \sum_{|k| = d} a_k x^k$, con $x^k = x_0^{k_0} \cdots x_n^{k_n}$. Si denotamos por z_k la coordenada de $\mathbb{P}^N$ correspondiente al monomio x^k, entonces $\nu_d(X) = \nu_d(\mathbb{P}^n) \cap H \subseteq \mathbb{P}^N$, donde $H = \{[z] \in \mathbb{P}^N \text{ tq } \sum_{|k| = d} a_k z_k = 0\} \cong \mathbb{P}^{N-1}$ hiperplano ✓. En particular, dado que $\mathbb{P}^N \setminus H \cong \mathbb{A}^N$, tenemos que $\mathbb{P}^n \setminus X$ es isomorfa al cerrado $\nu_d(X) \cap (\mathbb{P}^N \setminus H)$ de $\mathbb{A}^N$, y luego $\mathbb{P}^n \setminus X$ es afín. ■

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que $PGL_n(k) := GL_n(k) / \mathbb{G}_m$ es una variedad algebraica afín, donde $\mathbb{G}_m \cong \{\lambda I_n, \lambda \in k^*\}$ es el centro del grupo $GL_n(k)$.

2° Variedades Grassmannianas e Encajamiento de Plücker

Las variedades grassmannianas son generalizaciones naturales del espacio proyectivo: sea $V \cong k^n$ un k-ev y sea $K \in \{1, \dots, n-1\}$. Definimos
$$Gr(K,V) = \{ W \subseteq V \text{ sub-ev tal que } \dim_k(W) = K \}.$$

Obs: ① En particular, $\mathbb{P}(V) = Gr(1,V)$.

② Dado que un sub-ev $W \cong k^K$ es lo mismo que $\mathbb{P}(W) \cong \mathbb{P}^{K-1}$ en $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^{n-1}$ (lineal), podemos pensar a $Gr(K,V)$ como todos los $\Lambda \cong \mathbb{P}^{K-1}$ subespacios lineales de $\mathbb{P}(V)$. En este caso escribiremos $\mathbb{G}(K-1, \mathbb{P}(V))$ en lugar de $Gr(K,V)$.

③ Sea $W \subseteq V$ sub-ev, y sea $W^\perp := \{ f \in V^* \text{ tq } f(w) = 0 \ \forall w \in W \} \subseteq V^*$ sub-ev. Entonces, $Gr(K,V) \xrightarrow{\sim} Gr(n-K, V^*)$, $[W] \mapsto [W^\perp]$ es una biyección.

④ Cuando sólo nos interese la dimensión de V, escribimos $Gr(K,n)$ (resp. $\mathbb{G}(K-1,n-1)$) en lugar de $Gr(K,V)$ (resp. $\mathbb{G}(K-1,\mathbb{P}(V))$). En part, $Gr(K,n) \cong Gr(n-K,n)$.

Teorema: Sea $V \cong k^n$ un k-ev y sea $K \in \{1, \dots, n-1\}$. Entonces, existe un atlas algebraico en $Gr(K,V)$ que la dota de estructura de variedad algebraica proyectiva. Dicha variedad es llamada Grassmanniana.

Dem: Sea $I \subseteq V$ subev de codimensión K (ie, $\dim_k(I) = n-K$), y consideremos el conjunto
$$\mathcal{U}_I := \{ W \in Gr(K,V) \text{ tal que } W \cap I = \{0\} \}.$$
"intersección transversal" $\Rightarrow V = W \oplus I$

Notar que $\mathcal{U}_I$ se identifica al cerrado algebraico de $\mathrm{Hom}_k(V,I) \cong M_{K\times n}(k) \cong \mathbb{A}^{Kn}$ dado por las proyecciones $p_W : V \to I$ con $\ker(p_W) = W$. Explícitamente,
$\mathcal{U}_I \longrightarrow \{ p \in \mathrm{Hom}_k(V,I) \text{ tq } p|_I = \mathrm{Id}_I \}$, $W \mapsto p_W$ tiene inversa $p \mapsto \ker(p) \in \mathcal{U}_I$.
En coordenadas, la descomposición en suma directa $V = W_0 \oplus I$ corresponde a
$$p = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} W_0 & I \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} * & \cdots & * & 1 & & 0 \\ \vdots & * & \vdots & & \ddots & \\ * & \cdots & * & 0 & & 1 \end{array} \right) & I \end{array} \Rightarrow \mathcal{U}_I \cong \mathbb{A}^{K(n-K)} \text{ espacio afín } \checkmark$$
(Obs: Más adelante, $\dim Gr(K,n) = K(n-K)$).

Los $\{\mathcal{U}_I\}_{I \in Gr(n-K,V)}$ cubren $Gr(K,V)$ y definen una topología: Un subconjunto S de $Gr(K,V)$ es abierto si $S \cap \mathcal{U}_I$ es un abierto de Zariski para todo I. Más aún, considerando una base $(e_1, \dots, e_n)$ de V y subev de la forma $I = \mathrm{Vect}_k(e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-K}})$ obtenemos un cubrimiento finito de $Gr(K,V) \rightsquigarrow Gr(K,V)$ espacio top. noetheriano.

Para el cambio de cartas, consideramos $I, J \subseteq V$ subev de dimensión $n-K$, y notamos que $\mathcal{U}_I \cap \mathcal{U}_J \subseteq \mathcal{U}_I$ se identifica con las $p_W : V \to I$ proyecciones tq $\ker(p_W) \cap J = \{0\}$, ie, $p_W|_J : J \xrightarrow{\sim} I$ inyectivas (y luego isomorfismos). En coordenadas, esto define un abierto de Zariski de $\mathcal{U}_I \cong \mathbb{A}^{K(n-K)}$ (dado por $\det \neq 0$ para cierta submatriz). Más aún: si $p \in \mathcal{U}_I \cap \mathcal{U}_J \subseteq \mathcal{U}_I$ entonces $p' := (p|_J)^{-1} \circ p \in \mathrm{Hom}_k(V,J)$ pertenece a $\mathcal{U}_I \cap \mathcal{U}_J \subseteq \mathcal{U}_J$, y la aplicación $p \mapsto p'$ es un isomorfismo (birregular), pues es lineal en coordenadas ✓

Luego, $Gr(K,V)$ es una variedad algebraica. Veamos que es proyectiva:

Recuerdo: Sea $V \cong k^n$ e.v. y $d \in \{1, \dots, n\}$. Entonces la d-ésima potencia exterior $\Lambda^d V$ es un k-ev. de dimensión $\dim_k \Lambda^d V = \binom{n}{d}$. Más aún, si $(e_1, \dots, e_n)$ es una base de V, entonces $\{ e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d} \}_{1 \le i_1 < \dots < i_d \le n}$ es una base de $\Lambda^d V$. Además, para todo $\sigma \in S_d$ se tiene $v_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge v_{\sigma(d)} = \varepsilon(\sigma)\, v_1 \wedge \dots \wedge v_d$ en $\Lambda^d V$.

Consideremos la <u>incrustación de Plücker</u> dada por:

$$\varphi : \mathrm{Gr}(k,V) \longrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^k V) \cong \mathbb{P}^N$$
$$[W] \longmapsto [\Lambda^k W]$$

que a cada $W \subseteq V$ sub-ev de $\dim_k(W) = k$ le asocia la recta vectorial $k \cong \Lambda^k W \subseteq \Lambda^k V$, donde $N = \binom{n}{k} - 1$. Notar que si $(w_1, \ldots, w_k)$ es una base de W, entonces la recta $\Lambda^k W$ está generada por el tensor simple $w_1 \wedge \ldots \wedge w_k$. Recíprocamente, toda recta en $\Lambda^k V$ generada por un tensor simple $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \neq 0$ define un sub-ev $W := \mathrm{Vect}_k(v_1, \ldots, v_k)$ de dimensión k de V, ie, φ es biyectiva sobre su imagen.

• <u>Veamos que φ es regular</u>: Si fijamos una base de V y, tal como antes, representamos a $W = \mathrm{Vect}_k(w_1, \ldots, w_k) \in \mathrm{Gr}(k,V)$ usando las filas de una matriz (no única):

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to w_1 \\ \\ \to w_n \end{array}$$

$\Rightarrow w_1 \wedge \ldots \wedge w_k = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} p_{i_1, \ldots, i_k} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$, donde $p_{i_1, \ldots, i_k} = \det(p_{j, i_\ell})_{1 \leq j, \ell \leq k}$

es el subdeterminante $k \times k$ de la matriz obtenida a partir de las columnas $i_1, \ldots, i_k$. En particular, φ es regular pues cada $p_{i_1, \ldots, i_k}$ lo es ✓

(<u>Obs</u>: Los $\{p_{i_1, \ldots, i_k}\}$ son las <u>coordenadas de Plücker</u> de W en $\mathbb{P}(\Lambda^k V)$.)

• <u>Veamos que φ es un isomorfismo sobre su imagen</u>: Basta verificarlo para cada $\mathcal{U}_I$. Sea $I \in \mathrm{Gr}(n-k, V)$ y consideremos una base $(e_1, \ldots, e_n)$ de V tal que se tiene $I = \mathrm{Vect}_k(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ y sea ~~$W \in \mathcal{U}_I$~~. Tal como antes, consideramos la matriz

$$P = \left(\begin{array}{ccc|ccc} p_{11} & \cdots & p_{1,n-k} & 1 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ p_{k1} & \cdots & p_{k,n-k} & 0 & & 1 \end{array}\right)$$

y notamos que cada p_{ij} se obtiene como un sub-determinante $k \times k$ de P.

$\Rightarrow \varphi|_{\mathcal{U}_I} : \mathcal{U}_I \xrightarrow{\sim} \varphi(\mathcal{U}_I) \subseteq \mathbb{P}(\Lambda^k V)$ isomorfismo sobre su imagen para todo I ✓

• <u>Veamos que $G := \varphi(\mathrm{Gr}(k,V)) \subseteq \mathbb{P}(\Lambda^k V)$ es un cerrado</u>: Sea $v \neq 0$ en V y sea $\omega \neq 0$ en $\Lambda^k V$. Si completamos $e_1 = v$ en una base $(e_1, \ldots, e_n)$ de V, notamos que $\omega \wedge v = 0$ en $\Lambda^{k+1} V \iff \omega = v \wedge \eta$ para cierta $\eta \in \Lambda^{k-1} V$.

Repitiendo el argumento, notamos que $\omega \in \Lambda^k V$ es un tensor simple (ie, de la forma $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k$ con $v_i \in V$) si y sólo si el kernel de la aplicación lineal

$$\psi_\omega : V \longrightarrow \Lambda^{k+1} V, \quad v \longmapsto \omega \wedge v$$

verifica $\dim_k \ker(\psi_\omega) \geq k$, ie, $\mathrm{rg}(\psi_\omega) \leq n-k$. Esto último es una condición <u>cerrada</u> en $\mathbb{P}(\Lambda^k V)$, pues se expresa en coordenadas como la anulación de todos los sub-det. $(n-k+1) \times (n-k+1)$ de la matriz de ψ_ω. ✓ ∎

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ $(k=2)$ Sea $V \cong k^n$ ev. Demostrar que:

① El tensor $\omega \in \Lambda^2 V$ es simple si y sólo si $\omega \wedge \omega = 0$ en $\Lambda^4 V$.

② Deducir que la imagen $G = \varphi(\mathrm{Gr}(2,V)) \subseteq \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ está dada por intersección de hipersuperficies cuádricas.

③ Probar que $\mathrm{Gr}(2,4)$ es isomorfa a la <u>cuádrica de Plücker</u> en $\mathbb{P}(\Lambda^2 k^4) \cong \mathbb{P}^5$ dada por:

$$p_{12} p_{34} - p_{13} p_{24} + p_{14} p_{23} = 0.$$

§12. Componentes irreducibles

Recuerdo: Un espacio topológico X es irreducible si $X = X_1 \cup X_2$ con X_1, X_2 cerrados implica que $X = X_1$ o bien $X = X_2$.

Esto a su vez es equivalente a cualquiera de las condiciones siguientes:

a) Todo par de abiertos no-vacíos de X se intersectan.

b) Todo abierto no-vacío de X es denso en X.

Ejemplo: El espacio afín $\mathbb{A}^n$ es irreducible. Más generalmente, una subvariedad afín $X \subseteq \mathbb{A}^n$ es irreducible $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{I}(X)$ es un ideal primo de $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ (ver §6, pág. 20).

Obs: En topología, los espacios topológicos irreducibles se conocen también como espacios hiperconexos. Las siguientes propiedades importantes se dejan como ejercicio:

Ejercicio Sea X un espacio topológico. Demostrar que:

① Si X es irreducible, entonces X es conexo.

② Si X es irreducible y $f : X \to Y$ función continua entre espacios topológicos, entonces $f(X) \subseteq Y$ es irreducible.

[Indicación: La prueba de "X conexo $\Rightarrow f(X)$ conexo" sigue funcionando.]

③ Si X es irreducible y $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto, entonces $\mathcal{U}$ es irreducible.

[Indicación: Intersección vacía de abiertos de $\mathcal{U}$ es vacía también en X.]

④ Sea $S \subseteq X$ un subconjunto irreducible de X, entonces $\overline{S}$ es irreducible.

[Indicación: Si $\overline{S} = S_1 \cup S_2$ cerrados $\Rightarrow S = F_1 \cup F_2$ con $F_i = S_i \cap S$ cerrado.]

⑤ Sean $\mathcal{U}, V \subseteq X$ abiertos irreducibles de X tal que $\mathcal{U} \cap V \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{U} \cup V$ irreducible

[Indicación: Probar que si W abierto no vacío tq $W \subseteq \mathcal{U} \cup V$, entonces $W \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ y $W \cap V \neq \emptyset$. Probar luego que W es denso en $\mathcal{U} \cup V$, y concluir usando b).]

Consecuencias:

i) El espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ es irreducible, pues es cubierto por abiertos $\mathcal{U}_i \cong \mathbb{A}^n$ irreducibles. Del mismo modo, la grassmanniana $Gr(k,n)$ es irreducible.

ii) Sea X variedad proyectiva irreducible, entonces toda función regular $f : X \to k$ es constante (i.e., $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \cong k$). En efecto, $f(X)$ es un conjunto finito e irreducible ✓

iii) Sea $X \subseteq \mathbb{P}^n$ variedad proyectiva irreducible diferente de un punto, entonces $X \cap Y \neq \emptyset$ para toda hipersuperficie $Y \subseteq \mathbb{P}^n$. En efecto, $\mathbb{P}^n \setminus Y$ es una variedad afín (ver §11, pág 38) y las únicas subvariedades proyectivas $X \subseteq \mathbb{P}^n \setminus Y$ de var. afines son los puntos (ver §11, pág 37).

Prop: Sean X e Y dos variedades algebraicas irreducibles, entonces $X \times Y$ es irreducible.

Dem: Si escribimos $X \times Y = Z_1 \cup Z_2$ con Z_1, Z_2 cerrados no-vacíos, entonces el conjunto Y_i de puntos $y \in Y$ tq $X \times \{y\} \subseteq Z_i$ es un cerrado de Y, y $Y = Y_1 \cup Y_2$.
$\Rightarrow Y = Y_1$ o $Y = Y_2$ pues Y irreducible $\Rightarrow Z_1 = X \times Y$ o $Z_2 = X \times Y$ ✓ ∎

Def: Sea X un espacio topológico. Una componente irreducible de X es un subconjunto irreducible maximal respecto a la inclusión (i.e, no está contenido en ningún conjunto irreducible de X estrictamente).

Obs: Dado que si $S \subseteq X$ subconjunto irreducible, entonces $\overline{S} \subseteq X$ es irreducible, se tiene que las componentes irreducibles de X son necesariamente conjuntos cerrados.

Recordemos que un espacio topológico X es noetheriano si toda sucesión decreciente de cerrados $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots \supseteq F_n \supseteq \ldots$ es eventualmente constante, ie, $\exists N$ tq $F_m = F_{m+1}$ $\forall m \geq N$. La técnica de demostración del siguiente resultado es llamada "Inducción noetheriana":

Teorema: Sea X un espacio topológico noetheriano (eg. una variedad algebraica). Entonces:
① El conjunto de componentes irreducibles $X_1, \ldots, X_m$ de X es finito.
② $X = X_1 \cup \ldots \cup X_m$ y todo cerrado irreducible de X está contenido en alguna de las componentes irreducibles.
En particular, todo cerrado no-vacío $Y \subseteq X$ se escribe de manera única (módulo permutación) como unión finita $Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_r$ de cerrados irreducibles, no contenidos uno en el otro.

Dem: Sea $\mathcal{F}$ la familia de todos los cerrados no-vacíos de X que no se escriben como unión finita de cerrados irreducibles, y veamos que $\mathcal{F} = \emptyset$:
Si $\mathcal{F} \neq \emptyset$, consideramos Y_1 en $\mathcal{F}$. Si Y_1 contiene estrictamente otro elemento de $\mathcal{F}$, escogemos uno y lo llamamos $Y_2 \subsetneq Y_1$, y luego nos preguntamos lo mismo para Y_2.
Por noetherianidad, obtenemos un elemento minimal $Y = Y_m$ de $\mathcal{F}$.
Dado que $Y \in \mathcal{F}$ se tiene que Y no es irreducible, ie, $Y = Y_1 \cup Y_2$ con $Y_i \subsetneq Y$ cerrado propio. Por minimalidad, Y_1 e Y_2 se escriben como unión finita de cerrados irreducibles, y luego Y también: una contradicción!
Luego, todo cerrado no-vacío $Y \subseteq X$ se escribe como unión finita de cerrados irreducibles y podemos asumir que ninguno está contenido en el otro (quitando aquellos contenidos en intersecciones si fuera necesario). En part, obtenemos ① y $X = X_1 \cup \ldots \cup X_m$.
Más aún, si $Y \subseteq X$ es irreducible, entonces $Y = (Y \cap X_1) \cup \ldots \cup (Y \cap X_m)$ y luego $Y = Y \cup X_i$ para algún i, ie, $Y \subseteq X_i$ ✓
Finalmente, veamos la unicidad (módulo permutación): Si $Y \subseteq X$ cerrado no-vacío y si

$$Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_r = Y_1' \cup \ldots \cup Y_s' \quad \text{con } Y_1, \ldots, Y_r \text{ y } Y_1', \ldots, Y_s' \text{ cerrados irred.}$$

$\Rightarrow Y_1 \subseteq Y_1' \cup \ldots \cup Y_s'$ y luego $Y_1 \subseteq Y_j'$ para algún $j = 1, \ldots, s$ (tal como antes)
Similar, $Y_j' \subseteq Y_i$ para algún $i = 1, \ldots, r$ y luego $Y_1 \subseteq Y_j' \subseteq Y_i$. Dado que ningún Y_i está contenido dentro de otro: $Y_1 = Y_j'$. Así, cada elemento de la lista de los Y_i es igual a un elemento de la lista de los Y_j', y viceversa. ∎

Ejemplo: ① Un caso particular importante es cuando $X = V(f)$ es una hipersuperficie afín en $\mathbb{A}^n$ (resp. proyectiva en $\mathbb{P}^n$) dada por los ceros de un polinomio f no-nulo en $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n) = k[X_1, \ldots, X_n]$ (resp. homogéneo en $\mathcal{O}(\mathbb{A}^{n+1}) = k[X_0, \ldots, X_n]$):
Dado que el anillo de polinomios en varias variables es un "dominio de factorización única", podemos escribir f de manera única (módulo permutación y mult. por k^*):

$$f = f_1 \cdots f_r \quad \text{con } f_1, \ldots, f_r \text{ polinomios irreducibles}$$

$\Rightarrow V(f) = V(f_1) \cup \ldots \cup V(f_r)$ es la descomposición en componentes irreducibles.
② De manera más general, si $X = V(I)$ variedad afín en $\mathbb{A}^n$ (resp. proyectiva en $\mathbb{P}^n$), entonces $\sqrt{I} = \mathcal{I}(X) = \bigcap_{i=1}^{r} \mathcal{I}(X_i)$, donde los $\mathcal{I}(X_i)$ son ideales primos.
(Obs: Esto es un caso particular de la descomposición primaria de Lasker (1905) y Noether (1921)).

Ejercicio Determinar las componentes irreducibles de $X = V(X^2+Y^2+Z^2-4,\ Y^2+Z^2-1) \subseteq \mathbb{A}^3$.

§13. Funciones racionales y aplicaciones racionales

Def: Sea X una variedad algebraica. Consideremos el conjunto de pares $(\mathcal{U}, f)$ donde $\mathcal{U} \subseteq X$ es un abierto denso de X y $f : \mathcal{U} \to \Bbbk$ función regular, y definamos la relación de equivalencia

$$(\mathcal{U}, f) \sim (V, g) \quad \text{si} \quad f|_{\mathcal{U}\cap V} = g|_{\mathcal{U}\cap V}.$$

Denotamos por $\mathrm{Rat}(X)$ o por $\Bbbk(X)$ al $\Bbbk$-álgebra de clases de equivalencia, y diremos que la clase de $(\mathcal{U}, f)$, denotada $f : X \dashrightarrow \Bbbk$, es una función racional en X.

Obs: ① A pesar de que una función racional no es una función (no está definida en todo X), podemos considerar su dominio de definición como el abierto maximal donde está definida, i.e., para $\varphi : X \dashrightarrow \Bbbk$ en $\Bbbk(X)$ definimos

$$\mathrm{Dom}(\varphi) := \bigcup_{[(\mathcal{U},f)] = \varphi} \mathcal{U}$$

② Por definición, si $V \subseteq X$ es un abierto denso de X, entonces la restricción

$$\Bbbk(X) \xrightarrow{\sim} \Bbbk(V), \quad [(\mathcal{U}, f)] \longmapsto [(\mathcal{U}\cap V, f|_{\mathcal{U}\cap V})]$$

es un isomorfismo de $\Bbbk$-álgebras.

③ Si X es irreducible, entonces $\Bbbk(X)$ es un cuerpo. En efecto, si $(\mathcal{U}, f)$ representa $\varphi : X \dashrightarrow \Bbbk$ no-nula, entonces $V = \{x \in \mathcal{U} \text{ tq } f(x) \neq 0\}$ es denso en X (pues X irred.) y φ^{-1} está dada por $(V, 1/f)$. En general, si $X_1, \ldots, X_m$ son las componentes irreducibles de X, entonces $\Bbbk(X) \cong \Bbbk(X_1) \times \ldots \times \Bbbk(X_m)$.

Prop: Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad algebraica afín irreducible. Entonces, $\Bbbk(X)$ es isomorfo al cuerpo de fracciones $\mathrm{Fr}(\mathcal{O}(X))$ del dominio entero $\mathcal{O}(X)$ de funciones regulares en X.

Dem: Si f/g es un elemento de $\mathrm{Fr}(\mathcal{O}(X))$, le asociamos la función racional dada por $[(\mathcal{U}_g, f/g)]$, donde $\mathcal{U}_g = \{x \in X \text{ tq } g(x) \neq 0\}$ abierto afín. Recíprocamente, si $\varphi : X \dashrightarrow \Bbbk$ definida por $f : \mathcal{U} \to \Bbbk$ entonces $Y = X \setminus \mathcal{U}$ es un cerrado Zariski de X y en particular existe $g \in \mathcal{O}(X)$ no-nula tal que $\mathcal{U}_g \subseteq \mathcal{U}$. Reemplazando $\mathcal{U}$ por $\mathcal{U}_g$, y usando que $\mathcal{O}(\mathcal{U}_g) \cong \mathcal{O}(X)_g$ localización en g, tenemos que existen $u \in \mathcal{O}(X)$ y $N \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tal que $f = \frac{u}{g^N}$, y luego le asociamos a φ el elemento $\frac{u}{g^N}$ de $\mathrm{Fr}(\mathcal{O}(X))$ ✓ ∎

Ejemplo: $\Bbbk(\mathbb{A}^n) = \Bbbk(\mathbb{P}^n) = \Bbbk(X_1, \ldots, X_n)$ cuerpo de funciones racionales.

Def: Sean X e Y variedades algebraicas. Consideramos el conjunto de pares $(\mathcal{U}, f)$ donde $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto denso de X y $f : \mathcal{U} \to Y$ morfismo regular, y definimos

$$(\mathcal{U}, f) \sim (V, g) \quad \text{si} \quad f|_{\mathcal{U}\cap V} = g|_{\mathcal{U}\cap V}.$$

Diremos que la clase de $(\mathcal{U}, f)$, denotada $f : X \dashrightarrow Y$, es una aplicación racional de X en Y.
En part, $\Bbbk(X) = \{f : X \dashrightarrow \mathbb{A}^1 \text{ aplicación racional}\}$.

Obs: El dominio de definición de una aplicación racional $\varphi : X \dashrightarrow Y$ se define del mismo modo que antes. En part, φ es un morfismo regular si $\mathrm{Dom}(\varphi) = X$.

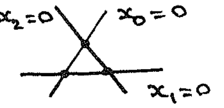
Terminología: Sea $\varphi : X \dashrightarrow Y$ aplicación racional. Decimos que φ es:

① Una aplicación birracional si existe $\psi : Y \dashrightarrow X$ aplicación racional tal que $\mathrm{Im}(\varphi) := \varphi(\mathrm{Dom}(\varphi)) \subseteq \mathrm{Dom}(\psi)$ y $\mathrm{Im}(\psi) \subseteq \mathrm{Dom}(\varphi)$, y $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}$ y $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}$.

② Un morfismo birracional si es una aplicación birracional con $\mathrm{Dom}(\varphi) = X$.

③ $\mathrm{Bir}(X) := \{f : X \dashrightarrow X \text{ aplicación birracional}\}$ grupo de automorfismos birracionales.

<u>Ejemplo</u>: Sea $f:\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$, $[x_0,x_1,x_2]\mapsto \left[\frac{1}{x_0},\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2}\right]$ "<u>involución de Cremona</u>"



Notar que $f(x_0,x_1,x_2)=[x_1x_2,x_0x_2,x_0x_1]$ y luego $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{P}^2\setminus\{p_0,p_1,p_2\}$ con $p_0=[1,0,0]$, $p_1=[0,1,0]$, $p_2=[0,0,1]$. Además, $f\in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$.

<u>Obs</u>: $\mathrm{Cr}_n(k):=\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n(k))$ es llamado el <u>grupo de Cremona</u> (≈ 1863), y es un grupo difícil de estudiar. Un resultado importante de Max Noether y Castelnuovo (y Gizatullin) afirma que $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ está generado por $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ y la involución de Cremona.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $f:\mathbb{P}^3\dashrightarrow\mathbb{P}^3$, $[x_0,x_1,x_2,x_3]\mapsto[x_0x_3,x_1x_3,x_2x_3,x_0^2-x_1x_2]$. Determinar $\mathrm{Dom}(f)$, probar que $f\in\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^3)$ y calcular $f^{-1}:\mathbb{P}^3\dashrightarrow\mathbb{P}^3$.

<u>Def</u>: Sea $f:X\dashrightarrow Y$ aplicación racional entre variedades algebraicas. Decimos que f es <u>dominante</u> si $\mathrm{Im}(f):=f(\mathrm{Dom}(f))$ es densa en Y. En part, si $g:Y\dashrightarrow Z$ es una aplicación racional, entonces la composición $g\circ f:X\dashrightarrow Z$ está bien definida.

<u>Lema</u>: Sean $X\subseteq\mathbb{A}^n$ e $Y\subseteq\mathbb{A}^m$ variedades afines, y sea $f:X\to Y$ un morfismo regular. Entonces, f es dominante si y sólo si $f^*:\mathcal{O}(Y)\to\mathcal{O}(X)$ es inyectivo.

<u>Dem</u>: Sup. que f es dominante y sea $u\in\ker(f^*)$, ie, $u\circ f=0$ en $\mathcal{O}(X)$. En part, $u=0$ en $f(X)$ y luego $u=0$ en $\overline{f(X)}^{\mathrm{Zar}}=Y$ ✓

Recíprocamente, si f <u>no</u> es dominante entonces $\overline{f(X)}^{\mathrm{Zar}}\subsetneq Y$ es un cerrado $\neq Y$ y luego existe $u:Y\to k$ regular tq $u|_{\overline{f(X)}^{\mathrm{Zar}}}=0$ pero $u\neq 0$ en $\mathcal{O}(Y)$, ie, $u\in\ker(f^*)$ es no-trivial y luego f^* <u>no</u> es inyectivo ✓ ■

<u>Ejemplo</u> (útil): Sea $f:X\to Y$ un morfismo (regular) <u>dominante</u> entre variedades alg. afines. Entonces, si X es irreducible entonces Y es irreducible también.

En efecto, $f^*:\mathcal{O}(Y)\hookrightarrow\mathcal{O}(X)$ identifica $\mathcal{O}(Y)$ con una sub-algebra del dominio entero $\mathcal{O}(X)$, y luego $\mathcal{O}(Y)$ es un dominio entero también, ie, Y es irreducible ✓

<u>Obs</u>: Un argumento similar al Lema anterior muestra que si $f:X\dashrightarrow Y$ aplicación racional <u>dominante</u> entre variedades algebraicas, entonces el pullback de funciones racionales (bien definido pues f dominante)

$$f^*:k(Y)\hookrightarrow k(X),\quad u\mapsto u\circ f$$

es un morfismo inyectivo de k-álgebras. Notar que $f^*|_k=\mathrm{Id}_k$ (funciones constantes).

<u>Prop</u>: Sean X e Y variedades algebraicas <u>irreducibles</u>, y sea

$$\varphi:k(Y)\hookrightarrow k(X)$$

un morfismo de k-extensiones de cuerpos (ie, morfismo de cuerpos tq $\varphi|_k=\mathrm{Id}_k$). Entonces, existe una única $f:X\dashrightarrow Y$ aplicación racional dominante tal que $\varphi=f^*$.

<u>Dem</u>: Sean $\mathcal{U}\subseteq X$ y $V\subseteq Y$ abiertos afines no-vacíos (y luego densos), entonces $k(X)\cong k(\mathcal{U})$ y $k(Y)\cong k(V)$, por lo que podemos suponer X e Y afines. En part, si escribimos $B=\mathcal{O}(Y)\cong k[y_1,\dots,y_m]/\mathcal{I}(Y)$ con generadores $y_1,\dots,y_m\in\mathcal{O}(Y)$, entonces $k(Y)\cong \mathrm{Fr}(B)$. Luego, si escribimos $\varphi(y_i)=\frac{u_i}{g_i}\in k(X)$ y consideramos $\mathcal{U}=\mathcal{U}_{g_1}\cap\dots\cap\mathcal{U}_{g_m}\subseteq X$ abierto afín donde cada $\varphi(y_i)$ es regular, entonces la restricción $\mathcal{O}(Y)\to k(X)$ se factoriza en $\tilde{\varphi}:\mathcal{O}(Y)\to\mathcal{O}(\mathcal{U})$, y luego (ver §6, pág 22) existe $f:\mathcal{U}\to Y$ regular tq $\tilde{\varphi}=f^*$.

En part, $[(\mathcal{U},f)]$ define una aplicación racional $f:X\dashrightarrow Y$. Para ver que f es dominante consideremos el siguiente diagrama conmutativo con flechas verticales <u>inyectivas</u>:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(Y) \arrow[r, "\tilde{\varphi} = f^*"] & \mathcal{O}(\mathcal{U}) \\ k(Y) \arrow[u, hook] \arrow[r, hook, "\varphi"] & k(X) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Luego, $\tilde{\varphi} = f^* : \mathcal{O}(Y) \hookrightarrow \mathcal{O}(\mathcal{U})$ es inyectiva, ie, $f : \mathcal{U} \to Y$ dominante. Más aún, $f^* : k(Y) \hookrightarrow k(X)$ coincide con φ, y la unicidad de f se obtiene del hecho que si $g^* = \varphi$ para cierta $g : X \dashrightarrow Y$ dominante, entonces $f^*(y_i) = g^*(y_i)$ en $k(X)$ y luego f y g coinciden en el abierto denso $\mathcal{U}$ ■

Def: Sean X e Y variedades algebraicas. Decimos que X e Y son <u>birracionalmente equivalentes</u> (o <u>birracionales</u>) si existen $\mathcal{U} \subseteq X$ y $V \subseteq Y$ abiertos densos (no-vacíos) tal que $\mathcal{U} \cong V$. En tal caso, escribimos $X \overset{\sim}{\dashrightarrow} Y$ o bien $X \underset{\text{bir}}{\sim} Y$.

Obs: La <u>geometría birracional</u> busca estudiar variedades algebraicas módulo equivalencia birracional, ie, dada X var. alg. se busca Y "lo más simple posible" tal que $X \overset{\sim}{\dashrightarrow} Y$.

Teorema: Sean X e Y variedades algebraicas irreducibles. Entonces, X e Y son birracionales si y sólo si las extensiones $k(X) \cong k(Y)$ son k-isomorfas.

Dem: Sea $\varphi : k(Y) \to k(X)$ un k-isomorfismo de cuerpos, y sean $f : X \dashrightarrow Y$ dominante tal que $f^* = \varphi$, y $g : Y \dashrightarrow X$ dominante tal que $g^* = \varphi^{-1}$. Sean $\mathcal{U} = \mathrm{Dom}(f) \subseteq X$ y $V = \mathrm{Dom}(g) \subseteq Y$. Achicando $\mathcal{U}$ si fuera necesario, podemos suponer que $f(\mathcal{U}) \subseteq V$. Por unicidad de f y g, tenemos que $g(f(x)) = x$ $\forall x \in \mathcal{U}$. Del mismo modo, si $W := g^{-1}(\mathcal{U})$ abierto denso de Y, entonces $f(g(y)) = y$ $\forall y \in W$ y $f(\mathcal{U}) \subseteq W$. Así, $f|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to W$ y $g|_W : W \to \mathcal{U}$ son inversas una de la otra ✓ ■

Def: Una variedad algebraica irreducible X es <u>racional</u> si $X \overset{\sim}{\dashrightarrow} \mathbb{A}^n$, ie, los cuerpos de funciones racionales $k(X) \cong k(t_1, \dots, t_n)$ son k-isomorfos, para cierto $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

Ejemplos: ① $\mathbb{P}^n$ y $Gr(k,n)$ son racionales.

② La aplicación $\mathbb{A}^1 \dashrightarrow C = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \text{ tq } x^2 + y^2 = 1\}$, $t \mapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$ es birracional

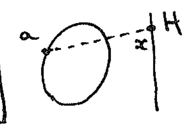
③ La aplicación dominante $\mathbb{A}^1 \to C = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \text{ tq } y^2 = x^3\}$, $t \mapsto (t^2, t^3)$ es birracional, con inversa $C \dashrightarrow \mathbb{A}^1$, $(x,y) \mapsto \frac{y}{x}$. Así, $C \overset{\sim}{\dashrightarrow} \mathbb{A}^1$ pero $C \not\cong \mathbb{A}^1$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ ① Probar que $C = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \text{ tq } y^2 = x^3 - 1\}$ <u>no</u> es birracional a $\mathbb{A}^1$.

[<u>Indicación</u>: Sup. que existe $\mathbb{A}^1 \overset{\sim}{\dashrightarrow} C$, $t \mapsto (x(t), y(t))$ con $x(t) = \frac{p(t)}{q(t)}$, $y(t) = \frac{r(t)}{s(t)}$ donde $(p,q) = (r,s) = 1$ en $k[t]$ y llegar a una contradicción.]

② Sup. $\mathrm{car}(k) \neq 2$. Probar que toda hipersuperficie cuádrica $\{Q(x_0, \dots, x_n) = 0\}$ en $\mathbb{P}^n$ es racional.

[<u>Indicación</u>: Sea $a \in \mathbb{P}^n$ tq $Q(a) = 0$ y sea $H \cong \mathbb{P}^{n-1}$ hiperplano tal que $a \notin H$. Considerar la recta $a + tx$ (con $t \in k$ y $x \in H$) y resolver $Q(a+tx) = 0$.]



Obs: De manera más general, una variedad algebraica X es <u>unirracional</u> si existe una aplicación dominante $\mathbb{A}^n \dashrightarrow X$ para cierto $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, ie, existe una inclusión $k(X) \subseteq k(t_1, \dots, t_n)$.

⚠ Recién en los años 70' se descubrieron los primeros ejemplos de variedades algebraicas que son unirracionales pero que <u>no</u> son racionales (trabajos de Artin-Mumford, de Clemens-Griffiths, y de Iskovskikh-Manin). Por ejemplo, la hipersuperficie cúbica de $\mathbb{P}^4$ dada por $X = \{[x_0, \dots, x_4] \in \mathbb{P}^4 \text{ tq } x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0\}$.

Hoy en día, <u>no</u> conocemos <u>ninguna</u> cúbica "suave" de $\mathbb{P}^5$ que sea irracional, a pesar de que se conjetura que la mayor parte de dichas cúbicas no es racional!

§14. El blow-up de una variedad afín

En esta sección discutiremos uno de los ejemplos más importantes de morfismos birracionales: sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad alg. afín irreducible y sean $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ polinomios que no se anulan en X. En part, $\mathcal{U} := X \setminus V(f_1, \dots, f_r)$ es un abierto denso de X y

$$f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{P}^{r-1}, \quad x \mapsto [f_1(x), \dots, f_r(x)]$$

es un morfismo regular, cuyo grafo $\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in \mathcal{U}\} \subseteq \mathcal{U} \times \mathbb{P}^{r-1}$ es isomorfo a $\mathcal{U}$. La clausura $\overline{\Gamma_f}^{Zar}$ en $X \times \mathbb{P}^{r-1}$ es llamado el blow-up de X en $f_1, \dots, f_r$ y es denotado $\widetilde{X}$ usualmente.

⚠ Notar que hay una proyección natural de $\widetilde{X}$ a X (primer factor), que usualmente se denota $\varepsilon : \widetilde{X} \to X$ y se dice que ε es el blow-up de X en $f_1, \dots, f_r$.

Obs: ① $\varepsilon|_{\Gamma_f} : \Gamma_f \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}$ es un isomorfismo. Luego, $\varepsilon : \widetilde{X} \to X$ es un morfismo birracional.

② Dado que $\mathcal{U} \cong \Gamma_f$ es irreducible y $\widetilde{X} = \overline{\Gamma_f}^{Zar}$, $\widetilde{X}$ es irreducible.

③ El conjunto $\widetilde{X} \setminus \Gamma_f = \varepsilon^{-1}(V(f_1, \dots, f_r))$, donde usualmente ε no es un isomorfismo, es llamado el conjunto excepcional del blow-up, denotado $\mathrm{Exc}(\varepsilon)$ o simplemente $E \subseteq \widetilde{X}$.

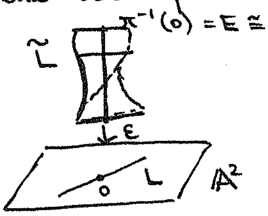
④ Sea $Y \subseteq X$ cerrado, y sea $\widetilde{Y}$ el blow-up de Y en $f_1, \dots, f_r$. Entonces, tenemos $\widetilde{Y} \subseteq Y \times \mathbb{P}^{r-1} \subseteq X \times \mathbb{P}^{r-1}$ es una subvariedad cerrada de $\widetilde{X}$, dada por la clausura de $Y \cap \mathcal{U}$ en $\widetilde{X}$ (usando el isomorfismo $\Gamma_f \cong \mathcal{U}$). Decimos que $\widetilde{Y} \subseteq \widetilde{X}$ es la transformada estricta de Y en el blow-up de X.

Ejemplos: ① Si $r = 1$, entonces $\widetilde{X} \subseteq X \times \mathbb{P}^0 \cong X$ y luego $X \cong \widetilde{X}$.

② En $X = \mathbb{A}^2$ con coordenadas (x, y) consideramos $f_1 = x$, $f_2 = y$, y luego el blow-up $\widetilde{X}$ en (x, y) es una subvariedad de $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$. El morfismo $(x, y) \mapsto [x : y]$ está bien definido en $\mathcal{U} = \mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y en dicho abierto el grafo está dado por

$$\Gamma = \left\{ ((x,y), [u,v]) \in \mathcal{U} \times \mathbb{P}^1 \text{ tq } \det \begin{vmatrix} x & u \\ y & v \end{vmatrix} = xv - yu = 0 \right\} \subseteq \mathcal{U} \times \mathbb{P}^1$$

Luego, $\widetilde{X} = \{ ((x,y), [u,v]) \in \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1 \text{ tq } xv = yu \} \subseteq \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$ y el morfismo $\varepsilon : \widetilde{X} \to \mathbb{A}^2$ está dado por $\varepsilon((x,y), [u,v]) = (x, y)$. En part, $E = \varepsilon^{-1}((0,0)) \cong \mathbb{P}^1$.



Obs: Rectas vectoriales $L \subseteq \mathbb{A}^2$ intersectan $(0,0)$ y la transformada estricta $\widetilde{L}$ es una recta en $\widetilde{X}$ que intersecta $E \cong \mathbb{P}^1$ en el punto $[L]$ de $\mathbb{P}^1$. En part, si L_1 y L_2 son dos rectas vectoriales distintas, entonces $\widetilde{L}_1 \cap \widetilde{L}_2 = \emptyset$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ var. alg. afín irreducible y sean $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{O}(X)$ no-nulos.

① Probar que el blow-up de X en $f_1, \dots, f_r$ verifica

$$\widetilde{X} \subseteq \{ (x, [y]) \in X \times \mathbb{P}^{r-1} \text{ tq } y_i f_j(x) = y_j f_i(x) \ \forall i,j = 1, \dots, r \}.$$

② Sean $g_1, \dots, g_s \in \mathcal{O}(X)$ no-nulos tal que $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$ y sean $\varepsilon : \widetilde{X} \to X$ y $\varepsilon' : \widetilde{X}' \to X$ los blow-up de X en $(f_1, \dots, f_r)$ y $(g_1, \dots, g_s)$, resp. Probar que existe un isomorfismo $\varphi : \widetilde{X} \xrightarrow{\sim} \widetilde{X}'$ tal que $\varepsilon' \circ \varphi = \varepsilon$.

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & \widetilde{X}' \arrow[dl, "\varepsilon'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

En particular, podemos definir $Z = V(I) \subseteq X$ subvar. cerrada, y decir que $\widetilde{X} := \mathrm{Bl}_Z X \xrightarrow{\varepsilon} X$ es el blow-up de X a lo largo de Z. La subvariedad Z es llamado el centro del blow-up.

③ Sea $C = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \text{ tq } y^2 = x^2(x+1)\}$ (cúbica nodal). Calcular $\widetilde{C}$ en $\widetilde{\mathbb{A}}^2 = \mathrm{Bl}_{(0,0)}(\mathbb{A}^2)$.

§15. Dimensión y morfismos finitos

Recuerdo (grado de trascendencia): Sea K un cuerpo y $k \subseteq K$ un subcuerpo. Decimos que un conjunto $B \subseteq K$ es una base trascendente de K sobre k si:
① Los elementos de B son algebraicamente independientes sobre k.
② La extensión de cuerpos $k(B) \subseteq K$ es algebraica (en particular, finita).
Más aún, si $K = k(x_1, \dots, x_r)$ es una extensión de k finitamente generada, entonces:
a) El cuerpo K posee una base trascendente finita
b) Dos bases trascendentes poseen la misma cantidad de elementos: dicho cardinal se llama el grado de trascendencia de K sobre k, denotado $\operatorname{tr deg}_k(K)$.

Def: Sea X una variedad algebraica. Si X es irreducible, entonces definimos
$$\dim(X) := \operatorname{tr deg}_k k(X),$$
i.e., el grado de trascendencia del cuerpo de funciones racionales de X sobre k. En general, si $X = X_1 \cup \dots \cup X_m$ son las componentes irreducibles de X, definimos
$$\dim(X) = \max_{1 \le i \le m} \{\dim(X_i)\}.$$
En part, decimos que X es de dimensión pura d si $\dim(X_i) = d \;\; \forall i = 1, \dots, m$.

Ejemplos: ① $\dim(\mathbb{A}^n) = \dim(\mathbb{P}^n) = n$.
② Si $\mathcal{U} \subseteq X$ es un abierto denso, entonces $\dim(\mathcal{U}) = \dim(X)$ (invariante birracional !).
③ $\dim(\operatorname{Gr}(k,n)) = k(n-k)$.

Def: Sea X un espacio topológico. La dimensión de Krull es el máximo entero no-negativo $\dim_K(X) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tal que existen cerrados irreducibles $X_0, X_1, \dots, X_d$ tales que
$$X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \dots \subsetneq X_d.$$

Ejemplos: ① $\mathbb{A}^n \supsetneq \mathbb{A}^{n-1} \supsetneq \dots \supsetneq \mathbb{A}^1 \supsetneq \mathbb{A}^0 = \{pt\} \Rightarrow \dim_K(\mathbb{A}^n) \geq n$.
② Sea $Y \subseteq X$ subconjunto, entonces la clausura en X de los cerrados $Y_0 \subsetneq \dots \subsetneq Y_d$ en Y son cerrados distintos en X, y luego $\dim_K(Y) \le \dim_K(X)$.

Objetivo: Nos gustaría probar que ambas nociones de dimensión coinciden, para lo cual usaremos el "Teorema de normalización de Noether" (1926) que afirma que una variedad alg. afín irreducible es de $\dim(X) = n$ si y sólo si existe $f : X \twoheadrightarrow \mathbb{A}^n$ morfismo sobreyectivo que es "finito".

Recuerdo (dependencia entera): Sea $\varphi : A \to B$ morfismo de anillos (conmutativos con unidad), que en particular dota a B de estructura de A-módulo al definir $a \cdot b := \varphi(a) b \;\; \forall a \in A, b \in B$.
Decimos que $x \in B$ es entero sobre A (resp. a φ) si existe una relación polinomial unitaria
$$x^n + \varphi(a_1) x^{n-1} + \dots + \varphi(a_{n-1}) x + \varphi(a_n) = 0.$$
Más aún, decimos que B es entero sobre A (resp. a φ) si todo elemento $x \in B$ es entero.
En caso que A y B sean k-álgebras finitamente generadas, se tiene que B es entero sobre A si y sólo si B es un A-módulo finitamente generado.

Def: Sean X e Y variedades algebraicas afines. Decimos que un morfismo regular $f : X \to Y$ es un morfismo finito si $\mathcal{O}(X)$ es entero sobre $\mathcal{O}(Y)$ respecto a $f^* : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$.

Obs: Esto último equivale a decir que el morfismo de k-álgebras $f^* : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ hace que $\mathcal{O}(X)$ sea un $\mathcal{O}(Y)$-módulo finitamente generado.

Ejemplos: ① Consideramos $f: \mathbb{A}^1 \twoheadrightarrow \mathbb{A}^1$, $t \mapsto t^d$ para cierto $d \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Entonces f es un morfismo finito. En efecto, $f^*: k[X] \hookrightarrow k[T]$, $u \mapsto u \circ f$ corresponde a la inclusión $A := k[T^d] \subseteq B = k[T]$. Finalmente, notamos que $B = k[T]$ está generado como A-módulo por $1, T, T^2, \ldots, T^{d-1}$ (y luego todo elemento de B es entero sobre A).

② Sea $X = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2$ tq $x^2 + y^2 = 1\}$ y $f: X \to \mathbb{A}^1$, $(x,y) \mapsto x$. Entonces, f es un morfismo finito $\boxed{\text{Ejercicio}}$.

③ La proyección $f: \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^1$, $(x,y) \mapsto x$ no es un morfismo finito, pues $k[X,Y]$ no es finitamente generado como $k[X]$-módulo. (¡pero sí es finitamente generado por $1, y$ como $k[X]$-álgebra!).

Def: Sean X e Y variedades algebraicas. Decimos que un morfismo regular $f: X \to Y$ es un morfismo finito si existe un cubrimiento de Y por abiertos afines $Y = \bigcup_{i \in I} V_i$ tal que:

① $\mathcal{U}_i := f^{-1}(V_i)$ es un abierto afín de X.

② El morfismo $f: \mathcal{U}_i \to V_i$ es finito.

Ejemplo: Si $Z \subseteq X$ es una subvariedad cerrada, entonces la inclusión $Z \hookrightarrow X$ es un morfismo finito.

Lema: Sea Y variedad algebraica afín, y $Y = \bigcup_{i \in I} V_i$ cubrimiento afín con $V_i = V_{g_i}$ abierto (principal) de la forma $\{y \in Y$ tq $g_i(y) \neq 0\}$ para $g_i \in \mathcal{O}(Y)$. Sea $f: X \to Y$ un morfismo regular, con X var. alg. arbitraria, y sea $\mathcal{U}_i := f^{-1}(V_i)$. Entonces, si se cumplen:

① $\mathcal{U}_i \subseteq X$ es un abierto afín.

② $f: \mathcal{U}_i \to V_i$ es finito.

$\Rightarrow$ X es una variedad algebraica afín y $f: X \to Y$ es un morfismo finito.

Dem: Sean $A = \mathcal{O}(X)$ y $B = \mathcal{O}(Y)$ k-álgebras, donde $f^*: B \to A$ permite ver A como B-mód. Más aún, si $f_i := f^*(g_i) \in \mathcal{O}(X)$, entonces $\mathcal{O}(V_i) = B_{g_i}$ y $\mathcal{O}(\mathcal{U}_i) = A_{f_i}$ localizaciones.

Por hipótesis, A_{f_i} es un B_{g_i}-módulo fin. generado por (finitos) $a_{ij} = \frac{u_{ij}}{f_i^{N_{ij}}}$ con $u_{ij} \in A$, $N_{ij} \in \mathbb{N}$ y $j \in J$ conj. finito. Reescalando por $f_i^{N_{ij}} = f^*(g_i)^{N_{ij}}$ (usando la estructura de B_{g_i}-módulo), podemos suponer que $a_{ij} \in A$, ie, $A_{f_i} = \langle a_{ij} \rangle_{j \in J}$ como B_{g_i}-módulo.

Veamos que A es un B-módulo fin. generado: Sea $v \in A$. Dado que su imagen en A_{f_i} está generada por los a_{ij}, existen $n_i \in \mathbb{N}$ y $v_{ij} \in B$ tal que:

$$f_i^{n_i} v = \sum_{j \in J} f^*(v_{ij}) a_{ij} \quad \text{en } A. \quad (\star)$$

Por otra parte, dado que $Y = \bigcup_{i \in I} V_{g_i} = \bigcup_{i \in I} V_{g_i^{n_i}}$ es afín, el Hilbert Nullstellensatz implica que existen $u_i \in B$ tal que $1 = \sum_{i \in I} u_i g_i^{n_i}$ en B. Aplicando f^* obtenemos

$$1 = \sum_{i \in I} f^*(u_i) f_i^{n_i} \quad \text{en } A. \quad (\star\star)$$

$(\star) + (\star\star)$
$\Rightarrow v = \sum_{i,j} f^*(u_i v_{ij}) a_{ij}$, ie, $A = \langle a_{ij} \rangle$ como B-módulo ✓. En part, A es una B-álgebra finitamente generada $\underset{B\ k\text{-alg fin. gen.}}{\Longrightarrow}$ $A = \mathcal{O}(X)$ es una k-alg. fin. gen (y reducida).

Sea $X' := \mathrm{Specm}(A)$ var. alg. afín, con $\mathcal{O}(X') \cong \mathcal{O}(X)$ (ver §8). Entonces, obtenemos $X \xrightarrow{\phi} X' \xrightarrow{f'} Y$, donde f' corresponde a $f^*: B = \mathcal{O}(Y) \to A \cong \mathcal{O}(X')$ y donde $\phi: X \to X'$, $x \mapsto \mathfrak{m}_x$. Como A es entero sobre B, $f': X' \to Y$ es un morfismo finito. Finalmente, $\phi|_{\phi^{-1}(\mathcal{U}_i)}: \phi^{-1}(\mathcal{U}_i) \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}_i$ isomorfismo pues $\mathcal{U}_i$ es afín! $\Rightarrow X \cong X'$ y $f \cong f'$ ∎

Prop: Sea $f: X \to Y$ un morfismo finito entre variedades algebraicas. Entonces, para todo abierto afín $V \subseteq Y$ se tiene que $\mathcal{U} := f^{-1}(V)$ es un abierto afín de X, y además $f: \mathcal{U} \to V$ es un morfismo finito.

Dem: En el caso particular donde $X = \operatorname{Specm}(A)$ e $Y = \operatorname{Specm}(B)$ son afines, tenemos que $f^*: B \to A$ permite ver A como un B-módulo fin. generado. Si consideramos $V = V_g \subseteq Y$ un abierto principal, con $g \in \mathcal{O}(Y)$, entonces $\mathcal{U} = f^{-1}(V) = \operatorname{Specm}(A_h)$ es afín, donde $h = f^*(g) \in \mathcal{O}(X)$. Además, A_h es un B_g-módulo fin. gen. (pues A entero sobre B) ✓
Si $V \subseteq Y$ es un abierto afín arbitrario, basta cubrirlo por $V_i = V_{g_i} \cap V$ y notar que $\mathcal{U}_i = f^{-1}(V_i)$ es afín y $f: \mathcal{U}_i \to V_i$ es finito $\underset{\text{Lema}}{\Rightarrow}$ $\mathcal{U} = f^{-1}(V)$ es afín y $f: \mathcal{U} \to V$ finito ✓
En el caso general: Por definición de morfismo finito, existe un cubrimiento de Y por abiertos afines $V_i \subseteq Y$ tq $\mathcal{U}_i = f^{-1}(V_i) \subseteq X$ es un abierto afín y $f: \mathcal{U}_i \to V_i$ finito. Sea $V \subseteq Y$ un abierto afín arbitrario: Sea $W_i = V_i \cap V$ abierto afín (Y es separada!) y cubrimos V por abiertos principales V_{ij}, donde $V_{ij} \subseteq W_i$ dado por $g_{ij} \neq 0$.
El caso particular anterior implica que $\mathcal{U}_{ij} = f^{-1}(V_{ij}) \subseteq \mathcal{U} = f^{-1}(V)$ es afín y $f: \mathcal{U}_{ij} \to V_{ij}$ es un morfismo finito $\overset{\text{Lema}}{\Rightarrow}$ $\mathcal{U}$ es afín y $f: \mathcal{U} \to V$ es un morfismo finito. ■

[Corolario: La composición de dos morfismos finitos es un morfismo finito.]

Dem: $\boxed{\text{Ejercicio}}$. ■

Prop: Sea $f: X \to Y$ un morfismo finito entre variedades algebraicas. Entonces:
① Para todo $y \in Y$, la fibra $f^{-1}(y) = \{x \in X \text{ tq } f(x) = y\}$ es un conjunto finito.
② La imagen $\operatorname{Im}(f) \subseteq Y$ es un conjunto cerrado.

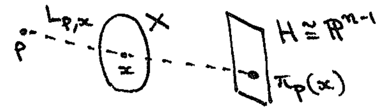
Dem: Ambas afirmaciones son locales, por lo que podemos suponer X e Y var. afines. Sean $A = \mathcal{O}(X)$ y $B = \mathcal{O}(Y)$ k-álgebras, y $f^*: B \to A$ pullback. Veamos ①:
Elegimos generadores $x_1, \dots, x_m$ de A (que definen $X \subseteq \mathbb{A}^m$). Cada x_i es entero sobre B y luego hay una relación $x_i^{d_i} + \sum_{j=1}^{d_i} f^*(b_{ij}) x_i^{d_i - j} = 0$ (✱) en A. Luego, si $x \in f^{-1}(y)$ entonces $f^*(b_{ij})(x) = b_{ij}(f(x)) = b_{ij}(y)$ depende sólo de $y \in Y$. Así, al fijar $y \in Y$ se obtienen finitas soluciones para x_i y luego finitas para $x = (x_1, \dots, x_m) \in X$ ✓
Veamos ②: Sea $I = \ker(f^*) \subseteq B$ y probemos que $\operatorname{Im}(f) = f(X) = V(I)$ cerrado en Y.
Para ello, recordemos que si $x \in X$ y $\mathfrak{m}_x \subseteq A$ es el ideal maximal correspondiente, entonces $(f^*)^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{m}_y$ es el ideal corresp. a $y = f(x) \in Y$. En part, dado que $0 \in \mathfrak{m}_x \subseteq A$, tenemos que $I = \ker(f^*) \subseteq (f^*)^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{m}_y$, i.e., $y = f(x) \in V(I)$.
Así, $\operatorname{Im}(f) \subseteq V(I)$ ✓ Por otra parte, si $y \in Y$ y $\mathfrak{m}_y \subseteq B$ es el ideal maximal corresp, entonces $f^{-1}(y)$ corresponde a ideales maximales $\mathfrak{m} \subseteq A$ tal que $f^*(\mathfrak{m}_y) \subseteq \mathfrak{m}$. Luego, $y \notin \operatorname{Im}(f) \iff \langle f^*(\mathfrak{m}_y) \rangle = A$. Por ende, para probar que $V(I) \subseteq \operatorname{Im}(f)$ consideramos $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_y \subseteq B$ ideal maximal tq $I \subseteq \mathfrak{m}$ y suponemos por contradicción que $\langle f^*(\mathfrak{m}) \rangle = A$:
Sean $a_1, \dots, a_m \in A$ generadores de A como B-módulo. Entonces, $\langle f^*(\mathfrak{m}) \rangle = A$ implica que existen $b_{ij} \in \mathfrak{m}$ tq $a_i = \sum_{j=1}^{m} f^*(b_{ij}) a_j$ en A. Matricialmente:

$$(I_m - f^*(b_{ij}))\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \det(I_m - f^*(b_{ij})) = 0 \text{ en } A \text{ y, luego, } 1_A \in f^*(\mathfrak{m}).$$

$\Rightarrow (f^*)^{-1}(1_A) = 1_B \subseteq \mathfrak{m} + I$, y dado que $I \subseteq \mathfrak{m}$, obtenemos $\langle 1_B \rangle = B = \mathfrak{m}$, contradicción! ■

Ejemplo: El blow-up $\varepsilon: Bl_p(\mathbb{A}^n) \to \mathbb{A}^n$ no es finito (pues $E = \varepsilon^{-1}(p) \cong \mathbb{P}^{n-1}$ de cardinal infinito)

Def: Sea $X \subsetneq \mathbb{P}^n$ un cerrado y sea $p \in \mathbb{P}^n$ tal que $p \notin X$. Dado un hiperplano $H \cong \mathbb{P}^{n-1}$ tal que $p \notin H$, definimos la <u>proyección de p a H</u> como el morfismo $\pi_p : X \to H \cong \mathbb{P}^{n-1}$ que asocia a cada $x \in X$ el punto $\pi_p(x) \in H$ obtenido como la intersección de la recta $L_{p,x} \cong \mathbb{P}^1$ que pasa por p y x con el hiperplano H, i.e., $L_{p,x} \cap H = \{\pi_p(x)\}$.

Obs: 

Siempre podemos escoger coordenadas de $\mathbb{P}^n$ de tal suerte que $p = [1,0,\dots,0] \in \mathbb{P}^n$ y $H = \{x_0 = 0\}$.

En tal caso, $\pi_p([x_0,\dots,x_n]) = [0,x_1,\dots,x_n]$. En part, $\pi_p(X) \subseteq \mathbb{P}^{n-1}$ no depende de H (módulo isomorfismo).

Prop: Sea $X \subsetneq \mathbb{P}^n$ un cerrado y sea $p \in \mathbb{P}^n$ tal que $p \notin X$. Entonces, dado un hiperplano $H \cong \mathbb{P}^{n-1}$ tal que $p \notin H$, la proyección $\pi_p : X \to H$ es un morfismo finito.

Dem: Podemos suponer que $X = V(f)$ es una hipersuperficie (en general, X será un cerrado dentro de una hipersuperficie) definida por $f \in k[x_0,\dots,x_n]$ homogéneo de grado d. Además, podemos suponer que $p = [1,0,\dots,0]$ y $H = \{x_0 = 0\}$. Así, dado que $f(p) \neq 0$ entonces f es de la forma $f = x_0^d + \sum_{i=1}^{d} g_i(x_1,\dots,x_n)x_0^{d-i}$. En part, si nos restringimos al abierto afín $\mathcal{U}_n = \{x_n \neq 0\} \cong \mathbb{A}^n$ con coordenadas $y_0,\dots,y_{n-1}$, donde $y_i = \frac{x_i}{x_n}$, entonces $\pi^{-1}(H \cap \mathcal{U}_n) = X \cap \mathcal{U}_n$ y $\pi_p|_{\mathcal{U}_n} : X \cap \mathcal{U}_n \to H \cap \mathcal{U}_n$, $(y_0,\dots,y_{n-1}) \mapsto (0,y_1,\dots,y_{n-1})$.
Por otra parte, $\mathcal{O}(X \cap \mathcal{U}_n)$ es entero sobre $\mathcal{O}(H \cap \mathcal{U}_n) \cong k[y_1,\dots,y_{n-1}]$ pues

$$y_0^d + \sum_{i=1}^{d} a_i y_0^{d-i} = 0 \quad , \text{ con } a_i = g_i(y_1,\dots,y_{n-1},1) \in \mathcal{O}(H \cap \mathcal{U}_n),$$

implica que y_0 es entero sobre $\mathcal{O}(H \cap \mathcal{U}_n)$ ✓ El mismo argumento, reemplazando $\mathcal{U}_n$ por $\mathcal{U}_i$ con $i = 1,\dots,n$, nos permite concluir que $\pi_p : X \to H$ es finito. ■

Como consecuencia, obtenemos el siguiente resultado de Emmy Noether (1926):

<u>**Teorema**</u> (Normalización de Noether): Sea X una variedad algebraica afín. Entonces, existe un morfismo finito sobreyectivo $f : X \to \mathbb{A}^d$, para cierto $d \in \mathbb{N}$.

Dem: Sup. que $X \subseteq \mathbb{A}^n$. Si $X = \mathbb{A}^n$ OK ✓ Sup. que $X \subsetneq \mathbb{A}^n \cong \mathcal{U}_0 = \{x_0 \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^n$ y consideremos la clausura $\overline{X} \subseteq \mathbb{P}^n$ de X. En part, $X \cong \overline{X} \cap \mathcal{U}_0$. Luego, si escogemos $p \notin \mathcal{U}_0$ tal que $p \notin \overline{X}$ y $H \cong \mathbb{P}^{n-1}$ un hiperplano tal que $p \notin H$, entonces la proyección $\pi_p : \overline{X} \to \mathbb{P}^{n-1} \cong H$ es un morfismo finito que se restringe a $\pi_p|_X : X \to \mathbb{A}^{n-1}$ que también es un morfismo finito. Si $\pi_p|_X$ es sobreyectivo estamos OK, sino continuamos proyectando hasta obtener $X \to \mathbb{A}^d$ finito y sobreyectivo. ■

En lo que sigue, usaremos este resultado para comparar las diferentes nociones de dimensión. Para ello, necesitamos el siguiente resultado:

<u>**Lema**</u> (Cohen-Seidenberg): Sea $f : X \to Y$ un morfismo finito sobreyectivo entre variedades algebraicas. Entonces,

① Para todo $Y' \subseteq Y$ cerrado irreducible, existe $X' \subseteq X$ cerrado irreducible tq $f(X') = Y'$.

② Si $X', X'' \subseteq X$ son cerrados irreducibles tq $f(X') = f(X'')$, entonces X' y X'' <u>no</u> son comparables (i.e, $X' \not\subseteq X''$ y $X'' \not\subseteq X'$).

Dem: Para probar ① escribimos $f^{-1}(Y') = X_1 \cup \dots \cup X_m$ con X_i irreducible. Luego, aplicando f, obtenemos $Y' = f(X_1) \cup \dots \cup f(X_m) \underset{Y' \text{ irred}}{\Longrightarrow} Y' = f(X_i)$ para cierto $X_i =: X'$ ✓

Para probar ②, suponemos por contradicción que $X' \subseteq X''$ y escogemos $x \in X'' \setminus X'$.

Sea $\mathcal{U}$ una vecindad afín del punto x en X''. Luego, $X'\cap\mathcal{U}$ es un cerrado propio de la variedad afín $X''\cap\mathcal{U}$, y por ende existe $u\in\mathcal{O}(X''\cap\mathcal{U})$ tal que $u(x)\neq 0$ pero $u|_{X'\cap\mathcal{U}}=0$. Sea $V=f(\mathcal{U})$ abierto (afín), pues f morfismo cerrado. Entonces, $f|_{\mathcal{U}}:\mathcal{U}\to V$ morfismo finito y $f(X'\cap\mathcal{U})=f(X''\cap\mathcal{U})=f(X')\cap V$. En part, $u\in\mathcal{O}(X''\cap\mathcal{U})$ es entero sobre $\mathcal{O}(W)$, con $W=f(X''\cap\mathcal{U})$, y por ende hay una relación

$$(*)\quad u^d+f^*(v_1)u^{d-1}+\dots+f^*(v_d)=0 \quad\text{en } \mathcal{O}(X''\cap\mathcal{U}),$$

donde $v_i\in\mathcal{O}(W)$ y $d\in\mathbb{N}$ minimal. Dado que $u\neq 0$ en $X''\cap\mathcal{U}$ y d es minimal, tenemos que $f^*(v_d)=v_d\circ f\neq 0$. Sin embargo, u se anula en $X'\cap\mathcal{U}$ y luego $(*)$ implica que $f^*(v_d)|_{X'\cap\mathcal{U}}=0 \Rightarrow f^*(v_d)=0$ pues $f(X')=f(X'')$, una contradicción. ∎

Prop: Sea $f:X\to Y$ un morfismo finito sobreyectivo entre variedades algebraicas <u>irreducibles</u>. Entonces: ① $\dim(X)=\dim(Y)$.
② $\dim_K(X)=\dim_K(Y)$.

Dem: En ① podemos sup. que X e Y son afines. Luego, $\mathcal{O}(X)$ es entero sobre $\mathcal{O}(Y)$ vía $f^*:\mathcal{O}(Y)\to\mathcal{O}(X)$. $\Rightarrow$ $k(X)$ es una extensión algebraica de $k(Y)$. En particular, $\operatorname{tr\,deg}_k k(X)=\operatorname{tr\,deg}_k k(Y)$, ie, $\dim(X)=\dim(Y)$ ✓

En ② consideramos $X_0\subsetneq\dots\subsetneq X_d$ cerrados irreducibles en X, y obtenemos una cadena $Y_0\subseteq\dots\subseteq Y_d$ en Y, donde $Y_i:=f(X_i)$ irreducible y cerrado (pues f finito). Lema $\Rightarrow Y_i\neq Y_{i+1}$ y luego $\dim_K(Y)\geq\dim_K(X)$. Por otro lado, si consideramos en Y la cadena $Y_0\subsetneq\dots\subsetneq Y_\ell$ de cerrados irreducibles, entonces el Lema anterior permite encontrar $X_0\subsetneq\dots\subsetneq X_\ell$ cadena de cerrados irred en X, ie, $\dim_K(X)\geq\dim_K(Y)$. ∎

[**Teorema**: Sea X una variedad algebraica irreducible. Entonces, $\dim(X)=\dim_K(X)$.]

Dem: Podemos suponer que $X\subseteq\mathbb{A}^n$ es afín y usar inducción en $n\in\mathbb{N}$, siendo el resultado cierto para $n=0$:

$\boxed{\text{Caso 1}}$ $X\subsetneq\mathbb{A}^n \underset{\text{Noether}}{\Rightarrow} \exists f:X\to\mathbb{A}^m$ finito sobreyectivo, con $m<n$. Luego,

$$\dim_K(X)\underset{\text{Prop.}}{=}\dim_K(\mathbb{A}^m)\underset{\text{Ind.}}{=}\dim(\mathbb{A}^m)\underset{\text{Prop.}}{=}\dim(X) \quad ✓$$

$\boxed{\text{Caso 2}}$ $X=\mathbb{A}^n$: sabemos que $\dim(\mathbb{A}^n)=n$ y que $\dim_K(\mathbb{A}^n)\geq n$. Consideremos $X_0\subsetneq X_1\subsetneq\dots\subsetneq X_d=\mathbb{A}^n$ cadena de cerrados irreducibles, entonces $\dim_K(X_{d-1})\geq d-1$. Dado que $X_{d-1}\subsetneq\mathbb{A}^n$, $\exists f:X_{d-1}\to\mathbb{A}^m$ finito sobreyectivo, con $m<n$. Luego, $d-1\leq\dim_K(X_{d-1})\underset{\text{Prop}}{=}\dim_K(\mathbb{A}^m)\underset{\text{Ind.}}{=}m\leq n-1 \Rightarrow d\leq n$, y así $\dim_K(\mathbb{A}^n)=n$. ∎

(!) <u>Obs importante</u>: En Álgebra conmutativa, el <u>Teorema del Ideal principal de Krull</u> (o también "Krull Hauptidealsatz") establece que "En un anillo noetheriano, todo ideal principal $I=\langle f\rangle$ verifica que cada ideal primo minimal sobre I tiene a lo más altura 1". Geométricamente:

[**Teorema** (Krull, 1928): Sea X una variedad algebraica afín e irreducible. Sea $f\in\mathcal{O}(X)$ no-nula y no-invertible. Entonces, toda componente irreducible de $V(f)\subseteq X$ es de dimensión $\dim(X)-1$.]

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $f\in k[X_0,\dots,X_n]$ polinomio homogéneo no-constante, y sea $X=V(f)\subseteq\mathbb{P}^n$ la hipersuperficie definida por f. Probar que $\dim(X)=n-1$.

<u>Terminología</u>: Sea X una variedad algebraica (irreducible) de $\dim(X)=n$. Decimos que X es una <u>curva</u> (resp. <u>superficie</u>, resp. <u>threefold</u>, resp. <u>fourfold</u>, etc) si $n=1$ (resp. $n=2$, resp. $n=3$, resp. $n=4$, etc). También se habla de "curva algebraica", "superficie algebraica", "3-fold algebraico", etc.

§16. Dimensión de morfismos y aplicaciones

En esta sección discutiremos algunas propiedades y aplicaciones importantes relacionadas al concepto de dimensión. Comenzamos por una extensión del Teorema de Krull:

Teorema: Sea $X \subseteq \mathbb{P}^N$ variedad quasi-proyectiva irreducible de $\dim(X) = n$, y sean $f_1, \dots, f_r \in k[X_0, \dots, X_N]$ homogéneos no-constantes. Sea $Y = V(f_1, \dots, f_r) \cap X$, entonces cada componente irreducible de Y es de dimensión $\geqslant n-r$.

Dem: Sea Z una componente irred. de Y, y veamos por inducción en r que $\dim(Z) \geqslant n-r$. El caso $r=1$ OK por Teo. de Krull ✓ Sup. que $r \geqslant 2$ y notar que $Z \subseteq V(f_1, \dots, f_{r-1}) \cap X$, por lo que $Z \subseteq W$ para cierta componente irred. W de $V(f_1, \dots, f_{r-1}) \cap X$.
Por hipótesis inductiva, $\dim(W) \geqslant n-r+1$. En part, si f_r se anula en W (ie, $f_r|_W \equiv 0$) $\Rightarrow \dim(Y) \geqslant n-r+1 \geqslant n-r$ ✓ Luego, podemos sup. que $f_r \not\equiv 0$ en W.
Sea $x \in Z$ y sea $\mathcal{U}$ una vecindad abierta afín de x en W. Entonces, $\dim(Z) = \dim(Z \cap \mathcal{U})$ y $\dim(W) = \dim(\mathcal{U})$. Sea $g_r := f_r|_{\mathcal{U}} \not\equiv 0$, entonces $Z \cap \mathcal{U}$ es una comp. irred. de $V(g_r)$ $\underset{\text{Krull}}{\Rightarrow} \dim(Z \cap \mathcal{U}) = \dim(\mathcal{U}) - 1 \geqslant n-r$ y luego $\dim(Z) \geqslant n-r$. ■

⚠ En general, la desigualdad $\dim(Y) \geqslant n-r$ puede ser estricta. Por ejemplo, la cúbica torcida (ver §11, pág 39) $C = \nu_3(\mathbb{P}^1) \subseteq \mathbb{P}^3$ está dada por 3 ecuaciones, y $\dim(C) = 1 > 3-3 = 0$.

Def: Sea X variedad alg. de dimensión pura n, y sea $Y \subseteq X$ subvariedad cerrada. La codimensión de Y en X es $\operatorname{codim}_X(Y) = n - \dim(Y)$. En part, decimos que una variedad (quasi-)proyectiva de dimensión n en $\mathbb{P}^N$ es una intersección completa si puede ser definida por $c = N-n$ ecuaciones.

Obs: Una conjetura de Hartshorne predice que toda variedad proyectiva "suave" $X \subseteq \mathbb{P}^N$ de dimensión n tal que $3n > 2N$ es una intersección completa (Abierta incluso si $N = n+2$)!

Ejemplos: Sean X e Y variedades algebraicas irreducibles de $\dim(X) = n$ y $\dim(Y) = m$.

① $\dim(X \times Y) = n+m$. En efecto, podemos suponer X e Y afines y luego existen $f: X \twoheadrightarrow \mathbb{A}^n$ y $g: Y \to \mathbb{A}^m$ sobreyectivos finitos (Noether) $\Rightarrow f \times g : X \times Y \twoheadrightarrow \mathbb{A}^{n+m}$ sobreyectivo finito ✓

② $\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $X = V(I) \subseteq \mathbb{P}^n$ variedad proyectiva, y sea $C(X) := V(I) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ el cono afín de X (ver §11, pág 35). Probar que $\dim(C(X)) = \dim(X) + 1$.
[Indicación: Sea $\mathcal{U}_i = \{x_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^n$, entonces $C(X) \cap \pi^{-1}(\mathcal{U}_i) \cong (X \cap \mathcal{U}_i) \times \mathbb{A}^1$]

③ Sup. que $X, Y \subseteq \mathbb{A}^N$ son afines y que $X \cap Y \neq \emptyset$. Entonces, toda componente irreducible de $X \cap Y$ es de dimensión $\geqslant \dim(X) + \dim(Y) - N = n+m-N$. En particular,

$$\operatorname{codim}(X \cap Y) \leq \operatorname{codim}(X) + \operatorname{codim}(Y).$$

En efecto, $X \cap Y \cong (X \times Y) \cap \Delta_{\mathbb{A}^N}$ en $\mathbb{A}^N \times \mathbb{A}^N$ está dado por las N ecuaciones $x_i = y_i$ en $X \times Y$. Luego, por el Teorema anterior, la dimensión de cada comp. irred. de $X \cap Y$ es $\geqslant \dim(X \times Y) - N = n+m-N$ ✓

④ Sup. que $X, Y \subseteq \mathbb{P}^N$ son proyectivos y que $\dim(X) + \dim(Y) \geqslant N$. Entonces, $X \cap Y \neq \emptyset$.
En efecto, los conos afines $C(X), C(Y) \subseteq \mathbb{A}^{N+1}$ son de dimensión $n+1$ y $m+1$, resp. Además, $C(X) \cap C(Y) \neq \emptyset$ pues $0 \in C(X) \cap C(Y)$. Así, ③ implica que cada componente irred. de $C(X) \cap C(Y)$ es de dimensión $\geqslant (n+1) + (m+1) - (N+1) = n+m-N+1 \geqslant 1$ ✓

Recuerdo: Sea $f: X \to Y$ morfismo regular entre var. alg. y sea $y \in Y$. Entonces, la fibra $f^{-1}(y) = \{x \in X \text{ tq } f(x) = y\}$ es un cerrado (Zariski) de X, ie, una subvar. cerrada de X.

Obs: Usando "productos fibrados" se puede definir la "fibra esquemática" $f^{-1}(y)$ (ver §8). La "fibra conjuntista" que consideraremos aquí es $f^{-1}(y)_{red}$.

Teorema: Sean X e Y variedades algebraicas irreducibles de $\dim(X) = n$ y $\dim(Y) = m$. Entonces, para todo $f : X \twoheadrightarrow Y$ morfismo regular sobreyectivo se cumple:

① Para todo $y \in Y$, toda componente irreducible de $f^{-1}(y)$ es de dimensión $\geq n - m$.

② Existe $V \subseteq Y$ abierto denso tal que $f^{-1}(y)$ es de dimensión pura $n - m$ para todo $y \in V$.

③ Para todo $r \in \mathbb{N}$, el conjunto $X_r := \{x \in X$ tal que $\dim_x(f^{-1}(f(x))) \geq r\}$ es cerrado en X, ie, la función $\delta : X \to \mathbb{N}$, $x \mapsto \dim_x(f^{-1}(f(x)))$ es semi-continua superior.

Aquí, para $Z \subseteq X$ cerrado, $\dim_x(Z) := \max\limits_{x \in Z_i} \{\dim(Z_i)\}$ con $Z = Z_1 \cup \ldots \cup Z_s$ comp. irred.

Dem: En ① podemos sup. Y afín y luego, por Teo. de Noether, existe $g : Y \twoheadrightarrow \mathbb{A}^m$ finito y sobreyectivo. Sea $u : X \overset{f}{\twoheadrightarrow} Y \overset{g}{\twoheadrightarrow} \mathbb{A}^m$ la composición y sea $p = g(y) \in \mathbb{A}^m$. Entonces, $g^{-1}(p) = \{y, z_1, \ldots, z_N\}$ conj. finito $\Rightarrow u^{-1}(p) = f^{-1}(y) \sqcup f^{-1}(z_1) \sqcup \ldots \sqcup f^{-1}(z_m)$ unión disjunta de cerrados de X. En part, las comp. irred. de $f^{-1}(y)$ son comp. irred. de $u^{-1}(p)$.
Como $p = (p_1, \ldots, p_m) \in \mathbb{A}^m$ está definido por las ecuaciones $x_i - p_i = 0$, tenemos que $u^{-1}(p)$ está definido (en un abierto afín) por las m ecuaciones $x_i \circ u - p_i = 0$ en X.
$\Rightarrow$ Toda comp. irred de $u^{-1}(p)$ es de dimensión $\geq \dim(X) - m = n - m$ ✓
En ② podemos sup. X e Y afines. Considerando $f^* : k(Y) \hookrightarrow k(X)$ observamos que $k(X)$ tiene grado de trascendencia $n-m$ sobre $k(Y)$. Sean $u_1, \ldots, u_{n-m} \in k(X)$ alg. indep. sobre $k(Y)$ y sea $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto denso afín tq $u_1, \ldots, u_{n-m} \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$ regulares. Completamos con $u_{n-m+1}, \ldots, u_N$ para generar $\mathcal{O}(\mathcal{U})$ (y así $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{A}^N$) y luego (las restricciones de) los $u_1, \ldots, u_N$ generan $\mathcal{O}(f^{-1}(y) \cap \mathcal{U})$. Restringiéndose a comp. irred. si fuese necesario, podemos sup. que $f^{-1}(y)$ es irreducible y luego $k(f^{-1}(y) \cap \mathcal{U})$ es un cuerpo. Veamos que los $u_{n-m+1}, \ldots, u_N$ son algebraicamente dependientes en $k(f^{-1}(y) \cap \mathcal{U})$ sobre k a restringirnos a cierto $V \subseteq Y$ abierto denso (y luego, $\dim(f^{-1}(y) \cap \mathcal{U}) = \dim(f^{-1}(y)) \leq n - m$ ✓):
Para $i = n-m+1, \ldots, N$ sabemos que hay una relación polinomial

$$F_i(u_i, u_1, \ldots, u_{n-m}) = 0 \text{ en } k(X), \text{ con } F_i \in k(Y)[T_1, \ldots, T_{n-m+1}].$$

Además, en la fibra $f^{-1}(y)$ los coeficientes de F_i son constantes (cf. §15, pág 50). Luego, si nos restringimos al abierto denso $V \subseteq Y$ donde los denominadores y numeradores de los coeficientes de F_i no se anulan, obtenemos que si $y \in V$ entonces $u_i|_{f^{-1}(y)}$ es alg. dependiente de $u_1|_{f^{-1}(y)}, \ldots, u_{n-m}|_{f^{-1}(y)}$ ✓
Finalmente, probemos ③ por inducción en $\dim(X)$: Sea $r \in \mathbb{N}$. Si $r \leq n - m$ entonces (por ①) $X_r = X$ cerrado ✓. Por ②, existe $Z \subsetneq X$ cerrado propio tq $X_r \subseteq Z$ $\forall r > n-m$. Luego, $g := f|_Z : Z \twoheadrightarrow W$ sobreyectivo sobre $W = f(Z) \subseteq Y$, y $X_r = Z_r$ si $r > n-m$. Como $\dim(Z) < \dim(X)$, tenemos por inducción que $X_r \subseteq Z$ cerrado $\Rightarrow X_r \subseteq X$ cerrado ✓ ■

Corolario (muy útil): Sea $f : X \to Y$ un morfismo regular sobreyectivo entre variedades algebraicas irreducibles. Si f es un morfismo cerrado (eg. X proyectiva), entonces la función $Y \to \mathbb{N}$, $y \mapsto \dim(f^{-1}(y))$ es semi-continua superior, ie, para todo $r \in \mathbb{N}$ el conjunto

$$Y_r = \{y \in Y \text{ tal que } \dim(f^{-1}(y)) \geq r\}$$

es cerrado en Y.

Dem: Por definición, $Y_r = f(X_r)$. Como $X_r \subseteq X$ cerrado y f morfismo cerrado, $Y_r \subseteq Y$ cerrado. ■

⚠ Obs: $f : \mathbb{A}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{A}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x, (xy-1)y, (xy-1)z)$ es sobreyectivo, pero no cerrado. El conjunto $\{y \in \mathbb{A}^3$ tq $\dim(f^{-1}(y)) \geq 1\}$ no es cerrado [Ejercicio].

Terminología: Dado $f : X \twoheadrightarrow Y$ sobreyectivo entre var. alg. irreducibles. La dimensión relativa de f en $y \in Y$ es $\dim(f^{-1}(y))$. Si $\dim(f^{-1}(y)) = d$ para todo $y \in Y$. Decimos que f es de dimensión relativa d, y escribimos $\dim(f) = \dim(X/Y) = d$.

Teorema (Criterio de Irreducibilidad): Sea $f: X \to Y$ morfismo regular sobreyectivo y cerrado entre variedades algebraicas. Supongamos que Y es irreducible y que todas las fibras de f son irreducibles de misma dimensión $d \in \mathbb{N}$. Entonces, X es irreducible y $\dim(X) = \dim(Y) + d$.

Dem: Sean $X = X_1 \cup \ldots \cup X_r$ comp. irred. Para $y \in Y$, sea $d_i(y) := \dim(f_i^{-1}(y))$ donde $f_i = f|_{X_i}$. Sabemos que $d = \max_{i=1,\ldots,r}\{d_i(y)\}$ $\forall y \in Y$ y luego $Y = \bigcup_{i=1}^{r} \{y \in Y \text{ tq } d_i(y) \geq d\}$ unión de cerrados $\Rightarrow \exists i$ tal que $d_i(y) = d$ $\forall y \in Y$. Por otro lado, $f_i^{-1}(y)$ está contenida en el cerrado irreducible $f^{-1}(y)$. Como $\dim(f^{-1}(y)) = \dim(f_i^{-1}(y))$, concluimos que $f_i^{-1}(y) = f^{-1}(y)$ $\forall y \in Y$. En part, $X = \bigcup_{y \in Y} f^{-1}(y) = \bigcup_{y\in Y} f_i^{-1}(y) = X_i$ es irreducible ✓ $\Rightarrow d = \dim(X) - \dim(Y)$. ■

Ejemplos y aplicaciones:

① Sea X var. proyectiva irreducible y $f: X \to C$ morfismo no-constante, donde C es una curva algebraica. Entonces, $X_t := f^{-1}(t)$ es una hipersuperficie (ie, $\dim(X_t) = \dim(X) - 1$) para todo $t \in C$.

② Variedades abelianas: Sea G un grupo algebraico (ie, una var. alg. que es un grupo y donde la mult. e inversión son morfismos regulares). Supongamos que G es irreducible y proyectivo, entonces G es un grupo abeliano (decimos que es una variedad abeliana).

En efecto, sea $f: G \times G \to G$, $(g,h) \mapsto ghg^{-1}$ y considerar $\Gamma_f = \{(g, h, ghg^{-1}), g, h \in G\}$ grafo de f en $G \times G \times G$. Queremos probar que $h = ghg^{-1}$, ie, $pr_{23}(\Gamma_f) = \Delta_G \subseteq G \times G$ es la diagonal. Notar que, si $g = e$, tenemos $G \cong \Delta_G \subseteq pr_{23}(\Gamma_f)$. Veamos que coinciden: Como G es proyectivo irred, $G \times G \cong \Gamma_f$ y $pr_{23}(\Gamma_f)$ también. Luego, si consideramos $pr_2: pr_{23}(\Gamma_f) \to G$, $(h, ghg^{-1}) \mapsto ghg^{-1}$ tenemos que $pr_2^{-1}(e) = \{(e,e)\}$ es de dimensión 0. Por semi-continuidad superior, la "fibra general" $pr_2^{-1}(y)$ tiene dimensión 0 y luego $\dim(pr_{23}(\Gamma_f)) = \dim(G) + 0$ $\Rightarrow \dim(\Delta_G) = \dim(pr_{23}(\Gamma_f)) \Rightarrow pr_{23}(\Gamma_f) = \Delta_G$ ✓

Obs: Una curva elíptica es una variedad abeliana de dimensión 1. Además, si $k = \mathbb{C}$, toda variedad abeliana es de la forma $A = \mathbb{C}^g/\Lambda$, donde $\Lambda \cong \mathbb{Z}^{2g}$ reticulado.

③ Blow-up: Sean $W \subseteq V$ k-ev y sean $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^n$ y $\Lambda = \mathbb{P}(W) \cong \mathbb{P}^{k-1}$ subesp. lineal. Dadas ecuaciones lineales $\{f_0 = \ldots = f_{n-k} = 0\}$ de W en V, la función regular

$$f: \mathcal{U} \to \mathbb{P}^{n-k}, \quad x \mapsto [f_0(x), \ldots, f_{n-k}(x)] \text{ está def. en } \mathcal{U} = \mathbb{P}^n \setminus V(f_0, \ldots, f_{n-k}).$$

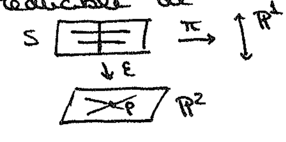
El blow-up $Bl_\Lambda(\mathbb{P}^n)$ es la clausura de Γ_f en $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-k}$. Explícitamente (ver §14):

$$Bl_\Lambda(\mathbb{P}^n) = \{(x,y) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-k} \text{ tal que } y_i f_j(x) = y_j f_i(x) \text{ para todos } i,j = 0, \ldots, n-k\}.$$

Sean $\varepsilon := pr_1: Bl_\Lambda(\mathbb{P}^n) \to \mathbb{P}^n$ (blow-up) y $\pi := pr_2: Bl_\Lambda(\mathbb{P}^n) \to \mathbb{P}^{n-k}$, y sea $E = \varepsilon^{-1}(\Lambda)$ el conjunto excepcional. Entonces, si $x \in \Lambda \Rightarrow \varepsilon^{-1}(x) \cong \mathbb{P}^{n-k}$ irreducible. Luego, $\varepsilon|_E: E \to \Lambda \cong \mathbb{P}^{k-1}$ cumple las hipótesis del criterio de irreducibilidad

$\Rightarrow E$ irreducible y $\dim(E) = (k-1) + (n-k) = n-1 \rightsquigarrow E \subseteq \mathbb{P}^n$ hipersuperficie!

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que $\pi^{-1}(y) \cong \mathbb{P}^k$ para todo $y \in \mathbb{P}^{n-k}$. Deducir que $Bl_\Lambda(\mathbb{P}^n)$ irreducible de dimensión n [Indicación: Considerar $W' \subseteq V$ tal que $V = W \oplus W'$].



Obs: En part, $S = Bl_p(\mathbb{P}^2)$ admite $\pi: S \to \mathbb{P}^1$ tal que $\pi^{-1}(t) \cong \mathbb{P}^1$ $\forall t \in \mathbb{P}^1$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $V = M_{m\times n}(k)$ y consideremos $\mathcal{M} = \mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^{nm-1}$. Sea $\mathcal{M}_r = \{[A] \in \mathcal{M} \text{ tq } rg(A) \leq r\}$. Probar que $\mathcal{M}_r$ es una subvar. cerrada irreducible de $\dim(\mathcal{M}_r) = r(m+n-r) - 1$.

[Indicación: Considerar la "variedad de incidencia" dada por:

$$I = \{(A, \Lambda) \in \mathcal{M} \times Gr(n-r, n) \text{ tal que } \Lambda \subseteq \ker(A)\}.]$$

§17. Espacio tangente de Zariski, variedades suaves y singulares

Sea X una variedad algebraica y $x\in X$ un punto. Recordemos que el tallo $\mathcal{O}_{X,x}$ de gérmenes de funciones regulares en $x\in X$ es una k-álgebra que posee un único ideal maximal

$$\mathfrak{m}_x = \{ f\in \mathcal{O}_{X,x} \text{ tal que } f(x)=0\}$$

ie, $\mathcal{O}_{X,x}$ es un anillo local (ver §3, pág 9). Además, $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x \cong k$.

Def: Un vector tangente en $x\in X$ es una aplicación k-lineal $D:\mathcal{O}_{X,x}\to k$ que cumple la regla de Leibniz: $D(fg)=f(x)D(g)+g(x)D(f)$. Así, el espacio tangente de Zariski en el punto $x\in X$ es el k-ev dado por $T_{X,x} := \{D:\mathcal{O}_{X,x}\to k \text{ vector tangente en } x\in X\}$.

Prop: Hay un isomorfismo de k-evs $T_xX \cong (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$. En particular, T_xX es un k-ev de dimensión finita.

Dem: Sea $D:\mathcal{O}_{X,x}\to k$ vector tangente. Notar que $D(1)=D(1\cdot 1)=D(1)+D(1)=0$.
Además, si consideramos $D|_{\mathfrak{m}_x}:\mathfrak{m}_x\to k$, la regla de Leibniz implica que si $f,g\in\mathfrak{m}_x$ $\Rightarrow D(fg)=0$, ie, $\mathfrak{m}_x^2\subseteq \ker(D|_{\mathfrak{m}_x})$. Luego, podemos considerar la aplicación lineal inducida $\overline{D}:\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2\to k$ en $(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$.

Así, basta verificar que la aplicación lineal $\varphi: T_xX\to(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$, $D\mapsto\overline{D}$ es un isomorfismo: Para la inyectividad notamos que todo $f\in\mathcal{O}_{X,x}$ se escribe como $f=f(x)+f_0$ con $f_0\in\mathfrak{m}_x$. Luego, si $\varphi(D)=\overline{D}=0$ entonces $D(f)=D(f(x))=0$, pues $f(x)\in k$ ✓
Para la sobreyectividad consideramos $\nabla:\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2\to k$ lineal y definimos para $f\in\mathcal{O}_{X,x}$ $D(f):=\nabla([f_0])$, donde $[f_0]$ es la clase de $f_0=f-f(x)\in\mathfrak{m}_x$ en $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$.

$$\Rightarrow 0=\nabla([f_0g_0]) \underset{\text{def}}{=} D(f_0g_0)=\nabla([fg-f(x)g-g(x)f+f(x)g(x)])$$
$$=D(fg)-f(x)D(g)-g(x)D(f) \quad \text{para todos } f,g\in\mathcal{O}_{X,x}$$

ie, $D\in T_{X,x}$. Más aún, $\varphi(D)=\nabla$ por definición ✓
Finalmente, dado que $\mathcal{O}_{X,x}$ es un anillo noetheriano, $\mathfrak{m}_x$ es fin. generado por ciertos $u_1,\dots,u_N\in\mathfrak{m}_x$ y sus imagenes $[u_1],\dots,[u_N]\in\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ son generadoras como $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$-mód ∎

Ejercicio Probar que $T_{(x,y)}(X\times Y)\cong T_xX\oplus T_yY$, con $x\in X$ e $y\in Y$ var. algebraicas.

Importante (Functorialidad): Sea $f:X\to Y$ un morfismo regular entre var. algebraicas y sea $x\in X$. Si escribimos $y=f(x)\in Y$, entonces hay un morfismo de k-álgebras $f^*:\mathcal{O}_{Y,y}\to\mathcal{O}_{X,x}$, $u\mapsto u\circ f$. Luego, obtenemos una aplicación k-lineal

$$d_xf: T_xX\longrightarrow T_yY,\quad D\longmapsto D\circ f^*$$

llamada el diferencial de f en $x\in X$.

Ejemplos: ① Si $X=\mathbb{A}^n$ y $p=(p_1,\dots,p_n)\in\mathbb{A}^n$, entonces $\mathfrak{m}_p=\langle x_1-p_1,\dots,x_n-p_n\rangle$.
Luego, $T_p\mathbb{A}^n\cong k^n$ con base dada por las derivaciones usuales $D_i(f)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$, ie, todo vector tangente en p es de la forma $f\mapsto a_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(p)+\dots+a_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(p)$, con $a_i\in k$.

② Sea $f:\mathbb{A}^n\to\mathbb{A}^m$, $x\mapsto(f_1(x),\dots,f_m(x))$ morfismo regular y $p\in\mathbb{A}^n$, entonces la matriz del diferencial $d_pf: T_p\mathbb{A}^n\cong k^n\to T_{f(p)}\mathbb{A}^m\cong k^m$ respecto a las bases (canónicas) del Ejemplo ① es la matriz jacobiana

$$J_f=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}\in M_{m\times n}(k).$$

Prop: Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad algebraica afín, donde $\mathcal{I}(X) = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$, y sea $x \in X$. Entonces, $T_x X \cong \ker(d_x f)$, donde $f : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$, $x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_m(x))$.

Dem: El isomorfismo $\mathcal{O}(X) \cong \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)/\mathcal{I}(X)$ implica que $\mathcal{O}_{X,x} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,x}/\langle f_1, \ldots, f_m \rangle$, por lo que un vector tangente de X en x es un vector tangente de $\mathbb{A}^n$ en x que se anula en $\langle f_1, \ldots, f_m \rangle$, ie, $T_x X \cong \{ D \in T_x \mathbb{A}^n \cong k^n \text{ tq } D(f_i) = 0 \ \forall i \} = \ker(d_x f)$. ■

Ejemplo: Sea $C = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \text{ tq } y^2 = x^3\}$ con $\mathcal{I}(C) = \langle Y^2 - X^3 \rangle$. Sea $f(X,Y) = Y^2 - X^3$ y $P = (a,b) \in C$. Entonces, $d_P f = (-3X^2 \ \ 2Y)|_{(a,b)} = (-3a^2 \ \ 2b)$ (vector fila). Luego,

$$\dim T_P C = \begin{cases} 1 & \text{si } P \neq (0,0) \\ 2 & \text{si } P = (0,0) \end{cases}$$

Corolario: Sea X una variedad algebraica. Entonces, la función $X \to \mathbb{N}$, $x \mapsto \dim_k T_x X$ es semi-continua superior, ie, para todo $r \in \mathbb{N}$ el conjunto

$$\{x \in X \text{ tal que } \dim_k T_x X \geq r\}$$

es <u>cerrado</u> en X. En part, el conjunto donde $\dim_k T_x X$ es minimal es un <u>abierto</u>.

Dem: La afirmación es local, por lo que podemos sup. que $X \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad afín, donde $\mathcal{I}(X) = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$. La Proposición anterior y el Teorema del rango implican que $\forall x \in X$

$$\dim_k T_x X = n - \operatorname{rg}\left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(x) \right)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \right).$$

Por otra parte, la función $x \mapsto \operatorname{rg}(J_f(x))$ es semi-continua <u>inferior</u>, pues la condición $\operatorname{rg}(J_f(x)) \geq s$ equivale a que existe un sub-determinante $s \times s$ no-nulo (condición <u>abierta</u>). ■

Para determinar el valor minimal de $\dim_k T_x X$ necesitamos los siguientes resultados:

Recuerdo (extensiones separables): Sea K un cuerpo y $K \subseteq L$ una extensión algebraica (ie, $\forall a \in L$ existe $P \in K[X]$ tq $P(a) = 0$ en L). Decimos que $K \subseteq L$ es una <u>extensión separable</u> si para todo $a \in L$ el polinomio minimal $P_a \in K[X]$ <u>no</u> posee raíces múltiples en $\overline{K}$.

Obs: Esto último equivale a que la derivada (formal) $P_a' \in K[X]$ <u>no</u> es idénticamente cero. En part, si $\operatorname{car}(K) = 0$ toda extensión algebraica es separable.

Hechos: ① Sea k alg. cerrado y $k \subseteq K$ extensión generada por finitos elementos. Entonces, K posee una base de trascendencia $B = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq K$ tal que la extensión algebraica $k(B) = k(x_1, \ldots, x_n) \subseteq K$ es separable.

② <u>Teorema del elemento primitivo</u>: Sea $K \subseteq L$ extensión algebraica separable. Entonces, existe $f \in L$ tal que $L = K(f)$.

Prop: Sea X variedad algebraica irreducible de dimensión n. Entonces, X es birracional a una hipersuperficie $V(P) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ definida por un polinomio irreducible $P \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^{n+1})$.

Dem: Podemos suponer X afín. Dado que $\operatorname{tr\,deg}_k k(X) = n$, podemos elegir una base de trascendencia $x_1, \ldots, x_n \in k(X)$ tal que $k(\mathbb{A}^n) \cong k(x_1, \ldots, x_n) \subseteq k(X)$ es una extensión algebraica separable. Luego, el Teo. del elemento primitivo implica que existe $f \in k(X)$ tal que $k(X) = k(\mathbb{A}^n)(f)$. Sea $P \in k(\mathbb{A}^n)[T]$ el polinomio minimal de f.

$\Rightarrow$ Despejando denominadores obtenemos $P(T) = a_0 T^r + a_1 T^{r-1} + \ldots + a_r$, con $a_i \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$. Luego, $k(X) \cong k(\mathbb{A}^n)[T]/\langle P \rangle$, ie, $k(X) \cong k(Z)$ donde $Z = V(P) \subseteq \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1 \cong \mathbb{A}^{n+1}$ ■

Obs: En part, toda curva algebraica irreducible es <u>birracional</u> (pero no necesariamente isomorfa) a una <u>curva plana</u>, ie, una curva C en $\mathbb{A}^2$ (o $\mathbb{P}^2$) irreducible.

Teorema: Sea X una variedad algebraica. Entonces, para todo $x\in X$ se cumple que
$$\dim_x(X) \leq \dim_k T_x X.$$
Más aún, la igualdad es satisfecha en un abierto denso de X.

Dem: Supongamos primero que X es irreducible, y veamos que el valor minimal de la función $x \mapsto \dim_k T_x X$ es $\dim(X) := n$. Dicho valor minimal es un invariante birracional, por lo que podemos suponer $X = V(f) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ hipersuperficie irreducible. En tal caso, tenemos que $\dim T_x X = \dim_k \ker(d_x f) = n+1 - \operatorname{rg}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(x)\right) = n$ excepto si $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0$ $\forall i = 1,\ldots,n+1$. Veamos que esto no puede ocurrir para todo $x\in X$: Consideremos el ideal Jacobiano $J = \langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}\rangle$, y notamos que si $X = V(f) \subseteq V(J)$ entonces $J \subseteq \sqrt{J} \subseteq \langle f\rangle$. En part, f divide $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ para todo $i = 1,\ldots,n+1$. Si $\operatorname{car}(k) = 0$ esto implica que f es constante, mientras que si $\operatorname{car}(k) = p$ esto implica que f es un polinomio en $x_1^p,\ldots,x_{n+1}^p$, ie, $f = \sum a_I X_I^{pI} = \sum b_I^p X_I^{pI} = (\sum b_I X^I)^p = g^p$, lo cual es imposible ($f$ irreducible) ✓

En general, si $X = X_1 \cup \ldots \cup X_m$ comp. irreducibles y $x \in X_1 \cup \ldots \cup X_k$, tenemos que $\dim(X_i) \leq \dim_k T_x X_i \leq \dim T_x X$ y luego $\dim_x(X) \leq \dim T_x X$. Más aún, en cada X_i hay un abierto denso $\mathcal{U}_i \subseteq X_i$ donde $\dim(X_i) = \dim_k T_x X_i$, y luego en el abierto denso $\mathcal{U} := \bigcup_{i=1}^m \mathcal{U}_i$ tenemos $\dim_x(X) = \dim_k T_x X$ para todo $x \in \mathcal{U}$. ■

Def: Sea X una variedad algebraica y $x\in X$. Decimos que x es un punto suave si $\dim_k T_x X = \dim_x(X)$, y en caso contrario (ie, si $\dim_x(X) < \dim_k T_x X$) decimos que x es un punto singular. Denotamos por $X_{reg} \subseteq X$ (resp. X_{sing} o $\operatorname{Sing}(X) \subsetneq X$) al abierto denso (resp. cerrado propio) formado por los puntos suaves (resp. singulares) de X.
Decimos que X es suave (resp. singular) si $X_{sing} = \emptyset$ (resp. $X_{sing} \neq \emptyset$).

Ejemplos:

① Dado que $T_{(x,y)}(X\times Y) \cong T_x X \oplus T_y Y$, tenemos que $(x,y) \in X\times Y$ es suave si y sólo si $x\in X$ e $y \in Y$ son suaves (ie, $(X\times Y)_{sing} = (X_{sing}\times Y) \cup (X \times Y_{sing})$).

② Sea $X = V(f) \subseteq \mathbb{A}^n$ hipersuperficie. Entonces, $X_{sing} \subseteq X \subseteq \mathbb{A}^n$ está dado por las ecuaciones $f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0$ en $\mathbb{A}^n$. En part, notamos que si $f = f_1 \cdots f_r$ es producto de polinomios irreducibles, entonces todo punto en $V(f_i) \cap V(f_j)$ es singular $(i \neq j)$.

③ Los puntos singulares de la hipersuperficie proyectiva $X = V(f) \subseteq \mathbb{P}^n$ están dados por $f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_0}(x) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0$ en $\mathbb{P}^n$. Más aún, si $\operatorname{car}(k)$ no divide $d = \operatorname{gr}(f)$ entonces X_{sing} está dado por $\frac{\partial f}{\partial x_0}(x) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0$ en $\mathbb{P}^n$.

En efecto, sea $x = [x_0,\ldots,x_n] \in X$ y sup. que $x_0 \neq 0$, ie, $x \in \mathcal{U}_0 = \{x_0 \neq 0\} \cong \mathbb{A}^n \subseteq \mathbb{P}^n$.
$\Rightarrow X \cap \mathcal{U}_0$ está definida por $g(x_1,\ldots,x_n) = f(1,x_1,\ldots,x_n)$ y luego $x \in X_{sing}$ si y sólo si $\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0$ $\forall i = 1,\ldots,n$. Por otra parte, como f homogéneo de grado d, la fórmula de Euler: $d\, f(x) = \sum_{i=0}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ (obtenida al derivar $f(\lambda x) = \lambda^d f(x)$ resp. a λ)
$\Rightarrow$ si $f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0$, entonces $\frac{\partial f}{\partial x_0}(x) = 0$ ✓

Similar: si $\operatorname{car}(k)$ no divide d, las ecuaciones $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0$, $i = 0,\ldots,n$ implican $f(x) = 0$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $C_{a,b} := \{[x,y,z] \in \mathbb{P}^2 \text{ tq } y^2 z = x^3 + axz^2 + bz^3\} \subseteq \mathbb{P}^2$ cúbica plana. Determinar los valores de $a,b \in k$ tal que $C_{a,b} \subseteq \mathbb{P}^2$ sea suave.
[Indicación: Considerar los casos $\operatorname{car}(k) = 2$ y $\operatorname{car}(k) = 3$ separadamente.]

④ Criterio Jacobiano: Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad alg. afín tal que $\mathcal{I}(X) = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$. Entonces, $x \in X$ es suave si y sólo si $rg(J_f(x)) = n - \dim_x(X) \underset{\text{def}}{=} \operatorname{codim}_x(X)$, con $J_f(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{i,j}$. En efecto, $\dim_k T_x X = n - rg(J_f(x)) \geq \dim_x(X)$ para todo $x \in X$.

⚠ Obs: ① Del mismo modo, si $X \subseteq \mathbb{P}^n$ proyectiva tal que $\mathcal{I}(X) = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ ideal homogéneo. Entonces $x \in X$ suave $\iff rg(J_f(x)) = n - \dim_x(X)$.

② Sabemos que $n - m \leq \dim_x(X)$ (ver §16, pág 53). Luego, si X es una intersección completa de dimensión $d = n - m$ en $\mathbb{A}^n$ (o $\mathbb{P}^n$). Entonces, $x \in X$ suave $\iff rg(J_f(x)) = m$.

Ejercicio Sea G un grupo algebraico y sea X un espacio homogéneo resp. a G (i.e, X es una var. algebraica dotada de una acción regular $G \times X \to X$ transitiva). Probar que X es suave.

[Indicación: Sea $x_0 \in X_{reg} \neq \emptyset$ y $x \in X$ arbitrario. Probar, usando la acción de G, que existen $x_0 \in \mathcal{U}_0$ y $x \in \mathcal{U}$ vecindades abiertas tal que $\mathcal{U}_0 \cong \mathcal{U}$.]

Obs: En part, G es suave pues es homogéneo resp. a sí mismo. Luego, toda variedad abeliana es suave y los grupos de matrices ($GL_n(k)$, $PGL_n(k)$, $SL_n(k)$, etc) son suaves. Además, $Gr(k, n)$ es suave pues es homogénea resp. a $GL_n(k)$.

Veamos que toda variedad suave es localmente una intersección completa. Para ello:

Recuerdo (anillos regulares): Sea A un anillo local noetheriano, $\mathfrak{m}$ su ideal maximal, y $k = A/\mathfrak{m}$ su cuerpo residual. Entonces, $\dim_{Krull}(A) \leq \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$. (Nakayama).
En part, decimos que $(A, \mathfrak{m})$ es un anillo regular si $\dim_{Krull}(A) = \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$.
Ejemplo principal: Sea $x \in X$ punto suave, entonces $(\mathcal{O}_{X,x}, \mathfrak{m}_x)$ anillo regular!
Teorema (Nagata 1958, Auslander-Buchsbaum 1959): Sea $(A, \mathfrak{m})$ un anillo regular. Entonces, A es un dominio de factorización única (o también, anillo factorial).

Obs: En part, si $x \in X$ es un punto suave de una variedad algebraica. Entonces, $\mathcal{O}_{X,x}$ es un dominio y luego X es "localmente irreducible". Más precisamente, $x \in X$ suave sólo pertenece a una componente irreducible de X.

Ejercicio Sea X una variedad alg. suave. Probar que X irreducible $\iff X$ conexa.

Ejercicio Sea $Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{A}^3 \text{ tq } x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$ y sea $p = (0,0,0)$. Notar que en $\mathcal{O}_{Q,p}$ se cumple $-x^2 = x(-x) = (y+zi)(y-zi)$, con $i^2 = -1$. Probar que x, $y+zi$, $y-zi$ son irreducibles en $\mathcal{O}_{Q,p}$ y deducir que este anillo local no es factorial.

Prop: Sea X variedad algebraica y $x \in X$ punto suave tal que $\dim_x(X) = m$. Entonces, existe una vecindad abierta (afín) $\mathcal{U} \subseteq X$ de x, y un isomorfismo $\varphi: \mathcal{U} \xrightarrow{\sim} V$, donde V es un abierto de una variedad alg afín $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ definida por $V(f_1, \dots, f_{n-m})$ y donde $rg\left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(y)\right)_{i,j}\right) = n - m$ en $y = \varphi(x)$.

Dem: Podemos suponer $X \subseteq \mathbb{A}^n$ afín, donde $\mathcal{I}(X) = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$. Entonces, el criterio Jacobiano implica $rg\left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{i,j}\right) = n - m$. Luego, podemos extraer un subdeterminante $(n-m) \times (n-m)$ de dicho rango. Por ejemplo, sup. que los $f_1, \dots, f_{n-m}$ tienen matriz Jacobiana de rango $n-m$ en $x \in X$, y sea $Y = V(f_1, \dots, f_{n-m})$. Entonces, Y es suave en una vecindad de $x \in X$, $\dim_x(Y) = m$, y contiene a X de la misma dimensión. Dado que X e Y son localmente irreducibles en x, ambas variedades coinciden en una vecindad de x. ∎

Las hipersuperficies en variedades suaves están definidas localmente por 1 ecuación:

Prop: Sea X variedad alg. irreducible e $Y \subseteq X$ subvariedad cerrada de codimensión pura 1, y sea $y \in Y$ tal que $y \in X_{reg}$ es suave en X. Entonces, existe $y \in \mathcal{U} \subseteq X$ vecindad afín y $f : \mathcal{U} \to k$ función regular tal que $\mathcal{I}(\mathcal{U} \cap Y) = \langle f \rangle$.

Dem: Podemos sup. X afín e $Y = V(\mathfrak{p})$ irreducible, con $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}(X)$ ideal primo. Entonces, $\mathfrak{P}_y := \mathfrak{p}\,\mathcal{O}_{X,y} = \{\frac{f}{g}$ tq $f, g \in \mathcal{O}(X)$ con $g(y) \neq 0$ y $f \in \mathfrak{p}\}$ es un ideal primo no-nulo del anillo factorial $\mathcal{O}_{X,y}$. En part, contiene al menos un elemento irreducible f/g.
$\Rightarrow$ El elemento $f \in \mathfrak{p}$ es irreducible también en $\mathcal{O}_{X,y}$, y además $Y \subseteq V(f)$.
El problema es que f podría ser reducible en $\mathcal{O}(X)$: Sean $f_1, \dots, f_r$ generadores del ideal $f\,\mathcal{O}_{X,y} \cap \mathcal{O}(X)$. Entonces (en $\mathcal{O}_{X,y}$), $f_i = f \frac{h_i}{g_i}$ para $g_i, h_i \in \mathcal{O}(X)$ con $g_i(y) \neq 0$.
Sea $g = g_1 \cdots g_r \Rightarrow$ En el abierto $\mathcal{U} = \{x \in X$ tq $g(x) \neq 0\}$ los g_i son invertibles, y luego el ideal primo $f\,\mathcal{O}_{X,y} \cap \mathcal{O}(\mathcal{U})$ de $\mathcal{O}(\mathcal{U})$ está generado por f, ie, $\mathcal{U} \cap V(f)$ es irreducible y contiene $Y \cap \mathcal{U}$ que es de la misma dimensión.
$\Rightarrow Y \cap \mathcal{U} = V(f) \cap \mathcal{U}$ y $\mathcal{I}(\mathcal{U} \cap Y) = \langle f \rangle$. ■

⚠ ¡Atención!: Este resultado es falso en variedades singulares: Considerar el cono $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{A}^3$ tq $z^2 = xy\}$, singular en $p = (0,0,0)$, y $L = \{x = z = 0\} \subseteq X$ recta.

Ejercicio $L \subseteq X$ no está definida sólo por una ecuación en $\mathcal{O}_{X,p}$.

[Indicación: El ideal $I = \langle X, Z \rangle$ de $A = k[X,Y,Z]/\langle Z^2 - XY \rangle$ no es principal, pues se calcula que $\dim_k T_pX = 3$ y $\dim_k T_pL = 1$.]

Corolario: Sea $f : X \dashrightarrow Y$ una aplicación racional, donde X es una variedad alg irreducible suave y donde Y variedad alg. proyectiva. Entonces, el cerrado $Z = X \setminus \mathrm{Dom}(f)$ es de codimensión $\mathrm{codim}_X(Z) \geq 2$. En part, si X es una curva entonces $f : X \to Y$ es regular.

Dem: Localmente podemos escribir $f(x) = [f_0(x), \dots, f_N(x)] \in Y \subseteq \mathbb{P}^N$. Si los f_i se anulan en algún Z de codimensión 1, y consideramos $z \in Z$ y u una ecuación local de Z en z $\Rightarrow f_i = u\,g_i$ en $k(X)$ y luego $[f_0, \dots, f_N] = [g_0, \dots, g_N]$ ✓ ■

Obs importante: Sean X e Y curvas algebraicas proyectivas, suaves e irreducibles. Entonces, $X \underset{bir}{\cong} Y$ son birracionales si y sólo si $X \cong Y$ son isomorfas!

Aplicación (coordenadas locales): Sea $x \in X$ un punto suave y sea $n = \dim_x(X)$.
Decimos que $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{O}_{X,x}$ son coordenadas locales en x si sus imágenes en $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ son linealmente indep. Equivalentemente (por dualidad), si sus diferenciales $d_x u_1, \dots, d_x u_n$ son l.i. en $(T_xX)^* \underset{def}{:=} \Omega^1_{X,x}$ espacio cotangente de $x \in X$.
Más generalmente, si $\mathcal{U}$ es una vecindad de X, decimos que $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$ son parámetros o coordenadas locales en $\mathcal{U}$ si $\mathcal{U} \subseteq X_{reg}$ y las imágenes en $\mathcal{O}_{X,x}$ de los $u_1, \dots, u_n$ son coord. locales $\forall x \in \mathcal{U}$.

Prop: Sean $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$ coord. locales en $\mathcal{U} \subseteq X_{reg}$. Entonces, para todo $m = 1, \dots, n$ la subvariedad $Z_m = \{x \in \mathcal{U}$ tq $u_1(x) = \dots = u_m(x) = 0\}$ es suave de dimensión $\dim(Z_m) = n - m$.

Dem: El espacio tangente de $Z_1 = \{u_1 = 0\}$ es $T_xZ_1 = \ker(d_x u_1)$ de dimensión $n-1$ en $T_xX \Rightarrow Z_1$ es suave en $x \in \mathcal{U}$, pues $\dim_x(Z_1) = n-1$. Más aún, las restricciones de $u_2, \dots, u_n$ a Z_1 son coord. locales en Z_1, y el resultado se obtiene por inducción. ■

Construcción (Blow-up): Sea X una variedad alg. suave e irreducible, con $\dim(X) = n$, y sea $Z \subseteq X$ subvar. cerrada suave e irreducible de $\operatorname{codim}_X(Z) = r$, ie, $\dim(Z) = n - r$. Luego, localmente Z está dada por $V(u_1, \ldots, u_r)$ para ciertas coord. locales $u_1, \ldots, u_n$ en un abierto $\mathcal{U} \subseteq X$.

Entonces, el blow-up de $\mathcal{U}$ a lo largo de $Z \cap \mathcal{U}$ está dado por (ver §14):

$$\widetilde{\mathcal{U}} = \{(x, y) \in \mathcal{U} \times \mathbb{P}^{r-1} \text{ tal que } u_i(x) y_j = u_j(x) y_i \ \forall i,j = 1, \ldots, r\} \subseteq \mathcal{U} \times \mathbb{P}^{r-1},$$

y donde $\varepsilon_{\mathcal{U}} : \widetilde{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}$ (primera proyección) es birracional.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que $\widetilde{\mathcal{U}}$ es suave e irreducible, y que el conjunto excepcional dado por $E_{\mathcal{U}} = \varepsilon_{\mathcal{U}}^{-1}(Z \cap \mathcal{U})$ es suave de $\dim(E_{\mathcal{U}}) = n - 1$.

⚠ Tal como se discutió en el Ejercicio de §14, si $V(v_1, \ldots, v_r)$ son otras ecuaciones locales de Z en $V \subseteq X$ abierto, entonces $\widetilde{\mathcal{U}}|_{\varepsilon_{\mathcal{U}}^{-1}(\mathcal{U} \cap V)} \cong \widetilde{V}|_{\varepsilon_V^{-1}(\mathcal{U} \cap V)}$.

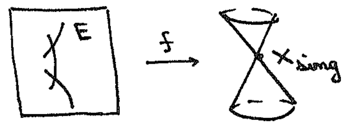
Luego, obtenemos un atlas algebraico que nos permite definir $\varepsilon : Bl_Z(X) \to X$ globalmente. Más aún, $E = \operatorname{Exc}(\varepsilon) := \varepsilon^{-1}(Z)$ hipersuperficie excepcional que cumple:

① $Bl_Z(X) \setminus E \cong X \setminus Z$ y $\varepsilon^{-1}(x) \cong \mathbb{P}^{r-1}$ para todo $x \in Z$.

② Localmente: $E_{\mathcal{U}} \cong (Z \cap \mathcal{U}) \times \mathbb{P}^{r-1}$ (pero no globalmente).

Cultura General (Resultados importantes, sin demostración):

Sea X una variedad algebraica proyectiva irreducible. Una resolución de singularidades de X es un morfismo birracional $f : Y \to X$ tal que:



① Y var. algebraica proyectiva suave e irreducible.

② $f^{-1}(X_{reg}) \xrightarrow{\sim} X_{reg}$ es un isomorfismo.

③ $E = f^{-1}(X_{sing})$ es una hipersuperficie con cruces simples normales (SNC), ie, $E = E_1 \cup \ldots \cup E_r$ componentes irreducibles cumplen que cada E_i es una hipersuperficie suave de Y y cada $y \in E$ está dado localmente por ecuaciones $(u_1, \ldots, u_n)$ tales que $E \underset{loc}{\simeq} \{u_1 \cdots u_k = 0\}$ para cierto $k \leq n$.

Teorema (Hironaka, 1964): Si $\operatorname{car}(k) = 0$, toda variedad proyectiva admite una resolución de singularidades.

Obs: Si $\operatorname{car}(k) = p > 0$, hoy en día sabemos que toda variedad proyectiva de dimensión $\dim(X) \leq 3$ admite una resolución de singularidades (Abhyankar 1956, Cossart-Piltant 2009).

Sean X e Y variedades alg. proyectivas suaves e irreducibles. Sea $f : X \dashrightarrow Y$ aplicación birracional y $\mathcal{U} = \operatorname{Dom}(f) \subseteq X$. Entonces:

① Una factorización débil de f es una factorización de la forma

$$X = X_0 \swarrow^{W_1} \searrow X_1 \swarrow^{W_2} \searrow X_2 \swarrow \cdots \searrow X_{r-1} \swarrow^{W_r} \searrow X_r = Y$$

donde cada $Z_i \to X_i$ y $Z_i \to X_{i-1}$ es un blow-up a lo largo de una subvar suave disjunta $\mathcal{U}$, y cada X_i y W_i es proyectiva suave e irreducible.

② Una factorización fuerte de f es una factorización de la forma
$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X \arrow[rr, dashed] & & Y \end{tikzcd},$$
donde $W \to X$ e $W \to Y$ son series de blow-ups a lo largo de subvar. suaves.

Teorema (Wlodarczyk 1999): Si $\operatorname{car}(k) = 0$, todo f posee una factorización débil.

Teorema (Zariski, 1930): Si $\dim(X) = \dim(Y) = 2$, todo f posee una factorización fuerte.

§18. Morfismos suaves y Teorema de Bertini

Recordemos que si $f: X \to Y$ es un morfismo regular entre variedades algebraicas y si $x \in X$, entonces el morfismo $f^*: \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$, donde $y = f(x)$, induce una aplicación k-lineal

$$d_x f : T_x X \to T_y Y \ , \ D \mapsto D \circ f^* .$$

Además, si $g: Y \to Z$ es otro morfismo regular, entonces $d_x(g \circ f) = (d_y g) \circ (d_x f)$.

Ejemplo: Sea $f: X \to Y$ morfismo regular y $x \in X$. Si denotamos por $X_x := f^{-1}(f(x))$ la fibra de f que pasa por x, entonces la composición $X_x \xhookrightarrow{i} X \xrightarrow{f} Y$ es constante.
$\Rightarrow d_x(f \circ i) = 0 = d_x(f) \circ d_x(i)$, ie, $\operatorname{Im}(d_x i) \subseteq \ker(d_x f : T_x X \to T_y Y)$.
Sin embargo, la inclusión puede ser estricta: Sea $f: \mathbb{A}^3 \to \mathbb{A}^2$, $(x,y,z) \mapsto (z, x^2 z + y^2)$ y sup. que $\operatorname{car}(k) \neq 2$. Entonces, la matriz de $d_{(x,y,z)} f$ es

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2xz & 2y & x^2 \end{pmatrix},$$

por lo que $d_x f$ es sobreyectiva salvo si $xz = y = 0$, en cuyo caso $\operatorname{rg}(d_x f) = 1$.
Por otro lado, la fibra de $(z,t) \in \mathbb{A}^2$ es $V(x^2 z + y^2 - t) \subseteq \mathbb{A}^3$ (~~curva~~ algebraica).
Si $t = 0$ la fibra es singular (dos rectas que se intersectan), salvo si $t = z = 0$, en cuyo caso se tiene $V(y^2) = V(y)$ ("recta doble").

Obs: En part, la función $x \mapsto \dim_k T_x(X_x)$ no es semi-continua superior. El problema es que la fibra conjuntista no percibe multiplicidades: es "mejor" la fibra esquemática!

Prop: Sea $f: X \to Y$ un morfismo regular entre variedades algebraicas. Entonces, la función $X \to \mathbb{N}$, $x \mapsto \dim_k \ker(d_x f)$ es semi-continua superior, ie, para todo $r \in \mathbb{N}$ el conjunto

$$\{x \in X \text{ tal que } \dim_k \ker(d_x f) \geq r\}$$

es cerrado en X.

Dem: La afirmación es local, por lo que podemos suponer que $X \subseteq \mathbb{A}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ son afines, donde $I(X) = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$ y $f: \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ dado por $f = (f_1, \dots, f_m)$. El conjunto en cuestión está dado por la condición $\dim_k \left(\ker\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right) \cap \ker\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)\right) \geq r$, es decir, $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right) \\ \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)\end{pmatrix} \leq n - r$, que es una condición cerrada ✓ ■

Def: Sean X e Y variedades algebraicas suaves e irreducibles. Decimos que un morfismo regular $f: X \to Y$ es suave en $x \in X$ si $d_x f : T_x X \twoheadrightarrow T_{f(x)} Y$ es sobreyectiva, y decimos que f es un morfismo suave si es suave para todo $x \in X$.

⚠ Terminología: Un morfismo étale es un morfismo suave $f: X \to Y$ de dimensión relativa cero, ie, $\dim(f^{-1}(y)) = 0$ para todo $y \in Y$. Es la versión algebraica de un "revestimiento".

Obs: La Proposición anterior implica que el conjunto de puntos $x \in X$ donde $f: X \to Y$ es suave es un abierto (eventualmente vacío). Veremos que si $\operatorname{car}(k) = 0$ es no-vacío.

Ejemplos: ① La composición de morfismos suaves (resp. étale) es suave (resp. étale).

② Las proyecciones $pr_1 : X \times Y \to X$ y $pr_2 : X \times Y \to Y$ son suaves.

③ Sean X e Y curvas suaves e irreducibles. Entonces, $d_x f : T_x X \cong k \to T_{f(x)} Y \cong k$ es una homotecia, ie, $d_x f = f'(x) \mathrm{Id}_k$. Luego, f es suave en $x \in X \iff f'(x) \neq 0$.

④ Sea $f: \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$, $x \mapsto x^d$. Entonces $f'(x) = d x^{d-1}$. En particular, si $\operatorname{car}(k)$ divide d entonces no es suave en ningún punto! Si $\operatorname{car}(k)$ no divide d, f es suave para $x \neq 0$.

⑤ La inclusión $f: \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \hookrightarrow \mathbb{A}^1$ es étale, pero no es finito (la imagen no es cerrada).

Prop: Sean X e Y variedades alg. suaves e irreducibles, y sea $f: X \to Y$ morfismo suave. Entonces:

① Toda fibra no-vacía $f^{-1}(y)$ es de dimensión pura $\dim(X) - \dim(Y)$.

② f es dominante.

③ Si $Z \subseteq Y$ subvar. cerrada suave, entonces $f^{-1}(Z)$ es suave. En part, toda fibra no-vacía es suave (pero no necesariamente irreducible).

Dem: Sea $X_x := f^{-1}(f(x))$ la fibra que pasa por $x \in X$. Luego, para $X_x \overset{i}{\hookrightarrow} X \xrightarrow{f} Y$ se tiene
$\dim_x(X_x) \leq \dim_k(T_x X_x) = \dim_k \ker(d_x i) \leq \dim_k \ker(d_x f) = \dim(X) - \dim(Y)$,
donde la última igualdad se obtiene pues $d_x f$ es sobreyectiva. Por otra parte,
$\dim_x(X_x) \geq \dim(X) - \dim(\overline{f(X)})$ (ver §16, pág 54). Así:
$\dim(X) - \dim(Y) \leq \dim(X) - \dim(\overline{f(X)}) \leq \dim_x(X_x) \leq \dim(X) - \dim(Y) \rightsquigarrow$ ① y ② ✓

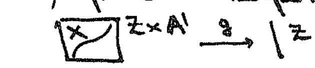
Obs: Más aún, $T_x X_x = \ker(d_x f)$ en este caso.

Para ③ supongamos que $\operatorname{codim}_Y(Z) = r$ y sea $z \in f^{-1}(Z)$. Como $d_z(f|_{f^{-1}(Z)}): T_z f^{-1}(Z) \to T_{f(z)} Z$, el teorema del rango implica que:
$$\dim_k T_z f^{-1}(Z) - \dim_k \ker(d_z f|_{f^{-1}(Z)}) = \dim_k (d_z f)(T_z f^{-1}(Z)) \leq \dim_k T_{f(z)} Z,$$
donde $\dim_k T_{f(z)} Z = \dim(Z)$ (pues Z suave) y $\dim_k \ker(d_z f|_{f^{-1}(Z)}) \leq \dim_k \ker(d_z f)$, con $\dim_k \ker(d_z f) = \dim(X) - \dim(Y)$ (pues f suave) $\Rightarrow \dim_k T_z f^{-1}(Z) \leq \dim(X) - r$ (*)
Sean $u_1, \dots, u_m$ coord. locales en una vecindad afín de $f(z) \in V \subseteq Y$, tal que $Z \cap V$ sea irreducible y $Z \cap V = V(u_1, \dots, u_r)$ (ver §17, pág 59) $\Rightarrow f^{-1}(V) \cap f^{-1}(Z) = V(u_1 \circ f, \dots, u_r \circ f)$ en $f^{-1}(V) \subseteq X$. Luego, $\dim_z(f^{-1}(Z)) \geq \dim(X) - r$ (**). Luego, (*) + (**) $\Rightarrow$ ③ ✓ ■

El teorema de Sard (1942) en geometría diferencial afirma que el conjunto de puntos donde una función $\mathcal{C}^\infty$ entre var. diferenciables $f: M \to N$ no es suave tiene medida nula. En geometría algebraica, dicho resultado se conoce como "suavidad genérica":

Lema: Sup. que $\operatorname{car}(k) = 0$. Sean X e Y variedades alg. irreducibles y $f: X \to Y$ un morfismo regular dominante. Entonces, existen abiertos no-vacíos suaves $V \subseteq Y_{reg}$ y $\mathcal{U} \subseteq X_{reg}$ con $\mathcal{U} \subseteq f^{-1}(V)$, y tales que el morfismo $f|_{\mathcal{U}}: \mathcal{U} \to V$ es suave.

Dem: Podemos suponer que X e Y son afines suaves y considerar $f^*: k(Y) \hookrightarrow k(X)$ extensión de cuerpos. Sea $u_1, \dots, u_{n-m} \in k(X)$ base de trascendencia de $k(X)$ sobre $k(Y)$. Restringiéndose al abierto donde cada u_i es regular, podemos sup. que $u_1, \dots, u_{n-m} \in \mathcal{O}(X)$ y obtenemos $\mathcal{O}(Y) \hookrightarrow \mathcal{O}(Y)[u_1, \dots, u_{n-m}] \hookrightarrow \mathcal{O}(X)$, ie, una factorización $f: X \xrightarrow{g} Y \times \mathbb{A}^{n-m} \xrightarrow{\pi} Y$.
Dado que $f = \pi \circ g$ y π es suave, basta ver que $g: X \to Z$ es suave localmente, donde $Z := Y \times \mathbb{A}^{n-m}$: sabemos que la extensión $g^*: k(Z) \hookrightarrow k(X)$ es finita y algebraica. Luego, como $\operatorname{car}(k) = 0$, es separable y existe $t \in k(X)$ tq $k(X) = k(Z)(t)$ (ver §17, p.57). Así, existe $P \in k(Z)[T]$ tal que $P(t) = 0$, y restringiéndonos al abierto de Z donde los coeficientes de P son regulares obtenemos $P \in \mathcal{O}(Z)[T]$ y así $k(X) \cong \operatorname{Fr}(\mathcal{O}(Z)[T]/\langle P \rangle)$, ie, $X \underset{bir}{\simeq} V(P) \subseteq Z \times \mathbb{A}^1$. Luego, restringiéndonos a un abierto, podemos suponer que $X = V(P) \subseteq Z \times \mathbb{A}^1$ y así $g: X = V(P) \hookrightarrow Z \times \mathbb{A}^1 \xrightarrow{pr_1} Z$.



En $x = (z, t) \in X$, el espacio tangente $T_x X \subseteq T_z Z \oplus k$ está dado por el kernel de $\left(\left(\frac{\partial P}{\partial z_i}(x)\right)_i ; \frac{\partial P}{\partial T}(x) \right)$. Además, la aplicación lineal $d_x g: T_x X \to T_z Z$ está inducida por la proyección $pr_1: T_z Z \oplus k \twoheadrightarrow T_z Z$, $\left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_m}, \frac{\partial}{\partial T}\right) \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_m}\right)$. Luego, g es suave en cualquier $x = (z, t)$ tq $\frac{\partial P}{\partial T}(z, t) \neq 0$, lo cual ocurre en $\operatorname{car}(k) = 0$. ■

Teorema (suavidad genérica): Sup. que $car(k) = 0$. Sean X e Y variedades alg. irreducibles y $f: X \to Y$ un morfismo dominante. Entonces, para todo $r \in \mathbb{N}$ consideramos el conjunto
$$Z_r := \{x \in X \text{ tal que } rg(d_x f) \leq r\} \subseteq X.$$
Entonces, $\dim(\overline{f(Z_r)}) \leq r$. En particular, existe $V \subseteq Y_{reg}$ abierto denso suave tal que $f|_{f^{-1}(V) \cap X_{reg}}: f^{-1}(V) \cap X_{reg} \to V$ es un morfismo suave.

Dem: Sea Y' una componente irred. de $\overline{f(Z_r)}$, y sea X' una componente irred. de $\overline{Z_r} \cap f^{-1}(Y')$ tal que $f_r := f|_{X'}: X' \to Y'$ sea dominante. Por el Lema anterior, existe un punto suave $x \in X'$ tal que $f_r(x)$ es suave en Y' y $d_x f_r : T_x X' \twoheadrightarrow T_{f_r(x)} Y'$ es sobreyectiva.
Dado que lo anterior es una propiedad abierta, podemos suponer que $x \in Z_r$ y luego:
$$\dim(Y') \leq \dim_k T_{f_r(x)} Y' = rg(d_x f_r) \leq rg(d_x f) \leq r \quad ✓$$
En part, $Z = Z_{m-1} \subsetneq Y$ cerrado propio, con $m = \dim(Y)$. Basta considerar $V = Y_{reg} \cap (Y \setminus Z)$. ■

Obs: En part, si X es suave la fibra "general" de $f: X \to Y$ dominante es suave!

Corolario: Sup. que $car(k) = 0$. Sea X una variedad alg. suave e irreducible y sea $f: X \to \mathbb{P}(V)$ un morfismo regular. Si $[H] \in \mathbb{P}(V^*)$ es un hiperplano general, entonces $f^{-1}(H)$ es suave.

Dem: Podemos sup. que $\dim(X) \geq 1$. Consideremos la variedad de incidencia
$$I = \{(x, [H]) \in X \times \mathbb{P}(V^*) \text{ tal que } f(x) \in H\}.$$
Si $(x, [H]) \in I$, escogemos coord. de $V \cong k^{n+1}$ tal que $f(x) = [0, \ldots, 0, 1]$ y $H = \{x_0 = 0\}$.
Sean $f_0, \ldots, f_{m-1}$ funciones regulares en una vecindad $\mathcal{U} \subseteq X$ de x tal que
$$f(x) = [f_0(x), \ldots, f_{m-1}(x), 1] \quad \text{para todo } x \in \mathcal{U}.$$
Además, todo hiperplano en una vecindad $V \subseteq \mathbb{P}(V^*) = G(n-1, n)$ de H tiene ecuación $x_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_m x_m = 0$. Luego, I está definida en una vecindad de $(x, [H])$ por
$$\{P := f_0(x) + a_1 f_1(x) + \ldots + a_{m-1} f_{m-1}(x) + a_m = 0\} \subseteq \mathcal{U} \times \mathbb{A}^n.$$
Como $\frac{\partial P}{\partial a_m} = 1 \neq 0$, tenemos que I es suave (criterio Jacobiano).
Las fibras de la proyección $\pi := pr_1 : I \to X$ son hiperplanos en $\mathbb{P}(V^*)$:
$$\pi^{-1}(x) = \{[H] \in \mathbb{P}(V^*) \text{ tq } f(x) \in H\} \cong \{[a_0, \ldots, a_m] \in \mathbb{P}^n \text{ tq } f_0(x) a_0 + \ldots + f_m(x) a_m = 0\} \cong \mathbb{P}^{n-1}$$
$\Rightarrow I$ es irreducible (de dimensión $\dim(X) + n - 1$) por el Criterio de Irreducibilidad (cf. §16, p.55).
Así, si consideramos $g := pr_2 : I \to \mathbb{P}(V^*)$ y notamos que $g^{-1}([H]) \cong f^{-1}(H)$, tenemos que la fibra general es vacía o bien g es dominante y $f^{-1}(H)$ es suave para H general. ■

Teorema de Bertini: Sea $X \subseteq \mathbb{P}^n$ variedad suave e irreducible de $\dim(X) \geq 1$, y sea H un hiperplano general de $\mathbb{P}^n$. Entonces, la sección hiperplana $X \cap H$ es suave.

Dem: Considerar la inclusión $f: X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$, donde $f^{-1}(H) = X \cap H$. ■

Obs: En general, los "Teoremas tipo Bertini" se refieren a resultados afirmando que cierta propiedad de X (eg. suave, irred, conexa, etc) se preserva al considerar secciones hiperplanas (generales o arbitrarias) $X \cap H$. Por ejemplo (ver Harris, "Algebraic Geometry" o Hartshorne "Algebraic Geometry"):

Teorema: Sea X variedad alg. irreducible, $f: X \to \mathbb{P}^n$ morfismo regular y $H \subseteq \mathbb{P}^n$ un hiperplano general. Si $\dim(\overline{f(X)}) \geq 2$, entonces $f^{-1}(H)$ es irreducible.

§19. Normalización y Teorema principal de Zariski

Recuerdo (clausura integral): Recordemos (ver §15, pág 48) que si $\varphi : A \to B$ es un morfismo de anillos y $x \in B$, entonces x es entero sobre A (resp. a φ) si:
(1) $\exists P = X^n + \sum_{i=1}^{n} \varphi(a_i) X^{n-i}$ tq $P(x) = 0$ $\Leftrightarrow$ (2) $A[x] \subseteq B$ es un A-módulo finitamente gen.

Obs: En part, si $x, y \in B$ son enteros sobre A entonces $x \pm y$, $xy \in B$ también (pues $A[x,y]$ fin. gen.)
El álgebra $\overline{A} = \{b \in B$ tal que b es entero sobre $A\} \subseteq B$ es la clausura integral de A en B.
En part, B es entero sobre A $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\overline{A} = B$.

Def: Decimos que A es integralmente cerrado en B si $\overline{A} = A =: \varphi(A)$, ie, si $b \in B$ es entero sobre A entonces $b = \varphi(a)$ para cierto $a \in A$.

Ejemplo: $\mathbb{Z}$ es integralmente cerrado en $\mathbb{Q}$. En general, si $\mathbb{Q} \subseteq K$ extensión finita (ie, K es un cuerpo de números) entonces $\overline{\mathbb{Z}} := \mathcal{O}_K$ es el anillo de enteros de K.

Ejemplo: Sea $X = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2$ tq $y^2 = x^2 + x^3\}$ cúbica nodal α. Entonces, $t = \frac{y}{x} \in k(X)$ es entero sobre $\mathcal{O}(X)$, pues $t^2 = 1 + x$, pero $t \notin \mathcal{O}(X)$.

Hechos (1) Sea B una A-álgebra y C una B-álgebra. Si $x \in C$ entonces:
a) Si x entero sobre A, entonces x es entero sobre B.
b) Si B es un A-módulo finitamente generado y x entero sobre B, entonces x entero sobre A
(2) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Terminología: Sea A un dominio entero y $Fr(A)$ su cuerpo de fracciones. La clausura integral $\overline{A}$ de A en $Fr(A)$ es llamada la normalización de A. En particular, decimos que A es normal si $A = \overline{A}$ en $Fr(A)$, ie, todo $x \in Fr(A)$ entero sobre A pertenece a A.

Def: Sea X una variedad alg. irreducible. Decimos que $x \in X$ es un punto normal (o que X es normal en $x \in X$) si $\mathcal{O}_{X,x}$ es normal, ie, si $\mathcal{O}_{X,x}$ es integralmente cerrado en $k(X)$.
Decimos que X es una variedad normal si todo $x \in X$ es normal.

Ejemplo: Sea X una variedad afín irreducible. Entonces, X es normal si y sólo si $\mathcal{O}(X)$ es integralmente cerrado en $k(X)$:
En efecto, si $\mathcal{O}(X)$ es integralmente cerrado y $u \in k(X)$ cumple que para ~~todo~~ $x \in X$ existen $a_i \in \mathcal{O}_{X,x}$ con $u^n + a_1 u^{n-1} + \dots + a_n = 0$, entonces si escribimos $a_i = \frac{P_i}{Q_i}$ con $P_i, Q_i \in \mathcal{O}(X)$ y $Q_i(x) \neq 0$ tenemos que $v := u Q_1 \cdots Q_n$ es entero sobre $\mathcal{O}(X)$ y luego $v \in \mathcal{O}(X)$.
$\Rightarrow u \in \mathcal{O}_{X,x}$ pues $Q_i(x) \neq 0$.
Recíprocamente, si X es normal y $u \in k(X)$ cumple que existen $a_i \in \mathcal{O}(X)$ tales que $u^n + a_1 u^{n-1} + \dots + a_n = 0$, entonces dado que $a_i \in \mathcal{O}_{X,x}$ $\forall x \in X$ $\Rightarrow u \in \bigcap_{x \in X} \mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}(X)$ ✓

Obs: En particular, la cúbica nodal no es normal!

Ejemplo: Sea X una variedad alg. irreducible y $x \in X$ un punto suave. Entonces $x \in X$ es normal
En efecto, podemos sup. que X es afín y consideramos $u \in k(X) = Fr(\mathcal{O}(X))$ tal que $u^n + a_1 u^{n-1} + \dots + a_n = 0$ para ciertos $a_i \in \mathcal{O}_{X,x}$. Dado que $\mathcal{O}_{X,x}$ es un anillo factorial, podemos escribir $u = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathcal{O}_{X,x}$ primos relativos.
$\Rightarrow p^n + a_1 p^{n-1} q + \dots + a_n q^n = 0$ por lo que q divide a p^n $\Rightarrow q$ es una unidad, ie, $q(x) \neq 0$ y luego $u \in \mathcal{O}_{X,x}$ ✓

Recordemos (ver §17, pág 60) que si X es suave y $Y \subseteq X$ subvar cerrada de codimensión pura 1 entonces todo punto $y \in Y$ admite una vecindad afín $\mathcal{U} \subseteq X$ tal que $\mathcal{I}(\mathcal{U} \cap Y)$ es un ideal principal (ie, generado por 1 elemento). Si X es normal un poco menos es verdad:

Prop: Sea X una variedad alg. <u>normal</u> y $Y \subseteq X$ subvar cerrada de codimensión pura 1. Entonces, existe un abierto afín $\mathcal{U} \subseteq X$ tal que $\mathcal{U} \cap Y \neq \emptyset$ y $f : \mathcal{U} \to k$ función regular tal que $\mathcal{I}(\mathcal{U} \cap Y) = \langle f \rangle$.

Dem: Notamos que podría ocurrir que $Y \subseteq X_{sing}$, por lo que no podemos simplemente considerar $\mathcal{U} = Y \cap X_{reg}$. Sin embargo, podemos suponer que X afín e $Y = V(\mathfrak{p})$ irreducible, con $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}(X)$ ideal primo. Considerando $f \in \mathfrak{p}$ no-nulo, tenemos que $V(g) \subseteq Y$ y luego $Y = V(g)$.
Nullstellensatz $\Rightarrow \mathcal{I}(Y) = \sqrt{\langle g \rangle}$, ie, $\mathcal{I}(Y)^\ell \subseteq \langle g \rangle \subseteq \mathcal{I}(Y)$ para cierto $\ell \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ minimal.
Veamos que <u>localmente</u> $\ell = 1$: sup. que $\ell \geq 2$ y sean $u_1, \ldots, u_{\ell-1} \in \mathcal{I}(Y)$ tales que $h := u_1 \cdots u_{\ell-1} \notin \langle g \rangle$ pero $ah \in \langle g \rangle$ para todo $a \in \mathcal{I}(Y)$.
$\Rightarrow u := \frac{h}{g} \notin \mathcal{O}(X)$ pero $u\mathcal{I}(Y) \subseteq \mathcal{O}(X)$. Notamos que $u\mathcal{I}(Y) \not\subseteq \mathcal{I}(Y)$, pues sino existirían $p_1, \ldots, p_N \in \mathcal{I}(Y)$ generadores tq $u p_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} p_j$, con $a_{ij} \in \mathcal{O}(X)$, es decir: $(u I_N - a_{ij})_{i,j} \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \end{pmatrix} = 0 \underset{\text{comatriz}}{\rightsquigarrow} \det(u I_N - a_{ij}) = 0 \Rightarrow u \in \mathcal{O}(X)$ pues X es normal!
Luego, existe $f \in \mathcal{I}(Y)$ tq $v := fu \notin \mathcal{I}(Y)$, ie, $Y \not\subseteq V(v) \subseteq X$. Así, en el abierto $\mathcal{U} = \{v \neq 0\}$ (que intersecta Y) tenemos $f^{-1}\mathcal{I}(Y) = v^{-1} u \mathcal{I}(Y) \subseteq \mathcal{O}(\mathcal{U})$, ie, $\mathcal{I}(\mathcal{U} \cap Y) = \langle f \rangle$ ■

Teorema: Sea X una variedad alg. <u>normal</u>. Entonces, $\operatorname{codim}_X \operatorname{Sing}(X) \geq 2$, ie, X es "suave en codimensión 1".

Dem: Sup. que $\operatorname{Sing}(X)$ posee una comp. irreducible Y de codimensión 1. Luego, podemos suponer que X es afín y $\mathcal{I}(Y) = \langle f \rangle$. En part, para $y \in Y$ tenemos

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{X,y} \arrow[r, two heads] & \mathcal{O}_{Y,y} = \mathcal{O}_{X,y}/\langle f \rangle \\ \mathfrak{m}_{X,y} \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads] & \mathfrak{m}_{Y,y} = \mathfrak{m}_{X,y}/\langle f \rangle \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Sea $y \in Y_{reg}$ un punto suave de Y (pero <u>no</u> de X, por hipótesis!). Entonces, $\mathfrak{m}_{Y,y}$ está generado por $v_1, \ldots, v_{m-1}$ (coord. locales en Y) $\Rightarrow \mathfrak{m}_{X,y}$ generado por $v_1, \ldots, v_{m-1}, f$
$\Rightarrow \dim_y(X) = n$ y $\dim_k(\mathfrak{m}_{X,y}/\mathfrak{m}_{X,y}^2) \leq n$, ie, y es suave en X, contradicción! ■

Corolario: Sea C una curva alg. irreducible. Entonces, C suave $\Leftrightarrow$ C normal.

Construcción (Normalización): Sea X una variedad alg. afín <u>irreducible</u>, y consideremos la clausura integral de $\mathcal{O}(X)$ en $k(X)$, ie, $\mathcal{O}(X) \subseteq A \subseteq k(X)$ con $\overline{\mathcal{O}(X)} = A$. Entonces, A es una k-álgebra finitamente generada y reducida. Luego, podemos considerar la variedad algebraica afín $X^\nu := \operatorname{Specm}(A)$ que cumple $\mathcal{O}(X^\nu) \cong A$.
Más aún: La inclusión $\mathcal{O}(X) \subseteq \mathcal{O}(X^\nu)$ induce un morfismo regular $\nu : X^\nu \to X$ que es llamado la <u>normalización</u> de X. Por las propiedades de la clausura integral tenemos:
1. X^ν es una variedad normal y $\nu : X^\nu \to X$ es un isomorfismo en la vecindad de un punto $x \in X$ <u>normal</u> (eg. suave).
2. $\nu : X^\nu \to X$ es un morfismo finito y birracional (pues $Fr(A) = k(X)$).
3. Si $g : Y \to X$ es un morfismo <u>finito</u> y <u>birracional</u>, con Y var. alg afín irreducible.
$\Rightarrow \exists!\, \hat{g} : X^\nu \to Y$ tal que $g \circ \hat{g} = \nu$, ie, el diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "g"] & & X \\ & X^\nu \arrow[ul, "\exists!\,\hat{g}"] \arrow[ur, "\nu"'] & \end{tikzcd}$$

"g factoriza a la normalización"

es conmutativo.

En efecto, las inclusiones $\mathcal{O}(X) \subseteq \mathcal{O}(Y) \subseteq k(X)$, con $\mathcal{O}(Y)$ entero sobre $\mathcal{O}(X)$ implican que $\mathcal{O}(Y) \subseteq \overline{\mathcal{O}(X)} = \mathcal{O}(X^\nu)$, de donde obtenemos $\hat{g} : X^\nu \to Y$.

④ Si $g : Z \to X$ morfismo regular dominante, con Z var. alg. afín <u>normal</u>.
$\Rightarrow \exists!\ \hat{g} : Z \to X^\nu$ tal que $g = \nu \circ \hat{g}$, i.e., el diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\exists!\hat{g}"'] & & X \\ & X^\nu \arrow[ur, "\nu"'] & \end{tikzcd}$$

"g se factoriza a través de la normalización"

es conmutativo.

En efecto, un elemento $u \in \mathcal{O}(X^\nu)$ es entero sobre $\mathcal{O}(X)$ y está contenido en $k(X) \xhookrightarrow{g^*} k(Z)$. Dado que $\mathcal{O}(X) \xhookrightarrow{g^*} \mathcal{O}(Z)$, a posteriori u es entero sobre $\mathcal{O}(Z)$ y, dado que $\mathcal{O}(Z)$ es integralmente cerrado, luego $u \in \mathcal{O}(Z)$. Así, $\mathcal{O}(X^\nu) \subseteq \mathcal{O}(Z)$, de donde obtenemos $\hat{g} : Z \to X^\nu$.

⑤ Los puntos ③ y ④ implican que la normalización de X es <u>única</u> (módulo isomorfismos). Más precisamente, si $\nu_1 : X_1^\nu \to X$ y $\nu_2 : X_2^\nu \to X$ son dos normalizaciones de X, entonces existe un isomorfismo $g : X_1^\nu \xrightarrow{\sim} X_2^\nu$ tal que

$$\begin{tikzcd} X_1^\nu \arrow[rr, "\sim"', "g"] \arrow[dr, "\nu_1"'] & & X_2^\nu \arrow[dl, "\nu_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

<u>Consecuencia</u>: <u>Toda</u> variedad algebraica X posee una "única" normalización $\nu : X^\nu \to X$, obtenida al considerar un atlas algebraico afín de X y pegar las normalizaciones.

[<u>Corolario</u>: Toda curva algebraica es birracional a una curva suave.]

<u>Ejemplo</u>: Sup. que $\mathrm{car}(k) \neq 2$ y sea $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{A}^3 \text{ tq } x^2 + y^2 = z^2\}$ cono en $\mathbb{A}^3$.
Veamos que X es normal: Los elementos de $k(X)$ son de la forma $u = a + bz$ con $a, b \in k(x,y)$, donde x e y son variables indep. Similar: $u = a + bz \in k(X)$ pertenece a $\mathcal{O}(X)$ si $a, b \in k[x,y]$. En part, $\mathcal{O}(X)$ es $k[x,y]$-mód fin. generado.
$\Rightarrow$ Si $u = a + bz \in k(X)$ es entero sobre $\mathcal{O}(X)$ entonces es entero sobre $k[x,y]$.
Por otro lado, calculando u^2, notamos que el polinomio minimal de u es $P(T) = T^2 - 2aT + a^2 - (x^2+y^2)b^2$ y por ende $2a \in k[x,y]$ (y luego $a \in k[x,y]$) y $a^2 - (x^2+y^2)b^2 \in k[x,y] \Rightarrow (x^2+y^2)b^2 \in k[x,y]$.
Notamos que $(x^2+y^2) = (x+iy)(x-iy)$ es producto de elementos irreducibles y luego el denominador de $b \in k(x,y)$ divide al numerador, i.e., $b \in k[x,y]$ ✓ $\Rightarrow u \in \mathcal{O}(X)$.

El siguiente resultado permite apreciar cómo el álgebra conmutativa interviene en un enunciado puramente geométrico, probado por Zariski en 1943:

[<u>Teorema principal de Zariski</u>: Sean X e Y variedades alg. irreducibles y sea $f : X \to Y$ un morfismo birracional. Sea $x \in X$ tal que $y = f(x)$ es <u>normal</u> en Y. Entonces:
<u>Caso 1</u>: f es un isomorfismo entre vecindades afines de $x \in X$ e $y \in Y$; o bien
<u>Caso 2</u>: Existe una hipersuperficie irreducible $E \subseteq X$ tal que $x \in E$ y tal que $\mathrm{codim}_Y(\overline{f(E)}) \geq 2$. En particular, $\dim_x f^{-1}(y) \geq 1$.

⚠ En particular, si $f : X \to Y$ morfismo birracional tal que el conjunto de puntos $\{x \in X \text{ tq } \dim_x(f^{-1}(f(x))) \geq 1\}$ <u>no</u> es una hipersuperficie, entonces la imagen de dicho conjunto en Y está contenido en el lugar de puntos no-normales de Y!
Por ejemplo, si $\dim(X) = \dim(Y) = 3$ y f <u>no</u> es un isomorfismo en una curva irred $C \subseteq X$ entonces el punto $f(C) = \{y\}$ <u>no</u> es normal en Y.
La prueba es bastante técnica, por lo que veremos el caso particular donde $y \in Y$ es <u>suave</u>:

<u>Dem (caso $y \in Y$ suave)</u>: Podemos sup. que X e Y son afines y consideramos:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(Y) & \xhookrightarrow{f^*} & \mathcal{O}(X) \\ \cap & & \cap \\ \mathcal{O}_{Y,y} & \xhookrightarrow{f^*} & \mathcal{O}_{X,x} \\ \cap & & \cap \\ k(Y) & \xrightarrow[\cong]{f^*} & k(X) \end{array}$$

Sean $u_1, \dots, u_N$ generadores de $\mathcal{O}(X)$ (definiendo $X \subseteq \mathbb{A}^N$). Vistas como funciones racionales $u_i = f^*(v_i) = f^*\left(\frac{a_i}{b_i}\right)$ con $a_i, b_i \in \mathcal{O}(Y)$. Dado que $y \in Y$ es <u>suave</u>, $\mathcal{O}_{Y,y}$ es un anillo factorial y podemos suponer que a_i y b_i son primos entre sí.

$\boxed{\text{Caso 1}}$ Si $b_i(y) \neq 0 \ \forall i$, obtenemos una inclusión $\mathcal{O}(Y)_{b_1 \cdots b_N} \cong \mathcal{O}(V) \xhookrightarrow{f^*} \mathcal{O}(X)_{f^*(b_1 \cdots b_N)} \cong \mathcal{O}(\mathcal{U})$ donde $V = \{y \in Y \text{ tq } (b_1 \cdots b_N)(y) \neq 0\}$ y $\mathcal{U} = f^{-1}(V)$. Veamos que $\mathcal{U} \cong V$:

Notamos que $u_i = \dfrac{f^*(a_i)}{f^*(b_i)} = \dfrac{f^*(a_i) \prod_{j \neq i} f^*(b_j)}{f^*(b_1 \cdots b_N)}$ está en la imagen de f^*, i.e., f^* sobreyectivo ✓

$\boxed{\text{Caso 2}}$ Si $b_1(y) = 0$: En $\mathcal{O}_{Y,y}$ escribimos $b_1 = c_1 d_1$ con c_1 irreducible tq $c_1(y) = 0$. Si escribimos $a_1 = a_1'/a_1''$ y $c_1 = c_1'/c_1''$ y nos restringimos a abiertos afines de X e Y donde $a_1'' \neq 0$, $c_1'' \neq 0$, $f^*(a_1'') \neq 0$, $f^*(c_1'') \neq 0$, podemos sup. que $a_1, c_1 \in \mathcal{O}(Y)$ y $f^*(a_1), f^*(c_1) \in \mathcal{O}(X)$. Sea $E = V(f^*(c_1)) \subseteq X$ hipersuperficie, y notar que $x \in E$ pues $f^*(c_1)(x) = c_1(f(x)) = c_1(y) = 0$. Más aún, considerando una comp. irred. de E que pasa por x, podemos sup. que E es irreducible. Veamos que $\operatorname{codim}_Y \overline{f(E)} \geq 2$:

Notamos que $f^*(a_1) = f^*(b_1) \cancel{u_1} = f^*(c_1) f^*(d_1) u_1$ y luego a_1 se anula en $\overline{f(E)}$.

Así, dado que a_1 y c_1 son primos entre sí en $\mathcal{O}_{Y,y}$ (<u>ecuaciones independientes</u>) $\Rightarrow \overline{f(E)} \subsetneq V(c_1) \subsetneq Y$ y luego $\operatorname{codim}_Y \overline{f(E)} \geq 2$. ■

<u>Consecuencia</u>: Sea X una curva irreducible e Y una curva <u>suave</u>. Si $f: X \to Y$ es un morfismo birracional, entonces $f(X) \subseteq Y$ es un abierto y f induce un isomorfismo $X \cong f(X)$. En particular, X es suave!

<u>Cultura general</u> (Resultados importantes, sin demostración):

En 1957, Zariski generaliza el resultado anterior a morfismos más generales.

<u>Teorema de conectividad de Zariski</u>: Sean X e Y variedades alg. irreducibles y sea $f: X \to Y$ un morfismo dominante. Si X es <u>proyectiva</u> y las fibras generales de f son <u>conexas</u>, entonces para todo $y \in Y$ punto <u>normal</u>, la fibra $f^{-1}(y)$ es conexa.

<u>Obs</u>: Notar que si f es birracional las fibras generales son singletons (conexos!).

Otra consecuencia de los teoremas de Zariski es el siguiente resultado de Stein (1956):

<u>Teorema</u> (Factorización de Stein): Sean X e Y variedades alg. irreducibles <u>proyectivas</u> y sea $f: X \to Y$ un morfismo regular. Entonces, podemos factorizar f como

$$f: X \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g} Y,$$

donde Y' es una variedad alg. irreducible proyectiva, $f: X \to Y'$ tiene fibras <u>conexas</u> y $g: Y' \to Y$ es un morfismo finito. Más aún, si X es <u>normal</u> entonces Y' es <u>normal</u>.

<u>Obs</u>: En particular, todo morfismo (no-constante) entre <u>curvas</u> alg. irreducibles proyectivas $f: X \to Y$ se factoriza en un morfismo biyectivo f' y un morfismo finito g. Además, en $\operatorname{car}(k) = p > 0$, f' puede <u>no</u> ser un isomorfismo (cf. $f': \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$, $[x, y] \mapsto [x^p, y^p]$).

$\boxed{\text{Ejercicio / Pregunta}}$* ¿Qué se puede decir de f? La respuesta depende del hecho si X y/o Y suave, f birracional o no, y si $\operatorname{car}(k) = 0$ o $p > 0$.

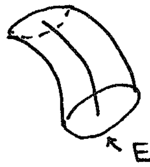
§ 20. Fibrados en recta y grupo de Picard

<u>Motivación</u>: Dada una variedad algebraica X, ¿cuándo X es proyectiva? Y en caso de serlo, ¿Cómo construir un encajamiento cerrado $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$?, ¿"grado" de X en $\mathbb{P}^N$?

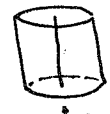
<u>Def</u>: Sea X una variedad alg. y $r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Un <u>fibrado vectorial de rango r</u> en X es una variedad algebraica E junto con un morfismo regular sobreyectivo $p : E \to X$ tal que:

① La fibra $p^{-1}(x) := E_x$ es un k-ev de $\dim_k(E_x) = r$. En part, $E_x \cong \mathbb{A}^r$. $(\forall x \in X)$

② Para todo $x \in X$, existe una vecindad abierta (afín) $\mathcal{U} \subseteq X$ de x y una <u>trivialización</u> de $\mathcal{U}$, ie, un isomorfismo $\Theta_{\mathcal{U}} : p^{-1}(\mathcal{U}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{U} \times \mathbb{A}^r$ tal que



$$\begin{tikzcd} p^{-1}(\mathcal{U}) := E|_{\mathcal{U}} \arrow[rr, "\sim", "\Theta_{\mathcal{U}}"'] \arrow[dr, "p|_{p^{-1}(\mathcal{U})}"'] & & \mathcal{U} \times \mathbb{A}^r \arrow[dl, "pr_1"] \\ & \mathcal{U} & \end{tikzcd}$$



$E_x \cong \mathbb{A}^r$ $\qquad\qquad$ $\{x\} \times \mathbb{A}^r$

sea conmutativo.

⚠ <u>Terminología</u>: Un <u>fibrado en rectas</u> en X es un fibrado vectorial $L \xrightarrow{p} X$ de rango 1.

<u>Ejemplos</u>: ① Sea X var. algebraica y V un k-ev de $\dim_k(V) = r$. El fibrado vectorial $V_X := X \times V \cong X \times \mathbb{A}^r \xrightarrow{pr_1} X$ es llamado el <u>fibrado trivial</u> de rango r.

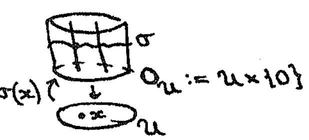
② Sea V un k-ev de $\dim_k(V) = n+1$, y $X = \mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^n$ espacio proyectivo. Dentro de $V_X = \mathbb{P}(V) \times V$ consideramos la variedad de incidencia

$$L := \{([\ell], x) \in \mathbb{P}(V) \times V \text{ tal que } x \in \ell\} \xrightarrow{p = pr_1} \mathbb{P}(V), \quad ([\ell], x) \mapsto \underset{\text{punto en } \mathbb{P}(V)}{[\ell]}$$

$\Rightarrow p^{-1}([\ell]) = \ell \cong \mathbb{A}^1$ recta en V. Veamos que podemos trivializar $L \xrightarrow{p} \mathbb{P}(V)$:
Sean $[x_0, \ldots, x_n]$ coord. homogéneas en $\mathbb{P}^n \cong \mathbb{P}(V)$ y t coord. en $\ell \cong \mathbb{A}^1$. En $\mathcal{U}_i = \{x_i \neq 0\}$ tenemos:

$$\mathcal{U}_i \times \mathbb{A}^1 \xrightarrow[\sim]{\Theta_i^{-1}} p^{-1}(\mathcal{U}_i), \quad \Big(\overbrace{\Big[\tfrac{x_0}{x_i}, \ldots, \tfrac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \tfrac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \tfrac{x_n}{x_i}\Big]}^{\text{generador de } \ell}, t\Big) \mapsto \Big([x_0, \ldots, x_n], \overbrace{\Big(\tfrac{t x_0}{x_i}, \ldots, t, \ldots, \tfrac{t x_n}{x_i}\Big)}^{\text{punto en } \ell}\Big)$$

<u>Obs</u>: Sea $\sigma(x) := \Theta_i^{-1}(x, 1)$. Entonces, $\sigma(x) \in L_x$ $\forall x \in \mathcal{U}_i$ y $L_x = \mathrm{Vect}_k\langle \sigma(x) \rangle$ generador.



En general, si $\Theta_{\mathcal{U}} : E|_{\mathcal{U}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{U} \times \mathbb{A}^r$ trivialización y $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$ es la base canónica de $k^r \cong \mathbb{A}^r$. Entonces, definimos

$$e_i(x) := \Theta_{\mathcal{U}}^{-1}(x, \varepsilon_i), \quad i = 1, \ldots, r$$

$\Rightarrow E_x = \mathrm{Vect}_k\langle e_1(x), \ldots, e_r(x)\rangle$ $\forall x \in \mathcal{U}$ y decimos que $(e_1, \ldots, e_r)$ es un <u>marco de referencia</u> de $E|_{\mathcal{U}}$.

⚠ <u>Importante</u>: El fibrado $L \to \mathbb{P}(V)$ recién construido es llamado el <u>fibrado (en rectas) tautológico</u> de $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^n$, y es denotado $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1)$ o $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$.

③ $\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea V un k-ev. y $1 \leq r < \dim_k(V) - 1$. Sea $G = Gr(r, V)$ la variedad grassmanniana que parametriza los $\Lambda \cong k^r$ subev de V. Probar que la variedad de incidencia en $V_G = G \times V$ dada por

$$S := \{([\Lambda], x) \in Gr(r, V) \times V \text{ tal que } x \in \Lambda\} \xrightarrow{p = pr_1} Gr(r, V)$$

define un fibrado vectorial de rango r, llamado el <u>fibrado tautológico</u> de $Gr(r, V)$.

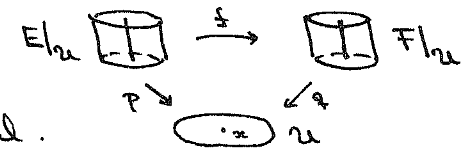
④ Podemos restringir fibrados vectoriales: sea $E \xrightarrow{p} X$ un fibrado vectorial y $Y \subseteq X$ una subvariedad algebraica, entonces $E|_Y := p^{-1}(Y)$ es un fibrado vectorial en Y, con $\mathrm{rg}(E) = \mathrm{rg}(E|_Y)$.

⑤ Más generalmente, podemos considerar el <u>pullback</u> de fibrados vectoriales: sea $E \xrightarrow{p} X$ un fibrado vectorial y sea $f: Y \to X$ un morfismo regular, entonces $f^*E := \{(y,z) \in Y \times E$ tales que $f(y) = p(z)\}$ es un fibrado vectorial en Y con $\mathrm{rg}(E) = \mathrm{rg}(E|_Y)$ y donde $(f^*E)_y \cong E_{f(y)}$.

<u>Def</u>: Sea X una variedad algebraica, y sean $E \xrightarrow{p} X$ y $F \xrightarrow{q} X$ fibrados vectoriales de rangos $\mathrm{rg}(E) = r$ y $\mathrm{rg}(F) = s$. Un <u>morfismo de fibrados vectoriales</u> es un morfismo regular $f: E \to F$ tal que:

① $q \circ f = p$.

② Para todo $x \in X$, $f_x : E_x \cong k^r \longrightarrow F_x \cong k^s$ es k-lineal.



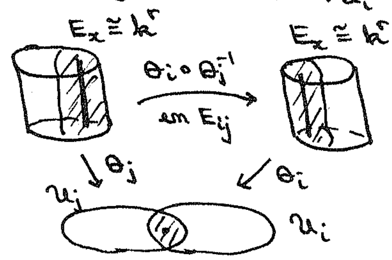
<u>Ejemplo</u>: Un morfismo entre los fibrados triviales $f: X \times k^r \longrightarrow X \times k^s$ es de la forma $f(x, v) = (x, g(x)v)$, donde $g(x) \in M_{s \times r}(k)$ $\forall x \in X$. Notar que si $s = r$ y $g(x_0)$ es invertible para cierto $x_0 \in X$, entonces $g(x) \in GL_r(k)$ para todo $x \in U_{x_0}$ vecindad de x_0.

<u>Obs importante</u>: Denotamos por $\underline{\mathrm{Vect}}(X)$ la categoría de fibrados vectoriales en X. En part, decimos que dos fibrados son isomorfos si existe un isomorfismo de fibrados vectoriales $E \cong F$.

<u>Construcción</u> (Matrices de transición): Sea $p: E \to X$ un fibrado vectorial y sea $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ un cubrimiento abierto de X tal que cada U_i trivializa E, ie, $E|_{U_i} = p^{-1}(U_i) \xrightarrow[\theta_i]{\sim} U_i \times \mathbb{A}^r$.
En una intersección $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ tenemos:

$$E|_{U_i \cap U_j} = p^{-1}(U_i \cap U_j) =: E_{ij}$$

$$\begin{tikzcd} & E_{ij} \arrow[dl, "\cong"', "\theta_j|_{E_{ij}}"] \arrow[dr, "\cong", "\theta_i|_{E_{ij}}"'] & \\ (U_i \cap U_j) \times \mathbb{A}^r \arrow[rr, "\theta_i \circ \theta_j^{-1}", "\sim"'] & & (U_i \cap U_j) \times \mathbb{A}^r \\ (x, v) \arrow[rr, mapsto] & & (x, g_{ij}(x) v) \end{tikzcd}$$



donde $g_{ij}(x) \in GL_r(k)$ $\forall x \in U_i \cap U_j$ son llamadas <u>matrices de transición</u>, las cuales verifican $g_{ii}(x) = I_r$ $\forall x \in U_i$. Más aún, en la triple intersección $U_i \cap U_j \cap U_k$

$$\boxed{g_{ij}\, g_{jk} = g_{ik}} \quad (\underline{\text{Condición de cociclo}})$$

<u>Obs importante</u>: ① Las matrices de transición dependen de ciertas elecciones:

i) El cubrimiento abierto: podríamos tomar abiertos más pequeños.

ii) Las trivializaciones: Podríamos componer con $U_i \times \mathbb{A}^r \xrightarrow{\sim} U_i \times \mathbb{A}^r$, $(x, v) \mapsto (x, h_i(x) v)$ con $h_i(x) \in GL_r(k)$ $\forall x \in U_i$ y obtendríamos $\tilde{g}_{ij} = h_i\, g_{ij}\, h_j^{-1}$.

② Módulo isomorfismo, E está completamente determinado por un cubrimiento abierto y por las matrices de transición. En efecto, podemos construir E usando el atlas algebraico obtenido al pegar los $U_i \times \mathbb{A}^r$ usando los isomorfismos (cambios de carta)

$$\begin{aligned} (U_i \cap U_j) \times \mathbb{A}^r &\xrightarrow{\sim} (U_i \cap U_j) \times \mathbb{A}^r \qquad \forall i, j \in I \\ (x, v) &\longmapsto (x, g_{ij}(x) v) \end{aligned}$$

Ejemplo principal: En el caso particular de un fibrado en rectas $L \to X$ (ie, $rg(L)=1$) obtenemos funciones de transición $g_{ij}(x) \in k^*$ $\forall x \in \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$. En otras palabras, si denotamos por $\mathcal{O}_X^*$ el haz de funciones regulares en X que nunca se anulan $\Rightarrow g_{ij} \in \mathcal{O}_X^*(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$ $\forall i,j \in I$, ie, $g_{ij}: \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \longrightarrow k^*$ regular.

Por ejemplo, para el fibrado tautológico $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ de $\mathbb{P}^n$ tenemos $g_{ij}(x) = \frac{x_i}{x_j}$:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & p^{-1}(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \arrow[dr, "\cong"', "\theta_i"] & \\ (\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \times \mathbb{A}^1 \arrow[ur, "\cong", "\theta_j^{-1}"'] \arrow[rr] & & (\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \times \mathbb{A}^1 \end{tikzcd}$$

$$(x,t) \longmapsto \left(x, \frac{x_i}{x_j} t\right) = (x,s)$$

$$\theta_j^{-1}(x,t) = \left(x, \left(\frac{t x_0}{x_j}, \dots, \frac{t x_n}{x_j}\right)\right)$$
$$\theta_i^{-1}(x,s) = \left(x, \left(\frac{s x_0}{x_i}, \dots, \frac{s x_n}{x_i}\right)\right)$$
$$\Rightarrow \boxed{g_{ij}(x) = \frac{x_i}{x_j} \text{ en } \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j}$$

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $V_X \cong X \times \mathbb{A}^r$ fibrado trivial. Probar que $g_{ij}(x) = I_r$ $\forall i,j \in I$ son matrices de transición. En part, $g_{ij}(x) \equiv 1$ son funciones de transición de $X \times \mathbb{A}^1$.

Construcción: Las matrices de transición permiten extender a la categoría $\mathrm{Vect}(X)$ muchas de las construcciones de álgebra lineal. Las más usadas son:

Sea X una var. algebraica, y sean $E \longrightarrow X$ y $F \longrightarrow X$ fibrados vectoriales de rangos $rg(E) = r$ y $rg(F) = s$, dados por matrices de transición (en un cubrimiento abierto común) $g_{ij}(x) \in GL_r(k)$ y $h_{ij}(x) \in GL_s(k)$, respectivamente. Definimos:

1. La suma directa $E \oplus F$, de rango $r+s$, mediante $\begin{pmatrix} g_{ij} & 0 \\ 0 & h_{ij} \end{pmatrix} \in GL_{r+s}(k)$
2. El producto tensorial $E \otimes F$, de rango rs, mediante $g_{ij} \otimes h_{ij} \in GL_{rs}(k)$.
3. El dual $E^\vee$ (o E^*), de rango r, mediante $g_{ij}^\vee := {}^t g_{ij}^{-1} \in GL_r(k)$.
4. El fibrado $\underline{Hom}(E,F) := E^\vee \otimes F$, de rango rs.
5. Para $d \in \mathbb{N}$ (resp. $0 \le d \le r$) la potencia simétrica $S^d E$ (resp. potencia exterior $\Lambda^d E$), de rango $\binom{r+d-1}{d}$ (resp. $\binom{r}{d}$), dada por $S^d g_{ij}$ (resp. $\Lambda^d g_{ij}$).
6. Dada una representación $\rho: GL_r(k) \longrightarrow GL_N(k)$, definimos E_ρ, de rango N, mediante $\rho(g_{ij})$. En part, $\det: GL_r(k) \to k^*$ determina un fibrado en rectas $\det(E)$ con funciones de transición $\det(g_{ij})$. Más aún, $\det(E) \cong \Lambda^r E$.

Caso particular importante: Sean $L \to X$ y $M \to X$ fibrados en rectas dados por funciones de transición g_{ij} y h_{ij} (en un cubrimiento abierto común), resp. Entonces:

i) $k_{ij} = g_{ij} h_{ij} = h_{ij} g_{ij}$ satisfacen la condición de cociclo y definen $L \otimes M \cong M \otimes L$ fibrado en rectas!

ii) El fibrado en rectas trivial $k_X = X \times \mathbb{A}^1$ (con $k_{ij} = 1$) verifica $k_X \otimes L \cong L \otimes k_X \cong L$.

iii) El dual $L^\vee$ con funciones de transición $g_{ij}^\vee = 1/g_{ij}$ verifica $L \otimes L^\vee \cong L^\vee \otimes L \cong k_X$.

Def: Sea X una variedad algebraica. Definimos el grupo de Picard de X como el grupo abeliano $\mathrm{Pic}(X) := \{\text{Fibrados en rectas en } X\} / \text{isomorfismo}$.

Ejemplo principal: En $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^n$, definimos $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^\vee$ mediante $g_{ij} = \frac{x_j}{x_i}$.

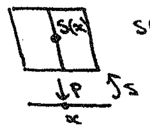
En general, para $d \in \mathbb{Z}$ definimos $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ mediante $g_{ij} = \left(\frac{x_j}{x_i}\right)^d$.

§21. Secciones y haces localmente libres

Def: Sea X una variedad alg. y $E \xrightarrow{p} X$ un fibrado vectorial de rango r. Una *sección* de E es un morfismo regular $s: X \to E$ tal que $p \circ s = Id_X$, i.e., $s(x) \in E_x \simeq k^r$ $\forall x \in X$.

Importante: El conjunto $H^0(X,E) := \{s : X \to E \text{ sección}\}$ de *secciones globales* de E (que también se denota $\Gamma(X,E)$) es un $\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$-módulo. En efecto, si $s,t \in H^0(X,E)$ y $\lambda \in \Gamma(X,\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}(X)$, definimos:

$$(s+t)(x) := s(x) + t(x) \quad y \quad (\lambda s)(x) := \lambda(x) s(x).$$



$s(x) \in E_x \simeq k^r$
k-e.v.

En part, $H^0(X,E)$ es un k-e.v.

Obs importante: En términos de trivializaciones y matrices de transición tenemos que

$$\begin{tikzcd} E|_{\mathcal{U}_i} = p^{-1}(\mathcal{U}_i) \arrow[rr, "\sim", "\theta_i"'] \arrow[dr, "p"] & & \mathcal{U}_i \times \mathbb{A}^r \arrow[dl, "pr_1"'] \\ & \mathcal{U}_i \arrow[ul, bend left, "s|_{\mathcal{U}_i}"] \arrow[ur, bend right, "\sigma_i := \theta_i \circ s|_{\mathcal{U}_i}"'] & \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \sigma_i(x) = (x, s_i(x))$ $\forall x \in \mathcal{U}_i$, donde $s_i(x) = (s_{i,1}(x), \dots, s_{i,r}(x)) \in \mathcal{O}_X(\mathcal{U}_i)^{\oplus r}$

En $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$ tenemos: $(x, s_j(x)) \xleftarrow{\theta_j} s(x) \xrightarrow{\theta_i} (x, s_i(x))$, con $g_{ij}(x)$ de $(x,s_j(x))$ a $(x,s_i(x))$

$\Rightarrow \boxed{s_i = g_{ij} s_j \text{ en } \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j}$

Ejemplos: ① Sea $L = X \times \mathbb{A}^1$ fibrado en rectas *trivial* en X, entonces $g_{ij} = 1$ y luego $H^0(X,L) \cong \Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ secciones globales de $\mathcal{O}_X$.

② Similar, si $E = X \times \mathbb{A}^r$ fibrado trivial de rango r, entonces $H^0(X,E) \cong \Gamma(X,\mathcal{O}_X)^{\oplus r}$.

③ $\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $f: Y \to X$ un morfismo regular y $E \xrightarrow{p} X$ un fibrado vectorial. Entonces $\Gamma(f): H^0(X,E) \to H^0(Y, f^*E)$, $s \mapsto (y \mapsto (y, s(f(y))))$ es k-lineal.

④ Sea $d \in \mathbb{Z}$ y consideremos $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ fibrado en rectas en $\mathbb{P}^n$, definido por $g_{ij} = \left(\frac{x_j}{x_i}\right)^d$.
Sea $s_i \in \mathcal{O}(\mathcal{U}_i)$ donde $\mathcal{U}_i = \{x_i \neq 0\} \cong \mathbb{A}^n$ con coordenadas $\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}$

$\Rightarrow s_i = \frac{P_i}{x_i^{m_i}}$ con P_i homogéneo de grado m_i. Luego, si $s_i = g_{ij} s_j$ en $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$

$\Leftrightarrow \frac{P_i}{x_i^{m_i}} = \frac{x_j^d P_j}{x_i^d x_j^{m_j}} \iff P_i x_i^{d-m_i} = P_j x_j^{d-m_j}$. $\forall i,j$.

Así, si $d \geq 0$ entonces $P := P_i x_i^{d-m_i}$ es un polinomio homogéneo de grado d y $s_i = \frac{P}{x_i^d}$ $\forall i$, i.e., $k[x_0, \dots, x_n]_d \xrightarrow{\sim} H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$, $P \mapsto \left\{s_i = \frac{P}{x_i^d}\right\}_{i=0,\dots,n}$ es un isomorfismo. Del mismo modo, $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = \{0\}$ si $d < 0$.

⑤ Sean $E \to X$ y $F \to X$ fibrados vectoriales dados por matrices de transición (en un cubrimiento común) g_{ij} y h_{ij}, respectivamente. Sean $s \in H^0(X,E)$ y $t \in H^0(X,F)$, donde $s_i = g_{ij} s_j$ y $t_i = h_{ij} t_j$ $\Rightarrow s_i \otimes t_i = (g_{ij} s_j) \otimes (h_{ij} t_j) = (g_{ij} \otimes h_{ij})(s_j \otimes t_j)$.
Luego, obtenemos $s \otimes t \in H^0(X, E \otimes F)$.

⚠ ¡Atención! Si $X = \mathbb{P}^n$, $E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ y $F = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ entonces $E \otimes F \simeq k_X$ trivial y $H^0(X, E \otimes F) \simeq \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \simeq k \neq H^0(X,E) \otimes_k H^0(X,F) = \{0\}$.

⑥ $\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sean $E \to X$ y $F \to Y$ fibrados vectoriales. Probar la *fórmula de Künneth*:
$H^0(X,E) \otimes_k H^0(Y,F) \cong H^0(X \times Y, E \boxtimes F)$, donde $E \boxtimes F := pr_X^*(E) \otimes pr_Y^*(F)$.

Importante: Un fibrado en rectas $L \to X$ es trivial (ie, $L \simeq k_X$) si y sólo si existe una sección global $s \in H^0(X,L)$ que no se anula nunca (ie, $s(x) \neq 0$ en $L_x \simeq k$ $\forall x \in X$).
En efecto, en tal caso definimos un isomorfismo

$$\begin{tikzcd} k_X = X \times \mathbb{A}^1 \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "pr_1"'] & & L \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd} \qquad \text{mediante } (x,t) \longmapsto t s(x).$$

Caso particular: Sea X una variedad alg. irreducible tal que $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \cong k$ (eg. X es proyectiva), y sea $L \to X$ un fibrado en rectas tal que existen dos secciones $s \in H^0(X,L) \setminus \{0\}$ y $t \in H^0(X, L^\vee) \setminus \{0\}$ no-nulas (ie, $\exists x \in X$ tq $s(x) \neq 0$ y $\exists y \in X$ tq $t(y) \neq 0$) entonces L es trivial.
En efecto, el producto $H^0(X,L) \otimes H^0(X,L^\vee) \longrightarrow H^0(X, L \otimes L^\vee) \simeq \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \cong k$ define $s \otimes t$ constante, la cual es $\neq 0$ en el abierto donde $s(x) \neq 0$ y $t(x) \neq 0$, y luego es una constante globalmente no-nula $\Rightarrow$ s y t no se anulan nunca y L trivial ✓

Construcción (Haz de secciones):
Sea $E \xrightarrow{p} X$ un fibrado vectorial de rango r, definimos el haz de secciones de E de la manera siguiente: Para cada $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto (no-vacío) definimos

$$\mathcal{E}(\mathcal{U}) := H^0(\mathcal{U}, E|_{\mathcal{U}}) = \{ s : \mathcal{U} \to E|_{\mathcal{U}} \text{ regular tal que } p \circ s = \mathrm{Id}_{\mathcal{U}} \}.$$

Dado que $\mathcal{E}(\mathcal{U})$ es un $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{U}}) = \mathcal{O}_X(\mathcal{U})$-módulo, tenemos que $\mathcal{E}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo.
Más aún, las trivializaciones $\theta_i : E|_{\mathcal{U}_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}_i \times \mathbb{A}^r$ inducen isomorfismos $\mathcal{E}|_{\mathcal{U}_i} = \mathcal{O}_{\mathcal{U}_i}^{\oplus r}$, ie, $\mathcal{E}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo localmente libre de rango r ! (ver §4, pág 16).
Obs: En part, si $L \to X$ fibrado en rectas entonces $\mathcal{L}$ es un haz invertible !

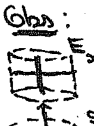
Recíprocamente, dado un $\mathcal{O}_X$-módulo localmente libre de rango r y un cubrimiento abierto $X = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$ tal que $\varphi_i : \mathcal{E}|_{\mathcal{U}_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathcal{U}_i}^{\oplus r}$ isomorfismo $\mathcal{O}_{\mathcal{U}_i}$-lineal, entonces en $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j}^{\oplus r} = (\mathcal{O}_{\mathcal{U}_j}^{\oplus r})|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j} \arrow[r, "\varphi_j^{-1}"] \arrow[rr, bend right, "g_{ij}"'] & \mathcal{E}|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j} \arrow[r, "\varphi_i", "\sim"'] & (\mathcal{O}_{\mathcal{U}_i}^{\oplus r})|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j} = \mathcal{O}_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j}^{\oplus r} \end{tikzcd}$$

con $g_{ij} \in GL_r(\mathcal{O}_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j})$ verificando la condición de cociclo (pues $g_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$).
$\Rightarrow$ Definimos un fibrado vectorial $E \to X$ a partir de las matrices de transición g_{ij} y por construcción el haz de secciones de E es $\mathcal{E}$. En resumen:

Teorema: Sea X una variedad algebraica conexa (eg. irreducible). Entonces, $E \mapsto \mathcal{E}$ define una equivalencia entre la categoría $\underline{\mathrm{Vect}}(X)$ de fibrados vectoriales en X y la categoría de $\mathcal{O}_X$-módulos localmente libres.

Obs: Sea $E \to X$ un fibrado vectorial y sea $\mathcal{E}$ el haz de secciones asociado.



Para cada $x \in X$, denotamos por $\mathfrak{m}_{X,x} \mathcal{E}_x$ al ideal de $\mathcal{E}_x$ formado por $s_x \in \mathcal{E}_x$ gérmenes de secciones que se anulan en x. Entonces, $\mathcal{E}_x / \mathfrak{m}_{X,x} \mathcal{E}_x \cong E_x$.

En efecto, $ev_x : \mathcal{E}_x \twoheadrightarrow E_x$, $s_x \mapsto s_x(x)$ es sobreyectivo y $\ker(ev_x) = \mathfrak{m}_{X,x} \mathcal{E}_x$.

§22. Sistemas lineales y amplitud

Sea X una variedad algebraica y $L \in \mathrm{Pic}(X)$ un fibrado en rectas, definido en un cubrimiento abierto $X = \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$ por funciones de transición $\{g_{ij}\}_{i,j\in I}$.

Construcción: sean $s_0, \dots, s_m \in H^0(X,L)\setminus\{0\}$ secciones globales no-nulas, donde cada s_j está definida por $s_{j,i} \in \mathcal{O}(\mathcal{U}_i)$ en $\mathcal{U}_i$. Así, para cada $x \in \mathcal{U}_i$ definimos

$$\varphi_L : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n \ , \ x \mapsto [s_{0,i}(x), \dots, s_{m,i}(x)]$$

aplicación racional.

Notamos que la definición de φ_L es independiente del abierto $\mathcal{U}_i$ escogido, pues al pasar de $\mathcal{U}_i$ a $\mathcal{U}_j$ cada coordenada se multiplica por el mismo factor no-nulo $g_{ji}(x)$. Luego, escribimos simplemente $\varphi_L(x) = [s_0(x), \dots, s_m(x)]$ y así $\varphi_L : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ está bien definida fuera del cerrado $Z = \{x \in X \text{ tq } s_i(x) = 0 \ \forall i \in I\} \subseteq X$.

Caso particular importante: si las secciones $s_0, \dots, s_m$ no tienen ceros comunes (ie, $Z = \emptyset$), entonces $\varphi_L : X \to \mathbb{P}^n$ es un morfismo regular. Más aún, en este caso $\varphi_L^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \cong L$:

En efecto, basta notar que por definición de pullback se tiene que $\varphi_L^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \cong L^\vee$, pues el fibrado $\varphi_L^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ está determinado por los abiertos $X_i := \varphi_L^{-1}(\mathcal{U}_i) = \{x \in X \text{ tq } s_i(x) \neq 0\}$ (donde $\mathcal{U}_i = \{x_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^n$) y, dado que $\varphi_L(x) = \left[\frac{s_0(x)}{s_j(x)}, \dots, \frac{s_m(x)}{s_j(x)}\right]$ para $x \in X_j$, las funciones de transición h_{ij} de $\varphi_L^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ son $h_{ij} = \frac{s_j(x)}{s_i(x)} = \frac{\cancel{s_j(x)}}{g_{ij}(x)\cancel{s_j(x)}} = \frac{1}{g_{ij}(x)} = g_{ji}(x)$, ie, $\varphi_L^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \cong L^\vee$.

Recíprocamente, dado un morfismo regular $f : X \to \mathbb{P}^n$, $x \mapsto [f_0(x), \dots, f_m(x)]$ consideramos $L := f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ y la aplicación lineal

$$\Gamma(f) : H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \to H^0(X,L) \ , \ x_i \longmapsto \Gamma(f)(x_i) := s_i$$

Luego, $f = \varphi_L$ pues $s_j(x) = (x_j \circ f)(x) = f_j(x)$. En resumen:

Teorema: sea X una variedad algebraica. Entonces, hay una biyección

$$\left\{ \begin{array}{l} f : X \to \mathbb{P}^n \\ \text{morfismo regular} \end{array} \right\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} L \in \mathrm{Pic}(X) \text{ junto con secciones} \\ s_0, \dots, s_n \in H^0(X,L) \text{ sin ceros comunes} \end{array} \right\}$$

$$f \longmapsto (L = f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \ \text{y} \ s_i = \Gamma(f)(x_i))$$

$$\varphi_L \longleftarrow (L; s_0, \dots, s_m)$$

Def: Sea $L \in \mathrm{Pic}(X)$ fibrado en rectas en X. Un sistema lineal M en X es un sub-ev. $M \subseteq H^0(X,L)$ de dimensión finita. En particular, si $\dim_{\mathbb{K}} H^0(X,L) < +\infty$ decimos que el sistema lineal $H^0(X,L)$ es un sistema lineal completo.

Notación: Dado un sistema lineal $M \subseteq H^0(X,L)$ denotamos por $|M| := \mathbb{P}(M^*) = \{\text{hiperplanos} \subseteq M\}$ al espacio proyectivo dual de M. Con esta notación, podemos formular la versión sin coordenadas del Teorema anterior:

Dado un sistema lineal $M \subseteq H^0(X,L)$ definimos la aplicación racional

$$\varphi_M : X \dashrightarrow |M| = \mathbb{P}(M^*) \ , \ x \mapsto \{s \in M \text{ tal que } s(x) = 0_{L_x}\} =: M_x$$

Luego, φ_M está definida en $x \in X$ (ie, M_x es un hiperplano en M) si y sólo si existe $s \in M$ tal que $s(x) \neq 0$. Más aún, si $s_0, \dots, s_m$ es una base de M y escribimos $s = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i s_i$, entonces el hiperplano $M_x \in |M|$ está dado por la ecuación $\lambda_0 s_0(x) + \dots + \lambda_m s_m(x) = 0$ y corresponde al punto $[s_0(x), \dots, s_m(x)] \in |M| \cong \mathbb{P}^n$, ie, $\varphi_M : X \dashrightarrow |M| \cong \mathbb{P}^n$ en coordenadas.

$$x \longmapsto [s_0(x), \dots, s_m(x)]$$

Def: Sea $M \subseteq H^0(X,L)$ un sistema lineal. Definimos el lugar de base de M mediante
$$Bs(M) = \{x \in X \text{ tal que } s(x) = 0 \ \forall s \in M\}.$$
Diremos que M es libre de puntos de base (o globalmente generado) si $Bs(M) = \emptyset$, ie, $\varphi_M : X \to |M| = \mathbb{P}(M^*)$ es un morfismo regular. Equivalentemente, el morfismo de evaluación
$$ev : X \times M \longrightarrow L \ , \ (x,s) \longmapsto s(x)$$
es sobreyectivo.

Luego, tenemos una biyección
$$\left\{ \begin{matrix} f : X \to \mathbb{P}^n \\ \text{morfismo regular} \end{matrix} \right\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \left\{ \begin{matrix} L \in \mathrm{Pic}(X) \text{ junto con } M \subseteq H^0(X,L) \text{ sistema lineal} \\ \text{de } \dim_k(M) = n+1 \text{ sin puntos de base} \end{matrix} \right\}$$

Ejemplos:

① Clásicamente, si $\dim_k(M) = 2$ (ie, $|M| \cong \mathbb{P}^1$) se dice que $f : X \dashrightarrow |M| \cong \mathbb{P}^1$ es un pincel de hipersuperficies en X.

② Las inclusiones $M \subseteq N \subseteq H^0(X,L)$ inducen aplicaciones racionales
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "\varphi_N"] \arrow[dr, dashed, "\varphi_M"'] & \mathbb{P}(N^*) \arrow[d, dashed, "\pi"] \\ & \mathbb{P}(M^*) \end{tikzcd}$$
donde π es la proyección lineal inducida por $N^* \twoheadrightarrow M^*$.
En coord, si $s_0, \dots, s_n$ base de N tq $s_0, \dots, s_m$ base de M
$\Rightarrow \pi([s_0, \dots, s_m, s_{m+1}, \dots, s_n]) = [s_0, \dots, s_m]$.

Típicamente, puede ocurrir que $H^0(X,L)$ sea sin puntos de base, pero $M \subseteq H^0(X,L)$ no lo sea.

③ Sea $X = \mathbb{P}^n$ y $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ con $d \geq 1$. Entonces, $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \cong k[x_0, \dots, x_n]_d$ polinomios homogéneos de grado d y luego
$$\varphi_L = \nu_d : \mathbb{P}^n \hookrightarrow \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))^*) \cong \mathbb{P}^N \quad , \text{ con } N = \binom{n+d}{d} - 1$$
es el incrustamiento de Veronese (ver §11, pág 39). En part, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ es globalmente generado.

④ En $\mathbb{P}^2$, si consideramos $M := \mathrm{Vect}_k \langle yz, xz, xy \rangle \subseteq H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))$ sistema lineal.
Entonces, $\varphi_M : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$, $[x,y,z] \mapsto [yz, xz, xy]$ es la involución de Cremona (ver §13, p. 45).

⑤ Sea $\varphi : Gr(r,V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^r V) \cong \mathbb{P}^N$ el incrustamiento de Plücker, con $N = \binom{n}{r} - 1$.
Denotamos por $\mathcal{O}_{Gr(r,V)}(1) := \varphi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$ fibrado en rectas globalmente generado.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. En $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$, definimos $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m}(a,b) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(b) \in \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)$
Probar que sistema lineal completo definido por $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m}(1,1)$ induce un morfismo regular $\varphi_L : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \hookrightarrow |L| \cong \mathbb{P}^N$ que coincide con la incrustación de Segre.

Pregunta: Dado un sistema lineal libre de puntos de base M, ¿cuándo $\varphi_M : X \to |M| \cong \mathbb{P}^n$ es un incrustamiento cerrado? Para responder, necesitamos el siguiente resultado:

Teorema: Sea $f : X \to Y$ un morfismo finito entre variedades algebraicas tal que:
① f separa puntos, ie, f es inyectivo.
② f separa tangentes, ie, $d_x f : T_x X \hookrightarrow T_{f(x)} Y$ inyectiva para todo $x \in X$.
Entonces, f es un incrustamiento cerrado (ie, $X \cong f(X) \subseteq Y$).

Dem: Reemplazando Y por $f(X)$, podemos suponer que f es biyectivo. Sea $g := f^{-1} : Y \to X$ aplicación continua (pues f cerrado) y veamos que es regular:
Para ello podemos suponer que X e Y son afines, y luego basta probar que el pullback $f^* : \mathcal{O}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$ es un isomorfismo. Inyectividad: OK pues f dominante ✓
Notamos además que si $\mathrm{Im}(f^*) = \mathcal{O}(X)$ entonces $\mathcal{O}(Y) = \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_{\mathcal{O}(Y)}) = \mathrm{Im}(g^* \circ f^*) = (g^*)(\mathcal{O}(X))$.

En part, $(g^*)(\mathcal{O}(x)) \subseteq \mathcal{O}(y)$ y luego g es regular ✓ Veamos que $\mathrm{Im}(f^*) = \mathcal{O}(X)$:

Recuerdo (Lema de Nakayama): Sea $(A, \mathfrak{m})$ anillo local con $A/\mathfrak{m} \cong k$ y sea M un A-módulo finitamente generado. Si $u_1, \dots, u_m \in M$ son tales que $[u_1], \dots, [u_m] \in M/\mathfrak{m}M$ son generadores de dicho $k \cong A/\mathfrak{m}$-ev $\Rightarrow u_1, \dots, u_m$ generan M como A-módulo.

Aquí, sabemos que $f^*: \mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2 \twoheadrightarrow \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ es sobreyectivo, donde $y = f(x)$. Luego, si $u_1, \dots, u_m \in \mathfrak{m}_y$ son generadores, entonces $[f^*u_1], \dots, [f^*u_m]$ son generadores de $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ $\underset{\text{Nakayama}}{\Longrightarrow} f^*u_1, \dots, f^*u_m$ generan $\mathfrak{m}_x \subseteq \mathcal{O}_{X,x}$, i.e., $\mathfrak{m}_x = \langle f^*\mathfrak{m}_y \rangle \subseteq \mathcal{O}_{X,x}$.

Por otro lado, como f es un morfismo finito, $\mathcal{O}_{X,x}$ es un $\mathcal{O}_{Y,y}$-módulo fin. gen. (vía f^*).
Como $[1]$ es generador de $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x \cong k$ y $f^*: \mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_y \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{X,x}/\langle f^*\mathfrak{m}_y \rangle = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$
$\underset{\text{Nakayama}}{\Longrightarrow}$ 1 genera $\mathcal{O}_{X,x}$ como $\mathcal{O}_{Y,y}$-módulo (vía f^*), i.e., $\mathcal{O}_{X,x} = f^*\mathcal{O}_{Y,f(x)}$ $\forall x \in X$.
Luego, obtenemos un isomorfismo de haces y en particular $\mathcal{O}(X) = \mathrm{Im}(f^*)$. ■

Obs: En part, todo morfismo finito étale biyectivo es un isomorfismo. En general, existe un grupo "fundamental étale" $\pi_1^{\acute{e}t}(X)$ que mide los posibles $Y \to X$ étale.

Corolario: Sea $M \subseteq H^0(X, L)$ un sistema lineal. Entonces, $\varphi_M: X \hookrightarrow \mathbb{P}(M^*)$ es un encajamiento cerrado si y sólo si:

① M separa puntos, i.e., para todos $x, y \in X$ con $x \neq y$ existe $s \in M$ tq $s(x) = 0$ y $s(y) \neq 0$. En part, M es libre de puntos de base.

② M separa tangentes, i.e., para todo $x \in X$ y todo $v \in T_xX$ existe $s \in M$ tal que $s(x) = 0$ y $(d_x s)(v) \neq 0$.

Dem: Usando métodos de cohomología ("Teorema de Grauert-Grothendieck"), veremos más adelante que si $f: X \hookrightarrow Y$ morfismo regular inyectivo con Y variedad proyectiva (eg. $Y = \mathbb{P}(M^*)$) entonces f es un morfismo finito.
Luego, basta verificar que $d_x\varphi_M$ es inyectivo $\forall x \in X \Leftrightarrow$ ②: Sea $x_0 \in X$ fijo y sea $s_0, \dots, s_n$ una base de M tq $s_0(x_0) \neq 0$ y $s_i(x_0) = 0$ $\forall i > 0$ (i.e, $\varphi_M(x_0) = [1, 0, \dots, 0]$).
Luego, para x en $X_{s_0} = \{x \in X \text{ tq } s_0(x) \neq 0\}$ se tiene que
$$\varphi_M(x) = \left[1, \frac{s_1(x)}{s_0(x)}, \dots, \frac{s_n(x)}{s_0(x)}\right] \in \mathcal{U}_0 = \{x_0 \neq 0\} \cong \mathbb{A}^n$$
Así, obtenemos $\varphi_M: X_{s_0} \to \mathbb{A}^n$ definida por $\varphi_M(x) = \left(\frac{s_1(x)}{s_0(x)}, \dots, \frac{s_n(x)}{s_0(x)}\right)$ y debemos calcular $d_{x_0}\varphi_M: T_{x_0}X \longrightarrow T_{\varphi_M(x_0)}\mathbb{A}^n$, $v \longmapsto (d_x\varphi_M)(v)$. Para ello, notamos que $s_i = g_{ij}s_j$ implica que $d_x s_i(v) = g_{ij}(x)(d_x s_j)(v) + \underbrace{(d_x g_{ij})(v) \cdot s_j(x)}_{=0 \text{ en } x = x_0 \text{ pues } s_j(x_0) = 0}$ $\rightsquigarrow d_{x_0}s_i(v)$ bien definido!
$$\Rightarrow (d_{x_0}\varphi_M)(v) \overset{\text{Leibniz}}{=} \left(\frac{(d_{x_0}s_1)(v)}{s_0(x_0)}, \dots, \frac{(d_{x_0}s_n)(v)}{s_0(x_0)}\right)$$
y luego $d_{x_0}\varphi_M$ inyectiva $\Leftrightarrow$ ②. ■

Usando el lenguaje de sistemas lineales, podemos generalizar el Teorema de Bertini:

Teorema: Sup. que $\mathrm{car}(k) = 0$, y sea X una variedad algebraica suave. Sea $M \subseteq H^0(X, L)$ un sistema lineal. Entonces, para $s \in M$ sección general la variedad
$$V(s) := \{x \in X \text{ tq } s(x) = 0\} \subseteq X$$
es suave si M es libre de puntos de base.

Dem: Consideremos la variedad de incidencia
$$\begin{array}{c} I = \{(s,x) \in M \times X \text{ tq } s(x) = 0\} \\ {}^{p_1}\swarrow \quad \searrow^{p_2} \\ M \qquad\qquad X \end{array}$$

Como M sin puntos de base, $p_2^{-1}(x) = M_x \in |M|$ hiperplano $\simeq \mathbb{P}^{n-1}$ $\forall x \in X$. Además, $p_2 : I \to X$ es localmente trivial (ie, existe $X = \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$ cubrimiento abierto tq $p_2^{-1}(\mathcal{U}_i) \cong \mathcal{U}_i \times \mathbb{P}^{n-1}$) $\Rightarrow I$ es suave. Luego, por el Teorema de suavidad genérica, la fibra $p_1^{-1}(s) = V(s)$ es suave para $s \in M \cong \mathbb{A}^{n+1}$ general. ■

Ejemplo (Bertini): Sea $X \overset{f}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^n$ variedad proyectiva suave de $\dim(X) \geq 1$ y consideremos $L = f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) := \mathcal{O}_X(1)$. Entonces, la restricción de secciones define un sistema lineal

$$M := \operatorname{Im}\left(\Gamma(f) : H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \cong k^{n+1} \longrightarrow H^0(X, L),\ s \mapsto s|_X\right)$$ sin puntos de base.

$\Rightarrow V(s) = X \cap H_s$ sección hiperplana, es suave para $s \in M$ general.

⚠ Terminología: En Geometría Algebraica, el término "Positividad" suele asociarse al estudio de sistemas lineales con "muchas secciones". A continuación algunas nociones importantes:

Def: Sea X una variedad algebraica y $L \in \operatorname{Pic}(X)$ fibrado en rectas, con $\varphi_L : X \dashrightarrow \mathbb{P}(H^0(X,L)^*)$ la aplicación racional asociada. Decimos que L es:

① Globalmente generado (o libre de puntos de base): si φ_L es un morfismo regular, ie, si $Bs(L) = \{x \in X \text{ tq } s(x) = 0\ \forall s \in H^0(X,L)\} = \emptyset$.

② Semi-amplio: si $L^{\otimes m}$ es globalmente generado para cierto $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

③ Muy amplio: si $\varphi_L : X \hookrightarrow \mathbb{P}(H^0(X,L)^*)$ incrustamiento cerrado, ie, L separa puntos y tangentes.

④ Amplio: si $L^{\otimes m}$ es muy amplio para cierto $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

Aquí, suponemos que $\dim_k H^0(X,L)$ es finita. En general, decimos que L es amplio (resp. muy amplio, etc) si existe $M \subseteq H^0(X,L)$ sistema lineal amplio (resp. muy amplio, etc).

⚠ Conclusión: Una variedad algebraica X es proyectiva si y sólo si existe $L \in \operatorname{Pic}(X)$ amplio.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sean $L, M \in \operatorname{Pic}(X)$ fibrados en recta en una variedad alg. X. Probar que si L es muy amplio y M globalmente generado, entonces $L \otimes M$ es muy amplio.

Definición (Iitaka, 1970): Sea X una variedad algebraica y $L \in \operatorname{Pic}(X)$ fibrado en rectas. Definimos la dimensión de Iitaka de L por

$$\kappa(L) = \begin{cases} \max\limits_{m \in \mathbb{N}^{\geq 1}} \dim\left(\overline{\varphi_{L^{\otimes m}}(X)}\right) & \text{si existe } m_0 \in \mathbb{N}^{\geq 1} \text{ tq } H^0(X, L^{\otimes m_0}) \neq \{0\} \\ -\infty & \text{si } H^0(X, L^{\otimes m}) = \{0\} \text{ para todo } m \in \mathbb{N}^{\geq 1}. \end{cases}$$

Luego, $\kappa(L) \in \{-\infty, 0, 1, \ldots, \dim(X)\}$ y decimos que L es big si $\kappa(L) = \dim(X)$.

En general, tenemos que:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Globalmente generado} & \Rightarrow & \text{Semi-amplio} & \Rightarrow & \kappa(L) \geq 0 \\ \Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\ \text{Muy amplio} & \Rightarrow & \text{Amplio} & \Rightarrow & \text{Big} \end{array}$$

Cultura general (Resultado importante, sin demostración):

Teorema (Zariski, 1962): Sea X una variedad algebraica proyectiva normal y $L \in \operatorname{Pic}(X)$ un fibrado en rectas tal que $Bs(L)$ es un conjunto finito. Entonces, L es semi-amplio.

En general, decimos que un fibrado en rectas $L \in \operatorname{Pic}(X)$ es móvil si $\operatorname{codim}_X(Bs(L)) \geq 2$. Luego, el resultado anterior nos dice que en una superficie proyectiva normal, todo fibrado en rectas móvil es semi-amplio.

§23. Divisores de Weil y divisores de Cartier

En esta sección, veremos como el lenguaje de "divisores" (introducido por Dedekind y Weber) nos permite en muchos casos calcular $\mathrm{Pic}(X)$.

Recuerdo (ver §19): Sea X una variedad alg. irreducible y sea $Y \subseteq X$ una hipersuperficie irreducible. Supongamos que:

$$(*) \quad \mathrm{codim}_X(\mathrm{Sing}(X)) \geq 2 \quad (\text{eg. } X \text{ es normal}).$$

Luego, $X_{reg} \cap Y \neq \emptyset$ y podemos considerar $y \in Y$ punto suave en X. Así, existe una vecindad afín $\mathcal{U} \subseteq X$ de $y \in X$ y un elemento irreducible (ecuación local) $u \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$ tal que $\mathcal{I}(Y \cap \mathcal{U}) = \langle u \rangle$. En particular, dado que $k(X) \cong k(\mathcal{U}) \cong \mathrm{Fr}(\mathcal{O}(\mathcal{U}))$, se tiene que toda función racional no-nula $f: X \dashrightarrow k$ puede escribirse como

$$f = \frac{g}{h} = \frac{u^a g'}{u^b h'} = u^m \frac{g'}{h'}, \quad \text{donde } m = a-b \in \mathbb{Z} \text{ y } g', h' \notin \mathcal{I}(Y \cap \mathcal{U}).$$

Además, $m \geq 0$ si $f \in \mathcal{O}_{X,y}$ es regular en $y \in X$.

Luego, definimos la <u>multiplicidad</u> de $f \in k(X) \setminus \{0\}$ a lo largo de Y como $\nu_Y(f) := m \in \mathbb{Z}$.

Decimos que f tiene un <u>cero</u> (resp. <u>polo</u>) a lo largo de Y si $\nu_Y(f) > 0$ (resp. $\nu_Y(f) < 0$).

La discusión anterior motiva la siguiente definición:

<u>Def</u>: Sea X variedad alg. irreducible normal (o tal que $(*)$). Un <u>divisor de Weil</u> es una expresión de la forma

$$D = \sum_{\text{finita}} n_Y \cdot Y, \quad \text{con } n_Y \in \mathbb{Z} \text{ e } Y \subseteq X \text{ hipersuperficie irreducible.}$$

En otras palabras, es una combinación lineal entera "formal" de hipersuperficies irreducibles de X. Denotamos por $\mathrm{WDiv}(X)$ al grupo abeliano de divisores de Weil en X.

<u>Lema</u>: Sea X variedad alg. irreducible normal (o tal que $(*)$) y sea $f \in k(X) \setminus \{0\}$. Entonces, existen <u>finitas</u> hipersuperficies irreducibles $Y \subseteq X$ tal que $\nu_Y(f) \neq 0$.

<u>Dem</u>: Sea $\mathcal{U} = \mathrm{Dom}(f) \subseteq X$ el abierto denso donde f es regular, y sea $Y \subseteq X$ hipersup. irreducible. Entonces:

<u>Caso 1</u>: $Y \subseteq X \setminus \mathcal{U} := Z$ cerrado, y luego tiene finitas componentes irreducibles ✓

<u>Caso 2</u>: $Y \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ y luego $\nu_Y(f) \geq 0$ por definición. Además, $\nu_Y(f) > 0$ implica que $Y \subseteq V(f)$, y este último tiene finitas componentes irreducibles ✓ ∎

<u>Ejemplo principal</u>: Sea X variedad alg. irreducible normal y sea $f \in k(X) \setminus \{0\}$. Definimos el divisor de Weil asociado a f como

$$\mathrm{div}(f) := \sum_{\substack{Y \subseteq X \\ \text{hip. irred}}} \nu_Y(f) \cdot Y = \underbrace{\mathrm{div}(f)_+}_{\text{ceros de } f} - \underbrace{\mathrm{div}(f)_-}_{\text{polos de } f}$$

Notar que si $g \in k(X) \setminus \{0\}$, entonces $\mathrm{div}(fg) = \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(g)$ $\boxed{\text{Ejercicio}}$. Así, obtenemos un morfismo de grupos abelianos $\mathrm{div}: k(X)^* \longrightarrow \mathrm{WDiv}(X)$, cuya imagen es

$$\mathrm{PrWDiv}(X) := \{D \in \mathrm{WDiv}(X) \text{ tq } \exists f \in k(X)^* \text{ con } D = \mathrm{div}(f)\}$$

es subgrupo (normal) de <u>divisores</u> (de Weil) <u>principales</u>.

⚠ <u>Importante</u>: Más generalmente, si $L \xrightarrow{p} X$ es un fibrado en rectas y $s: X \dashrightarrow L$ es una <u>sección racional</u> (ie, s aplicación racional tq $p \circ s = \mathrm{Id}_X$) no-nula, entonces podemos asociarle un divisor de Weil $\mathrm{div}(s)$ (que no necesariamente es principal si $L \not\cong \mathcal{O}_X$):

s está dada por $\{s_i \in k(\mathcal{U}_i)\}_{i \in I}$ donde $X = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$ (trivialización de L) y donde $s_i = g_{ij} s_j$ en $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \Rightarrow \nu_{Y|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j}}(s_i) = \underbrace{\nu_{Y|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j}}(g_{ij})}_{=0} + \nu_{Y|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j}}(s_j)$ bien definido!

Ejemplos: ① En $\mathbb{P}^n$, denotamos por $H_i = \{x_i = 0\} \cong \mathbb{P}^{n-1}$ hiperplano. Entonces, el divisor principal asociado a la función racional $f(x) = \frac{x_i}{x_j}$ es $\mathrm{div}(f) = H_i - H_j$. Por otra parte, el divisor asociado a la sección $s = x_i \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$ es $\mathrm{div}(s) = H_i$ que no es principal!

② En el cono $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{A}^3 \text{ tq } z^2 = xy\}$, el divisor principal asociado a la función regular $f = x \in \mathcal{O}(X)$ es $\mathrm{div}(f) = 2L$, donde $L \subseteq X$ es la recta de ecuaciones $x = z = 0$.

Ejercicio importante: Sea X una variedad alg. suave e irreducible y sea $f \in k(X) \setminus \{0\}$. Probar que $f \in \mathcal{O}(X)$ es regular si y sólo si todos los coeficientes de $\mathrm{div}(f)$ son ≥ 0. Deducir que para todo $d \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ el divisor dH_0 en $\mathbb{P}^n$ no es principal.

Terminología: Sea $Y \subseteq X$ una hipersuperficie irreducible, entonces el divisor de Weil $Y := 1 \cdot Y \in \mathrm{WDiv}(X)$ es llamado un divisor primo. Más generalmente, decimos que un divisor de Weil $D = \sum n_i Y_i$ es un divisor efectivo si $n_i \geq 0$ para todo i: "$D \geq 0$".

Es natural tratar de medir si todo divisor de Weil es principal o no:

Def: Sea X variedad alg. irreducible normal (o tal que (★)). Definimos el grupo de clases de X mediante

$$\mathrm{Cl}(X) := \mathrm{coker}(\mathrm{div}) = \mathrm{WDiv}(X) / \mathrm{PrWDiv}(X).$$

Más aún, decimos que $D_1, D_2 \in \mathrm{WDiv}(X)$ son linealmente equivalentes si existe $f \in k(X)^*$ tal que $D_1 - D_2 = \mathrm{div}(f)$ (ie, $[D_1] = [D_2]$ en $\mathrm{Cl}(X)$), y escribimos $D_1 \sim D_2$.

Ejemplos: ① En $\mathbb{P}^n$, $H_i \sim H_j$. Más generalmente, si $Y_d = V(P) \subseteq \mathbb{P}^n$ hipersuperficie irred. definida por P homogéneo de grado d, entonces $f(x) = P(x)/x_0^d \in k(\mathbb{P}^n)$ y tenemos $\mathrm{div}(f) = Y_d - dH_0$, ie, $Y_d \sim dH_0$. Luego, $\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}[H_0]$ está generado por la clase del hiperplano H_0. Como $[dH_0] \neq 0 \ \forall d \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, tenemos que $\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}$.

② En $\mathbb{A}^n$, sea $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ hipersuperficie irreducible. Entonces, $\mathcal{I}(Y) = \langle u \rangle$ es un ideal principal (primo) de $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$. Por definición, $\nu_Y(u) = 1$ y $\mathrm{div}(u) = Y$. Luego, todo divisor de Weil de $\mathbb{A}^n$ es principal, ie, $\mathrm{Cl}(\mathbb{A}^n) = \{0\}$. Más generalmente, si X variedad alg. normal irreducible afín, entonces $\mathrm{Cl}(X) = \{0\} \iff \mathcal{O}(X)$ es un dominio de factorización única.

Prop: Sea X variedad alg. irreducible normal (o tal que (★)). Sea $Z \subsetneq X$ un cerrado propio y sea $\mathcal{U} = X \setminus Z$ abierto denso. Entonces:

① La restricción $\mathrm{Cl}(X) \xrightarrow{\text{res}} \mathrm{Cl}(\mathcal{U})$, $D = \sum n_i Y_i \mapsto D|_{\mathcal{U}} := \sum n_i (Y_i \cap \mathcal{U})$ es sobreyectiva, donde $n_i = 0$ en $D|_{\mathcal{U}}$ si $Y_i \cap \mathcal{U} = \phi$.

② Si $\mathrm{codim}_X(Z) \geq 2$, entonces $\mathrm{Cl}(X) \cong \mathrm{Cl}(\mathcal{U})$.

③ Si $Y_1, \ldots, Y_r$ son las componentes irreducibles de codimensión 1 de Z, entonces la sucesión

$$\bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}[Y_i] \xrightarrow{i} \mathrm{Cl}(X) \xrightarrow{\text{res}} \mathrm{Cl}(\mathcal{U}) \to 0$$

es exacta. (subgrupo generado por $[Y_i]$)

Dem: Para ① notamos que si $Y \subseteq X$ divisor primo, entonces $Y \cap \mathcal{U}$ es vacío o bien un divisor primo en $\mathcal{U}$. Además, si $f \in k(X)^*$ con $\mathrm{div}(f) = \sum n_i Y_i$, entonces al considerar $f \in k(\mathcal{U})^*$ se tiene $\mathrm{div}(f) = \sum n_i (Y_i \cap \mathcal{U})$ en $\mathrm{WDiv}(\mathcal{U})$, y luego obtenemos un morfismo $\mathrm{Cl}(X) \xrightarrow{\text{res}} \mathrm{Cl}(\mathcal{U})$. Dicho morfismo es sobreyectivo, pues si $Y_{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{U}$ divisor primo entonces $Y_{\mathcal{U}} = Y|_{\mathcal{U}}$, con $Y = \overline{Y_{\mathcal{U}}} \subseteq X$ ✓.

Para ② y ③ notamos que $\mathrm{WDiv}(X)$ y $\mathrm{Cl}(X)$ dependen sólo de subconjuntos cerrados de codimensión 1, y que el kernel de $\mathrm{Cl}(X) \twoheadrightarrow \mathrm{Cl}(\mathcal{U})$ está generado por los $Y_1, \ldots, Y_r$. ■

Ejemplos: ① Sea $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{A}^n$ abierto no-vacío, entonces $Cl(\mathcal{U}) = \{0\}$.

② Sea $Y_d \subseteq \mathbb{P}^n$ hipersuperficie de grado d. Entonces, $Y_d \sim dH$ y la sucesión exacta
$\mathbb{Z}[Y_d] \cong d\mathbb{Z} \to Cl(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z} \to Cl(\mathbb{P}^n \setminus Y_d) \to 0$ implica que $Cl(\mathbb{P}^n \setminus Y_d) \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

③ En $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, consideramos las rectas $L_2 = \mathbb{P}^1 \times \{pt\}$ y $L_1 = \{pt\} \times \mathbb{P}^1$. Entonces, $(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \setminus (L_1 \cup L_2) =: \mathcal{U}$ es isomorfo a $\mathbb{A}^2 \Rightarrow \{0\} = Cl(\mathcal{U}) \cong Cl(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)/(\mathbb{Z}[L_1] \oplus \mathbb{Z}[L_2])$, i.e., $Cl(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ está generado por $[L_1]$ y $[L_2]$ (Obs: veremos después que $Cl(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) \cong \mathbb{Z}^2$).

④ Sea X var. alg. suave e irreducible y sea $Z \subseteq X$ subvar. suave e irreducible tal que $\operatorname{codim}_X(Z) \geq 2$. Si $\varepsilon : Bl_Z(X) \to X$ es el blow-up de $Z \subseteq X$ con divisor excepcional $E = \varepsilon^{-1}(Z)$, entonces $Cl(X) \cong Cl(X \setminus Z) \cong Cl(Bl_Z(X) \setminus E)$ y luego $Cl(Bl_Z(X)) \cong Cl(X) \oplus \mathbb{Z}[E]$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{A}^3 \text{ tq } z^2 = xy\}$ cono en $\mathbb{A}^3$ y $L = \{x = z = 0\}$ recta en X. Probar que $Cl(X) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ generado por $[L]$ (que cumple $[2L] = 0$ en $Cl(X)$).
[Indicación: Probar que L no es un divisor principal (cf. §17, pág 60) y que $X \setminus L \cong \mathcal{U} \subseteq \mathbb{A}^2$ abierto.]

Para relacionar los grupos $Cl(X)$ y $Pic(X)$ se requiere la noción de divisor de Cartier:

Def: Sea X una variedad alg. irreducible. Una familia $(\mathcal{U}_i, f_i)_{i \in I}$ dada por $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ cubrimiento abierto de X y $f_i \in k(\mathcal{U})^*$ funciones racionales no-nulas es admisible si
$$f_i / f_j \in \mathcal{O}_X^*(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \quad \forall i, j \in I,$$
i.e., f_i/f_j es una función regular que no se anula en $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$. Más aún, diremos que dos familias admisibles son equivalentes si su unión es admisible.
Un divisor de Cartier en X es $D = [(\mathcal{U}_i, f_i)_{i \in I}]$ una clase de equivalencia de familias admisibles, y denotamos por $Div(X)$ al conjunto de divisores de Cartier en X.

⚠ Importante: Si $D = [(\mathcal{U}_i, f_i)_{i \in I}]$ es un divisor de Cartier y $\bigcup_{j \in J} V_j = X$ cubrimiento abierto de X, entonces $(\mathcal{U}_i, f_i)_{i \in I} \sim (\mathcal{U}_i \cap V_j, f_i|_{\mathcal{U}_i \cap V_j})_{(i,j) \in I \times J}$. En particular, siempre podemos suponer que dos divisores de Cartier están definidos en el mismo cubrimiento.
Con ello, observamos que $Div(X)$ es un grupo abeliano:

Dados $D = [(\mathcal{U}_i, f_i)]$, $D' = [(\mathcal{U}_i, g_i)]$ en $Div(X)$, definimos

i) $-D := [(\mathcal{U}_i, 1/f_i)]$.

ii) $D + D' := [(\mathcal{U}_i, f_i g_i)]$.

iii) $0 := [(X, 1)]$. $\boxed{\text{Ejercicio}}$ $D = 0 \iff f_i \in \mathcal{O}_X^*(\mathcal{U}_i) \; \forall i \in I$.

$\Big\}$ $Div(X) \cong \Gamma(X, \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*)$ ¡haz cociente!

Más aún, decimos que D es un divisor efectivo si $f_i \in \mathcal{O}_X(\mathcal{U}_i)$ es regular $\forall i \in I$: $D \geq 0$.

Def: Sea X una variedad alg. irreducible y $D = [(\mathcal{U}_i, f_i)_{i \in I}]$ un divisor de Cartier. Decimos que D es un divisor (de Cartier) principal si $D = [(X, f)]$ para cierta $f \in k(X)^*$, y denotamos por $PDiv(X)$ al subgrupo (normal) de divisores principales. Más aún, si $D' \in Div(X)$, decimos que D y D' son linealmente equivalentes si $D - D'$ es un divisor principal y en tal caso escribimos $D \sim D'$.

Teorema: Sea X una variedad alg. irreducible normal (o tal que (✱)). Entonces, hay un morfismo de grupos inyectivo $\varphi : Div(X) \hookrightarrow WDiv(X)$ que además cumple que la imagen de un divisor principal es principal, i.e., $\varphi(PDiv(X)) \subseteq PrWDiv(X)$.
Más aún, si X es suave entonces $Div(X) \cong WDiv(X)$.

Dem: Sea $D = [(\mathcal{U}_i, f_i)_{i \in I}] \in Div(X)$ un divisor de Cartier. Consideremos $\hat{D} \in WDiv(X)$

divisor de Weil, definido por $\hat{D} := \sum_{Y \subseteq X} m_Y \cdot Y$ donde $m_Y := \nu_Y(f_i) \in \mathbb{Z}$ para <u>cualquier</u> $i \in I$ tq $Y \cap \mathcal{U}_i \neq \emptyset$ (indep. de $i \in I$ pues $f_i/f_j \in \mathcal{O}_X^*(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$). Obtenemos así $\varphi : \mathrm{Div}(X) \to \mathrm{WDiv}(X), D \mapsto \hat{D}$.
Más aún, si $D = [(X,f)]$ es principal, entonces $\hat{D} = \mathrm{div}(f)$ es principal ✓ Por otro lado, (✱) implica que si $\nu_Y(f_i) = 0$ $\forall Y \subseteq X$ divisor primo $\Rightarrow f_i \in \mathcal{O}_X^*(\mathcal{U}_i)$, ie, $D = 0$ en $\mathrm{Div}(X)$ ✓
Finalmente, si X es <u>suave</u> y $Y \subseteq X$ divisor primo: Dado que $\mathcal{O}_{X,x}$ es factorial $\forall x \in X$, existe un cubrimiento abierto $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ de X tq $\mathcal{I}(Y \cap \mathcal{U}_i) = \langle f_i \rangle$ ideal principal. Así, el divisor de Cartier $D_Y = [(\mathcal{U}_i, f_i)]$ verifica $\varphi(D_Y) = Y$. En part, todo divisor de Weil <u>efectivo</u> es de Cartier. Por otro lado, todo divisor de Weil es diferencia de divisores de Weil efectivos. ■

<u>Ejercicio</u> Sea $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{A}^3 \text{ tq } z^2 = xy\}$ cono y $L = \{x = z = 0\}$ recta en X. Probar que $L \in \mathrm{WDiv}(X)$ <u>no</u> es de Cartier (ie, no es "localmente principal"), pero $2L$ <u>sí</u> es de Cartier.

<u>Obs</u>: Una variedad alg irreducible X es <u>localmente factorial</u> si $\mathcal{O}_{X,x}$ es factorial $\forall x \in X$ (eg. X suave). En tal caso, $\mathrm{Div}(X) \cong \mathrm{WDiv}(X)$. Más generalmente, X es <u>$\mathbb{Q}$-factorial</u> si para todo $D \in \mathrm{WDiv}(X)$ existe $m = m(D) \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tal que mD es de Cartier.

<u>Construcción</u> ($\mathcal{O}_X(D)$ y $s_D : X \dashrightarrow \mathcal{O}_X(D)$):
Sea X var. alg. irreducible y $D = [(\mathcal{U}_i, f_i)_{i \in I}] \in \mathrm{Div}(X)$ divisor de Cartier. En $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$ definimos $g_{ij} := f_i / f_j \in \mathcal{O}_X^*(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$. Entonces, $g_{ij} g_{jk} = g_{ik}$ (cond. de cociclo) y luego D define un fibrado en rectas $\mathcal{O}_X(D) \in \mathrm{Pic}(X)$.
Por otro lado, recordemos que una <u>sección racional</u> de $L = \mathcal{O}_X(D)$ es $s : X \dashrightarrow \mathcal{O}_X(D)$ dada por $\{s_i \in k(\mathcal{U}_i)\}_{i \in I}$ con $s_i = g_{ij} s_j$ en $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$. Luego, los $s_i := f_i \in k(\mathcal{U}_i)$ definen tautológicamente una sección racional $s_D : X \dashrightarrow \mathcal{O}_X(D)$.

<u>Teorema</u>: Sea X variedad alg. irreducible. Entonces, $\pi : \mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Pic}(X)$, $D \mapsto \mathcal{O}_X(D)$ induce un <u>isomorfismo</u> $\hat{\pi} : \mathrm{Div}(X)/\mathrm{PDiv}(X) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Pic}(X)$. En part, $D_1 \sim D_2 \Leftrightarrow \mathcal{O}_X(D_1) \cong \mathcal{O}_X(D_2)$.

<u>Dem</u>: Si $D = [(X,f)]$ es principal, entonces $g_{ij} = 1$, ie, $\mathcal{O}_X(D) \cong \mathcal{O}_X$ es trivial en $\mathrm{Pic}(X)$.
$\Rightarrow \pi$ induce $\hat{\pi} : \mathrm{Div}(X)/\mathrm{PDiv}(X) \to \mathrm{Pic}(X)$, $[D] \mapsto \mathcal{O}_X(D)$. Veamos que:
i) <u>$\hat{\pi}$ inyectiva</u>: Sea $D = [(\mathcal{U}_i, f_i)_{i \in I}] \in \mathrm{Div}(X)$ tal que $\mathcal{O}_X(D) \cong \mathcal{O}_X$ es trivial. Entonces, existe $s \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ sección que no se anula <u>nunca</u>, ie, está dada por $\{s_i\}_{i \in I}$ con $s_i \in \mathcal{O}_X^*(\mathcal{U}_i)$ tq $s_i = g_{ij} s_j \underset{\text{def}}{=} \frac{f_i}{f_j} s_j$ en $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$ $\Rightarrow f := \frac{f_i}{s_i} = \frac{f_j}{s_j}$ define una función racional $f \in k(X)^*$ que (por construcción) verifica $[(X,f)] = D$, ie, D es principal ✓
ii) <u>$\hat{\pi}$ sobreyectiva</u>: Sea $L \in \mathrm{Pic}(X)$ dado por funciones de transición $g_{ij} \in \mathcal{O}_X^*(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$ en una trivialización $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$. Fijamos un índice $k \in I$ y definimos $f_i := g_{ik} \in k(\mathcal{U}_i)^*$. Consideramos $D = [(\mathcal{U}_i, f_i)_{i \in I}]$ divisor de Cartier, con $\mathcal{O}_X(D)$ def. por $h_{ij} = f_i / f_j = g_{ik} / g_{jk} \overset{\text{cociclo}}{=} g_{ij}$, ie, $\mathcal{O}_X(D) \cong L$ ■

<u>Resumen</u>: Sea X una variedad alg. irreducible normal (o tal que (✱)). Entonces:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(D) & \mathrm{Pic}(X) = \{\text{fibr. en rectas}\}/\text{isom.} \arrow[rr, "\cong"] & & \{\text{Haces invertibles}\} \\
 & & L \arrow[r, mapsto] & \mathcal{L}, \text{ con } \mathcal{L}(\mathcal{U}) := H^0(\mathcal{U}, L_{\mathcal{U}}) \\
{[D]} \arrow[uu, mapsto] & \mathrm{Div}(X)/\mathrm{PDiv}(X) \arrow[uu, "\cong"'] \arrow[rr, hook, "(\ast\ast)"] & & \mathrm{Cl}(X) := \mathrm{WDiv}(X)/\mathrm{PrWDiv}(X) \\
\Gamma(X, \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*) \cong & \mathrm{Div}(X) = \{\text{Div. de Cartier}\} \arrow[u, two heads] \arrow[rr, hook, "(\ast\ast)"] & & \mathrm{WDiv}(X) = \{\text{Div. de Weil}\} \arrow[u, two heads] \\
 & D = [(\mathcal{U}_i, f_i)] \arrow[rr, mapsto] & & \hat{D} = \sum \nu_Y(f_i) Y
\end{tikzcd}$$

Más aún, si X es <u>suave</u> (o localmente factorial) entonces (✱✱) son isomorfismos.

Terminemos la sección con algunas observaciones importantes, ejemplos y aplicaciones de lo anterior:

<u>Observaciones importantes</u>: Sean X e Y variedades alg. irreducibles.

① Si $\varphi : Y \to X$ morfismo regular y $D = [(\mathcal{U}_i, f_i)_{i\in I}] \in \mathrm{Div}(X)$ divisor de Cartier. Entonces, podemos considerar el pullback $\varphi^* \mathcal{O}_X(D) \in \mathrm{Pic}(Y)$ como fibrados en rectas. Por otro lado, la familia $(\varphi^{-1}(\mathcal{U}_i), \varphi^*(f_i))_{i\in I}$ define un divisor de Cartier $\varphi^* D \in \mathrm{Div}(Y)$ en Y siempre y cuando $\varphi^*(f_i) \underset{\mathrm{def}}{=} f_i \circ \varphi \neq 0$ en $\varphi^{-1}(\mathcal{U}_i)$. Esto último ocurre, por ejemplo, si φ es dominante (pues $\varphi^* : k(X) \hookrightarrow k(Y)$ en ese caso). Además, por construcción, si $\varphi^* D$ está bien definido entonces $\varphi^* \mathcal{O}_X(D) \cong \mathcal{O}_Y(\varphi^* D)$ en $\mathrm{Pic}(Y)$.

② Históricamente, si $D = [(\mathcal{U}_i, f_i)_{i\in I}] \in \mathrm{Div}(X)$ divisor de Cartier, entonces el k-ev dado por $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ es llamado el <u>espacio de Riemann-Roch</u> de D (pues dicho Teorema busca calcular $\dim_k H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ o dar estimaciones): Notar que si $s \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \setminus \{0\}$ está dada por las $\{s_i\}_{i\in I}$ con $s_i \in \mathcal{O}_X(\mathcal{U}_i)$ tq $s_i = g_{ij} s_j \underset{\mathrm{def}}{=} \frac{f_i}{f_j} s_j$ en $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \Rightarrow f := \frac{s_i}{f_i} = \frac{s_j}{f_j} \in k(X)^*$ es una función racional en X. Más aún, se tiene $f = s/s_D$ (cf. pág 81).

Sup. que X es normal (o tq (✱)), entonces $\mathrm{Div}(X) \hookrightarrow \mathrm{WDiv}(X)$, $D \mapsto \hat{D} := D$ inyectivo, y notamos que $\mathrm{div}(f) = \mathrm{div}(s) - \mathrm{div}(s_D) = \mathrm{div}(s) - D$. Así, $D \sim \mathrm{div}(s) \geqslant 0$ y en particular $\mathcal{O}_X(D) \cong \mathcal{O}_X(\mathrm{div}(s))$. Recíprocamente, si $D \sim D'$ entonces existe $f \in k(X)^*$ tq $D' - D = \mathrm{div}(f)$ $\Rightarrow s := f s_D$ es una sección racional de $\mathcal{O}_X(D)$ tal que $\mathrm{div}(s) = \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(s_D) = D'$. Además, s es <u>regular</u> si y sólo si $\mathrm{div}(s) \geqslant 0$ es efectivo. En resumen:

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \cong \{f \in k(X)^* \text{ tal que } \mathrm{div}(f) + D \geqslant 0\} \cup \{0\}.$$

<u>Caso particular importante</u>: Si además X es <u>proyectivo</u>, entonces para $f, g \in k(X)^*$ se tiene que $\mathrm{div}(f) = \mathrm{div}(g) \Leftrightarrow \mathrm{div}(f/g) = 0 \Leftrightarrow f/g$ regular (constante!) no-nula $\Leftrightarrow f = \lambda g$ cierto $\lambda \in k^*$. Luego, $\mathbb{P} H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \cong \{E \geqslant 0 \text{ efectivo tal que } E \sim D\}$ en este caso. Clásicamente, este último conjunto es denotado $|D|$ y se llama el <u>sistema lineal</u> del divisor D.

③ Sup. que $Y \overset{i}{\hookrightarrow} X$ divisor primo. Entonces, hay una sucesión exacta de $\mathcal{O}_X$-módulos

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow 0$$

donde $\mathcal{O}_Y := i_* \mathcal{O}_Y$ por abuso de notación (cf. §7, pág 24). Si X es <u>suave</u> podemos considerar $D = [(\mathcal{U}_i, f_i)_{i\in I}]$ divisor de Cartier asociado a Y, donde $\mathcal{I}(\mathcal{U}_i \cap Y) = \langle f_i \rangle$. Entonces, el fibrado en rectas $\mathcal{O}_X(D) \cong \mathcal{O}_X(Y)$ tiene funciones de transición $g_{ij} := f_i / f_j$ y su dual $L := \mathcal{O}_X(-D)$ tiene funciones $h_{ij} = 1/g_{ij} = f_j / f_i$.

$\Rightarrow$ Una sección (local) $s \in \mathcal{L}(\mathcal{U}) := H^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X(-D)|_{\mathcal{U}})$ está dada por $\{s_i\}_{i\in I}$ con $s_i \in \mathcal{O}_X(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}_i)$ tq $s_i = h_{ij} s_j = \frac{f_j}{f_i} s_j$, y luego s define $f_s := s_i f_i = s_j f_j$ <u>regular</u> que se anula en Y (ie, $f_s \in \mathcal{I}_Y(\mathcal{U})$). Así, obtenemos un morfismo inyectivo de $\mathcal{O}_X$-módulos $\mathcal{L} \hookrightarrow \mathcal{O}_X$, $s \mapsto f_s$ cuya imagen es $\mathcal{I}_Y$. En part, si identificamos $\mathcal{I}_Y \cong \mathcal{L} \cong \mathcal{O}_X(-D)$ obtenemos la sucesión exacta de $\mathcal{O}_X$-módulos

$$0 \to \mathcal{O}_X(-D) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_D \to 0.$$

Más generalmente, si $D = \sum m_i Y_i$ divisor <u>efectivo</u> entonces se tiene la misma sucesión exacta, pero $\mathcal{O}_D$ es el cociente de $\mathcal{O}_X$ por el ideal de funciones regulares que se anulan en Y_i con multiplicidad $\geqslant m_i$ (cf. $H^0(X, \mathcal{O}_X(-D)) \cong \{f \in k(X)^* \text{ tq } \mathrm{div}(f) \geqslant D\} \cup \{0\}$ por ②).

<u>Ejemplos y cálculos explícitos</u>: Podemos reinterpretar los ejemplos de las páginas 79 y 80:

① Sea $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{A}^n$ abierto no-vacío, entonces $\mathrm{Pic}(\mathcal{U}) \cong \{0\}$. (cf. Teorema de Quillen-Suslin 1976).

② $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n) \cong \mathrm{Cl}(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}[H] \cong \mathbb{Z}$, donde $H \subseteq \mathbb{P}^n$ hiperplano. Explícitamente, para $d \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, si $s \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \setminus \{0\}$ define $Y_d = V(s) \subseteq \mathbb{P}^n$ hipersup. de grado $d \Rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(Y_d) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ y luego $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n)$ está generado por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(H) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$. Más aún, el sistema lineal

$$|Y_d| = \{E \geqslant 0 \text{ tq } E \sim Y_d\} \cong \mathbb{P} H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$$

parametriza hipersuperficies de grado d en $\mathbb{P}^n$. Además, $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n \setminus Y_d) \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

③ Sea $S=\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ con coord. $([x_0,x_1],[y_0,y_1])$ y consideramos los fibrados en rectas $L_i:=pr_i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$
$\Rightarrow H^0(S,L_1)\cong \mathrm{Vect}_k\langle x_0,x_1\rangle$ y $H^0(S,L_2)\cong\mathrm{Vect}_k\langle y_0,y_1\rangle$. En part, $L_i^{\otimes m}\neq 0$ en $\mathrm{Pic}(S)$ (pues $H^0(S,\mathcal{O}_S)\cong k$). Además, si $s_i\in H^0(S,L_i)\setminus\{0\}$ entonces $V(s_1)=\{pt\}\times\mathbb{P}^1$ y $V(s_2)=\mathbb{P}^1\times\{pt\}$ son rectas que generan $\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1)\cong\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1)$ (ver Ejemplo ③ en pág 81). Luego, tenemos que $\mathbb{Z}^2\xrightarrow{\sim}\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1)$, $(a,b)\mapsto\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(a,b):=pr_1^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a)\otimes pr_2^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b)$ es un isomorfismo.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^m)\cong\mathbb{Z}^2$.

④ Sea X var. alg. suave e irreducible, y sea $Z\subseteq X$ subvar. suave e irreducible tal que $\mathrm{codim}_X(Z)\geq 2$. Si $\varepsilon:\tilde{X}=Bl_Z(X)\to X$ es el blow-up de $Z\subseteq X$ con divisor excepcional $E=\varepsilon^{-1}(Z)$, entonces el Ejemplo ④ en pág. 81 implica que el morfismo

$$\mathrm{Pic}(X)\oplus\mathbb{Z}\twoheadrightarrow\mathrm{Pic}(\tilde{X}),\ (L,m)\mapsto\varepsilon^*L\otimes\mathcal{O}_{\tilde{X}}(mE)$$

es sobreyectivo. De hecho, es un isomorfismo pues $\forall m\in\mathbb{N}^{\geq1}$ se tiene que $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(mE)\neq 0$ en $\mathrm{Pic}(\tilde{X})\cong\mathrm{Cl}(\tilde{X})$: si $g\in k(\tilde{X})^*$ es tal que $\mathrm{div}(g)=mE$ en $\mathrm{WDiv}(\tilde{X})$, entonces el isom. $\varepsilon^*:k(X)\xrightarrow{\sim}k(\tilde{X})$ permite considerar $G:=(\varepsilon^*)^{-1}(g)\in k(X)^*$ que cumple $\mathrm{div}(G)=0$ en $\mathrm{WDiv}(X)$
$\Rightarrow G$ es regular y no se anula nunca, y luego $g=\varepsilon^*(G)=G\circ\varepsilon$ también, ie, $m=0$.
Así, tenemos que $\mathrm{Pic}(\tilde{X})=\varepsilon^*\mathrm{Pic}(X)\oplus\mathbb{Z}\,\mathcal{O}_{\tilde{X}}(E)$. Por ejemplo, $\mathrm{Pic}(Bl_{p_1,\dots,p_r}(\mathbb{P}^2))\cong\mathbb{Z}^{r+1}$.

⑤ Sea X var. alg. proyectiva suave e irreducible. Sup. que existe $\mathcal{U}\subseteq X$ abierto no-vacío tq $\mathcal{U}\cong V\subseteq\mathbb{A}^n$ abierto (ie, X es racional: ver §13, pág 46) y sup. que $D:=X\setminus\mathcal{U}$ es una hipersuperficie irreducible. Entonces, la sucesión exacta

$$\mathbb{Z}\,\mathcal{O}_X(D)\xrightarrow{i}\mathrm{Pic}(X)\xrightarrow{res}\underbrace{\mathrm{Pic}(\mathcal{U})}_{\cong\{0\}}\longrightarrow 0$$

implica que $\mathrm{Pic}(X)$ está generado por $\mathcal{O}_X(D)$. Más aún, dado que X es proyectiva existe $L\in\mathrm{Pic}(X)$ muy amplio y en particular $L^{\otimes m}\neq 0$ en $\mathrm{Pic}(X)$ $\forall m\in\mathbb{N}^{\geq1}$. Así, $\mathrm{Pic}(X)\cong\mathbb{Z}$ es cíclico infinito generado por $\mathcal{O}_X(D)$. En part, $\mathcal{O}_X(D)$ es amplio!

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ a) Sea $X=\{(x,y,z)\in\mathbb{A}^3 \text{ tq } z^2=xy\}$ cono en $\mathbb{A}^3$. Probar que $\mathrm{Pic}(X)\cong\{0\}$.
b) Probar que $\mathrm{Pic}(Gr(k,n))\cong\mathbb{Z}$.
c) Sea $Q^n\subseteq\mathbb{P}^{n+1}$ cuádrica suave de dimensión $n\geq3$. Probar que $\mathrm{Pic}(Q^n)\cong\mathbb{Z}$. ¿$Q^1$ y Q^2?
[Indicación: En a) usar $\mathrm{Pic}(X)\hookrightarrow\mathrm{Cl}(X)\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. En b) y c) usar Ejemplo ⑤ y §13, pág 46.]

Aplicaciones geométricas:

① Automorfismos de $\mathbb{P}^n$: Veamos que $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n)\cong PGL_{n+1}(k)$. Sea $f:\mathbb{P}^n\to\mathbb{P}^n$ automorfismo (birregular). Por un lado, f induce $f^*:\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n)$ automorfismo de $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n)\cong\mathbb{Z}$ y luego $f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\pm1)$ es un generador. Por otro lado, f induce un isomorfismo de k-ev $\Gamma(f):H^0(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))\xrightarrow{\sim}H^0(\mathbb{P}^n,f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$ y luego, dado que $H^0(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))\cong k^{n+1}$ y $H^0(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1))=\{0\}$, necesariamente $f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$.
Finalmente, vimos en §22 pág 74 que f está determinado por $L=f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$, y luego $f=\varphi_L$ es lineal! Así, $GL_{n+1}(k)\twoheadrightarrow\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n)$ y por ende $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n)\cong PGL_{n+1}(k)$.

② Divisores en curvas suaves: Sean C y C' curvas alg. proyectivas suaves e irreducibles. Así, un divisor de Weil en C es $D=\sum_{i=1}^r n_i p_i$ con $p_i\in C$ punto y $n_i\in\mathbb{Z}$. Definimos el grado de D como $\deg(D):=\sum_{i=1}^r n_i\in\mathbb{Z}$.

Por otro lado, si $f:C\to C'$ morfismo regular sobreyectivo, definimos el grado de f como el grado $[k(C):k(C')]$ de la extensión de cuerpos $f^*:k(C')\hookrightarrow k(C)$ (ie, como la $\dim_{k(C')}(k(C))=:\deg(f)<+\infty$).

El siguiente hecho algebraico (ver Hartshorne, Ch. II, Prop 6.9) dice que el número de puntos de una fibra $f^{-1}(y)$, contados con multiplicidad, es constante:

[Hecho: $\deg(F^*D) = \deg(F)\deg(D)$ para todo divisor $D \in \mathrm{Div}(C') \cong \mathrm{WDiv}(C')$.]

[Prop: Para todo $D \in \mathrm{PDiv}(C)$ se tiene $\deg(D) = 0$. En particular, deg induce un morfismo de grupos sobreyectivo $\deg : \mathrm{Pic}(C) \cong \mathrm{Div}(C)/\mathrm{PDiv}(C) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$, $L \cong \mathcal{O}_C(D) \mapsto \deg(L) := \deg(D)$

Dem: Sea $f : C \dashrightarrow k \cong \mathbb{A}^1 \cong \mathcal{U}_0 \subseteq \mathbb{P}^1$ y $F : C \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ la aplicación racional inducida. Dado que C es suave tenemos que $F : C \to \mathbb{P}^1$ es regular (ver §17, pág 60). Veamos que $\deg(\mathrm{div}(f))$ es 0: si f es constante, $\mathrm{div}(f) = 0$ y $\deg(\mathrm{div}(f)) = 0$ ✓ Sino, F es sobreyectivo y basta notar que $\mathrm{div}(f) = F^*(0-\infty)$ ($\underset{\text{Hecho}}{\Rightarrow} \deg(\mathrm{div}(f)) = \deg(F)\cdot\deg(0-\infty) = \deg(F)\cdot 0 = 0$ ✓): sean $\mathcal{U}_i = \{x_i \neq 0\} \cong \mathbb{A}^1$ $(i=0,1)$ abiertos estándar de $\mathbb{P}^1$. Entonces, el divisor de Cartier 0 en $\mathbb{P}^1$ está definido por la familia admisible $((\mathcal{U}_0, x_1/x_0), (\mathcal{U}_1, 1))$ y luego F^*0 está definido por $((F^{-1}(\mathcal{U}_0), f), (F^{-1}(\mathcal{U}_1), 1))$. Del mismo modo, $F^*\infty = ((F^{-1}(\mathcal{U}_0), 1), (F^{-1}(\mathcal{U}_1), 1/f))$ y luego $F^*(0-\infty)$ está dado por $((F^{-1}(\mathcal{U}_0), f), (F^{-1}(\mathcal{U}_1), f))$, ie, por $\mathrm{div}(f)$. ■

Consecuencias: ⓐ $\deg : \mathrm{Pic}(C) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ isomorfismo $\Leftrightarrow C \cong \mathbb{P}^1$:

En efecto, si deg es inyectivo y $p, q \in C$ distintos, entonces $\deg(\mathcal{O}_C(p-q)) = 0$ implica que $p \sim q$, ie, existe $f : C \dashrightarrow k$ no-nula tq $\mathrm{div}(f) = p - q$. Como antes, $F : C \to \mathbb{P}^1$ verifica $F^*0 = p$ y $F^*\infty = q$ $\underset{\text{Hecho}}{\Rightarrow} \underbrace{\deg(F^*0)}_{=1} = \deg(F)\underbrace{\deg(0)}_{=1} \Rightarrow \deg(F) = 1$.
$\Leftrightarrow k(C) \cong k(\mathbb{P}^1) \Leftrightarrow C \cong \mathbb{P}^1$ ✓

Así, si consideramos $\mathrm{Pic}^0(C) := \ker(\deg)$ entonces para $C \not\cong \mathbb{P}^1$ y $p_0 \in C$ fijo, la aplicación de Abel-Jacobi $\varphi : C \hookrightarrow \mathrm{Pic}^0(C)$, $p \mapsto \mathcal{O}_C(p - p_0)$ es inyectiva!

ⓑ Dado que C es proyectiva, para $L \cong \mathcal{O}_C(D)$ en $\mathrm{Pic}(C)$ tenemos que

$$|D| = \{E \geq 0 \text{ efectivo tq } D \sim E\} \cong \mathbb{P}H^0(X, L).$$

Luego, si L es globalmente generado (resp. muy amplio) entonces $\dim_k H^0(X,L) \geq 1$ (resp. ≥ 2) y existe $E \geq 0$ (resp. > 0) tal que $E \sim D$ y por ende $\deg(L) = \deg(D) = \deg(E) \geq 0$ (resp. > 0). Más aún, dado que $\deg(L^{\otimes m}) = m\deg(L)$, tenemos que $\deg(L) > 0$ si L es amplio.

③ Equivalencia numérica y grupo de Néron-Severi: Sea X var. alg. proyectiva irreducible. Dados $D \in \mathrm{Div}(X)$ divisor de Cartier y $C \subseteq X$ curva suave e irreducible, definimos el número de intersección entre D y C como el entero $D \cdot C := \deg(\mathcal{O}_X(D)|_C) \in \mathbb{Z}$.
Más generalmente, si C no es suave, consideramos la normalización $\nu : C^\nu \to C$ y se define $D \cdot C := \deg(\nu^*(\mathcal{O}_X(D)|_C))$. En part, si $D_1 \sim D_2$ entonces $D_1 \cdot C = D_2 \cdot C$ $\forall C \subseteq X$.

[Def: Sean D_1 y D_2 divisores de Cartier en X. Decimos que D_1 y D_2 son numéricamente equivalentes si $D_1 \cdot C = D_2 \cdot C$ $\forall C \subseteq X$ curva irred, y escribimos $D_1 \equiv D_2$. El grupo cociente $NS(X) := \mathrm{Div}(X)/\equiv$ es llamado el grupo de Néron-Severi de X.

El siguiente resultado de Néron (1952) y Severi (1934) se conoce como el "Teorema de base":

[Teorema: El grupo abeliano $NS(X)$ es finitamente generado. En part, $NS(X) \cong \mathbb{Z}^r \oplus \text{Torsión}$. El entero $r = \mathrm{rg}(NS(X)) =: \rho(X)$ se llama el número de Picard de X.

Ejemplos: $\rho(C) = 1$ si C curva, $\rho(\mathbb{P}^n) = 1$, $\rho(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) = 2$, $\rho(\mathrm{Bl}_Z(X)) = \rho(X) + 1$.

Obs: Sea $L \cong \mathcal{O}_X(D)$ fibrado en rectas amplio. Entonces, $L|_C$ es amplio para toda $C \subseteq X$ curva irreducible. Usando métodos de cohomología, se prueba que como $\nu : C^\nu \to C$ es un morfismo finito entonces ν^*L es amplio en C^ν. Luego, $D \cdot C > 0$ $\forall C \subseteq X$ curva irred.

[Terminología: Sea $L \cong \mathcal{O}_X(D)$ fibrado en rectas. Decimos que L es nef ("numéricamente efectivo") si $D \cdot C \geq 0$ para toda $C \subseteq X$ curva irreducible.]

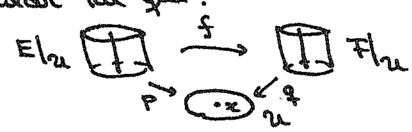
§24. Subfibrados y fibrados cocientes:

Durante esta sección, fijamos una variedad algebraica X.

Recuerdo: Sean $E \xrightarrow{p} X$ y $F \xrightarrow{q} X$ fibrados vectoriales de $rg(E) = r$ y $rg(F) = s$. Un morfismo de fibrados vectoriales entre E y F es $f : E \to F$ morfismo regular tal que:

① $q \circ f = p$.

② $f_x : E_x \cong k^r \to F_x \cong k^s$ es k-lineal $\forall x \in X$.



Denotamos $\ker(f) := \bigcup_{x\in X} \ker(f_x) \subseteq E$ e $\operatorname{Im}(f) = \bigcup_{x \in X} \operatorname{Im}(f_x) \subseteq F$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Dar un ejemplo de $f : E \to F$ tal que $\dim_k \ker(f_x)$ no sea constante en X.
(Obs: En términos sofisticados: "$\mathrm{Vect}(X)$ no es una categoría abeliana" !).

Prop: Sea $f : E \to F$ morfismo de fibrados vectoriales tal que $rg(f) := rg(f_x)$ es constante $\forall x \in X$. Entonces, $\ker(f)$ e $\operatorname{Im}(f)$ son fibrados vectoriales en X.

Dem: La afirmación es local en X, por lo que en una trivialización común de E y F podemos suponer que $E = X \times k^r$ y $F = X \times k^s$, y que f está dada por $(x, v) \mapsto (x, M(x)v)$ donde $M(x) \in M_{s\times r}(k)$. Sea $x_0 \in X$ fijo y escojamos subesp. complementarios:

$$E_{x_0} = \ker(f_{x_0}) \oplus G_{x_0} \quad \text{y} \quad F_{x_0} = \operatorname{Im}(f_{x_0}) \oplus H \quad (*).$$

Dado que E y F están trivializados, $E \cong X \times E_{x_0}$ y $F \cong X \times F_{x_0}$ y luego $(*)$ da una descomposición de fibrados triviales en suma directa: $E = K \oplus G$ y $F = I \oplus H$.
Así, f está dada por la matriz por bloques

$$M(x) = \begin{array}{cc} K & G \\ \left(\begin{array}{c|c} A(x) & B(x) \\ \hline C(x) & D(x) \end{array}\right) & \begin{array}{c} I \\ H \end{array} \end{array} \quad \text{donde } M(x_0) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & B(x_0) \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \text{ y } \underset{\underset{\operatorname{Im}(f_{x_0}) \cong E_{x_0}/\ker(f_{x_0})}{\uparrow}}{B(x_0)} \text{ \underline{invertible}}.$$

En part, existe una vecindad abierta $\mathcal{U}$ de x_0 tal que $B(x)$ invertible $\forall x \in \mathcal{U}$. Restringiéndonos a $\mathcal{U}$, podemos suponer $B(x)$ invertible $\forall x \in X$. Por otra parte,
$\ker(f) = \{(u, v) \in K \oplus G \text{ tq } Au + Bv = 0,\ Cu + Dv = 0\} \Rightarrow v = -B^{-1}Au$ y $(C - DB^{-1}A)u = 0$.
Así, $\ker(f) \cong \{u \in K \text{ tq } (C - DB^{-1}A)u = 0\}$. Dado que $\dim_k \ker(f_x) = \dim_k \ker(f_{x_0}) = rg(K)$ $\forall x \in X$, tenemos que $C - DB^{-1}A = 0$, i.e., $C = DB^{-1}A$.
$\Rightarrow \ker(f) = \{(u, -B^{-1}Au),\ u \in K\} \underset{\text{grafo!}}{\cong} K$ y luego $\ker(f)$ es un fibrado (loc.) trivial ✓
Similar, $\operatorname{Im}(f) = \{(Au + Bv, Cu + Dv) \text{ con } u \in K, v \in G\}$. Dado que $Cu + Dv = DB^{-1}(\underbrace{Au + Bv}_{w})$
$\Rightarrow \operatorname{Im}(f) \subseteq \{(w, DB^{-1}w),\ w \in I\} \cong I$. Como $rg(f_x) = rg(f_{x_0}) = rg(I)$ $\forall x \in X$ obtenemos que $\operatorname{Im}(f) \cong I$ es un fibrado (localmente) trivial ✓ ∎

Caso particular importante: Sea $f : E \to F$ un morfismo de fibrados vectoriales.

① Si f es inyectivo: entonces $\operatorname{Im}(f) \cong E$ es un fibrado vectorial, y decimos que E es un subfibrado de F, y escribimos $0 \to E \xrightarrow{f} F$ o simplemente $E \subseteq F$.

② Si f es sobreyectivo: entonces $\ker(f)$ es un fibrado vectorial y es un subfibrado de E.

⚠ Importante: En términos de matrices de transición, si $E \xhookrightarrow{i} F$ es un subfibrado y si trivializamos E y F simultaneamente (eg. eligiendo una base local de $E|_\mathcal{U}$ y completándola en una base de $F|_\mathcal{U}$) obtenemos matrices de transición de F por bloques:

$$g_{ij} = \left(\begin{array}{c|c} a_{ij} & b_{ij} \\ \hline 0 & c_{ij} \end{array}\right) \quad \text{donde } a_{ij} \text{ matriz de transición de } E.$$

La condición de cociclo $g_{ij}\, g_{jk} = g_{ik}$ para F se separa en:
i) $a_{ij}\, a_{jk} = a_{ik}$ (cond. de cociclo de E)
ii) $a_{ij}\, b_{jk} + b_{ij}\, c_{jk} = b_{ik}$ (cond. mixta)
iii) $c_{ij}\, c_{jk} = c_{ik}$ ← Condición de cociclo de un fibrado vectorial Q de $rg(Q) = rg(F) - rg(E)$!
El fibrado vectorial Q es el fibrado cociente $Q = F/E$ y se tiene una proyección natural $\pi : F \twoheadrightarrow Q$ sobreyectiva que cumple $\ker(\pi) \cong E$.

En otras palabras, tenemos una sucesión exacta de fibrados vectoriales en X:

$$0 \to E \xrightarrow{i} F \xrightarrow{\pi} Q \to 0 \qquad (S)$$

Observaciones útiles: ① $\det(g_{ij}) = \det(a_{ij})\det(c_{ij})$ implica que $\det(F) \cong \det(E) \otimes \det(Q)$ en $\mathrm{Pic}(X)$

② Si $L \in \mathrm{Pic}(X)$ tiene funciones de transición h_{ij} entonces (en una trivialización común) las matrices de transición de $F \otimes L$ son $g_{ij} \otimes h_{ij} = \begin{pmatrix} a_{ij}h_{ij} & b_{ij}h_{ij} \\ 0 & c_{ij}h_{ij} \end{pmatrix}$ y luego la sucesión

$$0 \to E\otimes L \hookrightarrow F \otimes L \twoheadrightarrow Q \otimes L \to 0 \qquad (S)\otimes L$$

es exacta. De manera similar, se prueba:

③ $\boxed{\text{Ejercicio}}$ La sucesión dual $0 \to Q^\vee \xrightarrow{{}^t\pi} F^\vee \xrightarrow{{}^t i} E^\vee \to 0$ $(S)^\vee$ es exacta.

④ $\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $\varphi : Y \to X$ un morfismo regular, entonces el pullback $\varphi^*(S)$ dado por $0 \to \varphi^* E \hookrightarrow \varphi^* F \twoheadrightarrow \varphi^* Q \to 0$ es una sucesión exacta de fibrados vectoriales en Y.

Ejemplo: Sea $V \cong k^n$ un k-ev y $1 \leq r \leq n-1$. Recordemos (ver §20, pág 69) que en la variedad grassmanniana $G = Gr(r, V)$ se tiene el subfibrado tautológico $S \subseteq V_G$, donde $V_G = G \times V$ es el fibrado trivial de rango n y donde

$$S = \{([\Lambda], x) \in G \times V \text{ tal que } x \in \Lambda\} \xrightarrow{pr_1} G$$

con $rg(S) = r$. La construcción anterior nos permite definir el cociente $Q := V_G / S$, que es un fibrado vectorial en G de $rg(Q) = n-r$ llamado el cociente tautológico. Por definición, $Q_{[\Lambda]} \cong V/\Lambda$ y la sucesión

$$0 \to S \hookrightarrow V_G \twoheadrightarrow Q \to 0$$

es exacta.

Aplicación: Sea $E \to X$ fibrado vectorial de $rg(E) = r$ y sea $V \subseteq H^0(X, E)$ subev. de secciones globales tal que $\dim_k(V) = n > r$. Entonces, tal como para sistemas lineales de secciones de un fibrado en rectas (ver §22, pág 74), podemos definir una aplicación racional

$$\varphi_V : X \dashrightarrow Gr(n-r, V)$$
$$x \longmapsto K_x := \{s \in V \text{ tal que } s(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ (0,\dots,0) \in E_x \cong k^r}}{0_{E_x}}\}$$

que está bien definida en $x \in X$ si y sólo si para $ev_x : V \to E_x$, $s \mapsto s(x)$ se tiene que $\dim_k(\ker(ev_x)) = n - r \iff rg(ev_x) = r \iff ev_x : V \twoheadrightarrow E_x$ sobreyectiva. Es decir, cuando $0 \to K_x = \ker(ev_x) \hookrightarrow V \to E_x \to 0$ es una sucesión exacta de k-ev.

Def: Sea $E \to X$ un fibrado vectorial y $V \subseteq H^0(X,E)$ subev de dimensión finita. Decimos que V es globalmente generado si $ev_x : V \twoheadrightarrow E_x$ sobreyectiva $\forall x \in X$, ie, $\varphi_V : X \to Gr(n-r, V)$ es un morfismo regular, donde $r = rg(E)$ y $\dim_k(V) = n > r$. Más aún, decimos que E es globalmente generado si $\dim_k H^0(X,E)$ es finita y $H^0(X,E)$ es globalmente generado.

Obs: Sea $V \subseteq H^0(X,E)$ globalmente generado y $\varphi_V : X \to Gr(n-r, V)$ el morfismo regular asociado. Entonces, el pullback de la sucesión exacta tautológica en $G = Gr(n-r, V)$

$$0 \to S \hookrightarrow V_G \twoheadrightarrow Q \to 0, \quad \text{con } rg(Q) = r,$$

a X vía φ_V está dada por:

$$0 \to K = \ker(ev) \hookrightarrow V_X \twoheadrightarrow E \to 0.$$

En particular, tenemos que $\varphi_V^* Q \cong E$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Usar lo anterior para dar una nueva demostración del hecho que si $L \in \mathrm{Pic}(X)$ y $M \subseteq H^0(X, L)$ es un sistema lineal globalmente generado, entonces $\varphi_M^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(M^*)}(1) \cong L$.

$\boxed{\text{Ejercicio útil}}$ Probar que si $L_1, \dots, L_r$ son fibrados en rectas glob. generados, $E = L_1 \oplus \dots \oplus L_r$ lo es también.

§25. Fibrado tangente, cotangente y normal

Durante toda esta sección, fijamos X variedad algebraica *suave* e *irreducible* de dimensión n.
Así, $\dim_k(T_xX) = \dim(X) = n$ para todo $x\in X$.

Construcción (fibrado tangente): Veamos dos formas de construir T_X fibrado vectorial tal que $\forall x\in X$ se tiene $T_{X,x}\cong T_xX \cong (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$ (ver §17):

① *Usando el espacio cotangente* $\Omega^1_{X,x} := T^*_{X,x} \cong \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$:

Sea $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ cubrimiento abierto de X y, para cada $i\in I$, sean $u_1^i,\dots,u_n^i \in \mathcal{O}(\mathcal{U}_i)$ *coord. locales*, ie, las diferenciales $d_xu_1^i,\dots,d_xu_n^i$ forman una base de $\Omega^1_{X,x}$ $\forall x\in\mathcal{U}_i$ (ver §17, p.60). En $\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j$, consideramos la matriz $g_{ij}(x)\in GL_n(k)$ de cambio de base que permite pasar de $\{d_xu_1^j,\dots,d_xu_n^j\}$ a $\{d_xu_1^i,\dots,d_xu_n^i\}$ $\forall x\in \mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j$. En part, dichas matrices verifican la condición de cociclo $g_{ij}g_{jk}=g_{ik}$ y por ende definen un fibrado vectorial Ω^1_X en X, donde $\Omega^1_{X,x}$ es el espacio cotangente en $x\in X$, y donde $T_X := (\Omega^1_X)^\vee$ cumple $T_{X,x}\cong T_xX$ $\forall x\in X$.

② *Usando abiertos afines*:

Sea $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ cubrimiento abierto de X donde, para cada $i\in I$, $\mathcal{U}_i\cong\mathcal{U}\hookrightarrow\mathbb{A}^N$ var. alg. afín donde $\mathcal{I}(\mathcal{U}) = \langle f_1,\dots,f_m\rangle\subseteq\mathcal{O}(\mathbb{A}^N)$ y donde podemos asumir $m=N-n$ (ver §17, p.60). Además, para todo $x\in\mathcal{U}$ tenemos que (ver §17, pág 57):

$$T_xX \underset{df}{\cong} T_x\mathcal{U}\cong\ker(d_xf)$$

donde $f:\mathbb{A}^N\to\mathbb{A}^m$, $x\mapsto(f_1(x),\dots,f_m(x))$ y donde $d_xf: T_x\mathbb{A}^N\simeq k^N\to T_{f(x)}\mathbb{A}^m\simeq k^m$.
En part, $rg(d_xf) = N-\dim_k\ker(d_xf) = N-n = m$ pues X es *suave*, ie, d_xf sobreyectiva $\forall x\in\mathcal{U}$. Luego, si consideramos el morfismo de fibrados vectoriales triviales en $\mathcal{U}$

$$df:\mathcal{U}\times k^N\longrightarrow\mathcal{U}\times k^m,\quad (x,v)\longmapsto(x,(d_xf)(v))$$

tenemos que $T_X|_{\mathcal{U}} = T_{\mathcal{U}} := \ker(df)$ es un fibrado vectorial en $\mathcal{U}$ (ver §24, p.85), que verifica $T_{\mathcal{U},x}\cong T_x\mathcal{U}\cong T_xX$ $\forall x\in X$. Finalmente, el atlas algebraico $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ induce un atlas algebraico que permite "pegar" los $T_{\mathcal{U}_i}$ en un fibrado vectorial T_X en X.

Def: Los fibrados vectoriales T_X y Ω^1_X en X, ambos de rango $\dim(X)$, son llamados el *fibrado tangente* y *fibrado cotangente* de X, respectivamente. Además, para $\mathcal{U}\subseteq X$ abierto no-vacío, las secciones de $H^0(\mathcal{U},T_X|_{\mathcal{U}})$ y $H^0(\mathcal{U},\Omega^1_X|_{\mathcal{U}})$ son llamadas *campos de vectores* (o vectores tangentes) y *1-formas* en $\mathcal{U}$, respectivamente.

Terminología: Más generalmente, para $p\in\{1,\dots,\dim(X)\}$ definimos $\Omega^p_X := \Lambda^p\,\Omega^1_X$ el *fibrado de p-formas diferenciales* en X (ver §20, p.71 y cf. §4, p.17). Concretamente, si $u_1,\dots,u_n\in\mathcal{O}_X(\mathcal{U})$ son coordenadas locales en $\mathcal{U}\subseteq X$, entonces $s\in H^0(\mathcal{U},\Omega^p_X|_{\mathcal{U}})$ es de la forma

$$s(x)=\sum_{1\le j_1<\dots<j_p\le n} f_{j_1,\dots,j_p}(x)\, d_xu_{j_1}\wedge\dots\wedge d_xu_{j_p} \quad \text{con } f_{j_1,\dots,j_p}\in\mathcal{O}_X(\mathcal{U}).$$

Luego, $rg(\Omega^p_X)=\binom{n}{p}$, con $n=\dim(X)$.

Importante (Functorialidad): Sea $f:X\to Y$ un morfismo regular entre var. alg. *suaves* e *irred*. Entonces, la diferencial $d_xf: T_xX\to T_{f(x)}Y \underset{df}{=} (f^*T_Y)_x$ induce un morfismo

$$df: T_X\longrightarrow f^*T_Y$$

de fibrados vectoriales *en X*, que también llamamos la diferencial de f.

Obs: Por definición, $f:X\to Y$ es un *morfismo suave* si $df: T_X\twoheadrightarrow f^*T_Y$ sobreyectivo (ver §18, p.62). En tal caso, hay una sucesión exacta $0\to T_{X/Y}\hookrightarrow T_X\xrightarrow{df} f^*T_Y\to 0$ de fibrados vectoriales en X, donde $T_{X/Y}:=\ker(df)$ es el *fibrado tangente relativo* (también denotado T_f) y donde $(T_{X/Y})_x\cong T_x(f^{-1}(f(x)))$ para todo $x\in X$ (ver §18, p.63). Por definición, $\Omega^1_{X/Y} := (T_{X/Y})^\vee$, y se tiene $0\to f^*\Omega^1_Y\hookrightarrow\Omega^1_X\twoheadrightarrow\Omega^1_{X/Y}\to 0$ por dualidad.

Ejemplos: ① Sean X e Y var. alg. suaves e irreducibles, entonces $T_{X\times Y} \cong T_X \oplus T_Y$ (ver §17, p. 56).
② Para $\mathbb{A}^n$, tenemos que $T_{\mathbb{A}^n} \cong \mathbb{A}^n \times k^n$ es el fibrado trivial de rango n. En efecto, si identificamos $T_{\mathbb{A}^n}$ con su haz de secciones (ver §21, p. 73) y consideramos coordenadas (globales!) de $\mathbb{A}^n$, entonces los campos de vectores $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \in H^0(\mathbb{A}^n, T_{\mathbb{A}^n})$, con $\frac{\partial}{\partial x_i} : \mathcal{O}_{X,p} \to k$, $f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ $\forall p \in \mathbb{A}^n$, generan $H^0(\mathcal{U}, T_{\mathbb{A}^n}|_{\mathcal{U}})$ para todo abierto $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{A}^n$ (ver §17, p. 56). En otras palabras, $T_{\mathbb{A}^n} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}^{\oplus n}$.

Terminología: Acuñando el término de geometría diferencial, decimos que una variedad alg. suave e irreducible X es paralelizable si $T_X \cong X \times k^{\dim(X)}$ es el fibrado trivial (o equivalentemente, si $T_X \cong \mathcal{O}_X^{\oplus \dim(X)}$ en términos de haces de secciones).

Prop: Sea G un grupo algebraico irreducible. Entonces, G es paralelizable.

Dem (Mumford): Recordemos que todo grupo algebraico es suave (ver §17, p. 59). Sea $e \in G$ el neutro de G y sea $\mathfrak{g} := T_e G$ ("álgebra de Lie de G"), para cada $g \in G$ consideramos el morfismo regular $L_g : G \to G$, $h \mapsto gh$ con diferencial $d_e L_g : \mathfrak{g} \to T_g G$. Veamos que

$$\varphi : G \times \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} T_G, \quad (g, v) \mapsto (d_e L_g)(v)$$

es un isomorfismo de fibrados vectoriales: Sea $E = G \times \mathfrak{g}$ y $F = T_G$, y sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$ los haces de secciones respectivos. Entonces, $\varphi_x : E_x \xrightarrow{\sim} F_x$ isomorfismo de k-ev $\forall x \in G$ (pues G suave). Por otro lado, $E_x \cong \mathcal{E}_x / \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x$ y $F_x \cong \mathcal{F}_x / \mathfrak{m}_x \mathcal{F}_x$ (ver §21, p. 73), y luego el Lema de Nakayama (ver §22, p. 76) implica que $\varphi_x : \mathcal{E}_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_x$ isomorfismo de tallos $\forall x \in G$. Como $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$ son haces, tenemos que $\varphi : \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$ es un isomorfismo de haces (ver §3, p. 13), i.e., $T_G \cong G \times \mathfrak{g}$ es trivial. ∎

Ejemplos: Los grupos algebraicos $\mathbb{G}_a^n = (k^n, +) \cong \mathbb{A}^n$, $\mathbb{G}_m^n = ((k^*)^n, \cdot)$, $GL_n(k)$, $PGL_n(k)$, etc. son paralelizables. Además, si A es una variedad abeliana (i.e., A grupo alg. irreducible proyectivo, ver §16, p. 55), entonces $T_A \cong \mathcal{O}_A^{\oplus \dim(A)}$ es trivial.

Obs (cultura general): Sea X var. alg. proyectiva suave e irreducible tq T_X es trivial. Si $\mathrm{car}(k) = 0$, entonces X es una variedad abeliana, pero no necesariamente si $\mathrm{car}(k) = p > 0$. Más detalles en "Varieties in positive characteristic with trivial tangent bundle" (Compositio Math., 1987) por Mehta & Srinivas.

Prop: Sea $V \cong k^{n+1}$ un k-ev y $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^n$. Entonces, hay una sucesión exacta de fibrados vectoriales en $\mathbb{P}(V)$, llamada la sucesión exacta de Euler

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \hookrightarrow V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1) \twoheadrightarrow T_{\mathbb{P}(V)} \longrightarrow 0,$$

o equivalentemente,

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{\mathbb{P}(V)} \hookrightarrow V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \longrightarrow 0.$$

Aquí, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}$ fibrado en rectas trivial y $V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus(n+1)}$.

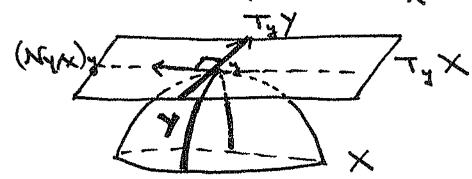
Dem: En $V \cong \mathbb{A}^{n+1}$ con coord. $x_0, \dots, x_n$ tenemos a $\frac{\partial}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ generadores de $T_{\mathbb{A}^{n+1}}$. Sin embargo, si $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^{n+1})$ homogéneos de grado d, entonces dado que $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial g}{\partial x_i}$ homogéneos de grado $d-1$ $\overset{\text{Leibniz}}{\Longrightarrow}$ $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f}{g}\right)(\lambda x) = \frac{\lambda^{d+d-1}}{\lambda^{2d}} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ y luego $\frac{\partial}{\partial x_i}$ no está bien definido en $\mathbb{P}^n$, pero $x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ sí lo está! Más precisamente:

Sea $x = [\ell] \in \mathbb{P}(V)$ con $\ell \cong k$ recta en V. Por definición, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1)_{[\ell]} := \ell$ y luego $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)_{[\ell]} = \ell^*$ es el dual $\ell^* = \{\varphi : \ell \to k \text{ lineal}\}$ de ℓ. Construyamos $\Phi : V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1) \to T_{\mathbb{P}(V)}$ como sigue:
Para $v \in V$ y $\varphi \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)_{[\ell]} = \ell^*$ definimos $\partial_{v\otimes\varphi} \in T_{\mathbb{P}(V),[\ell]}$ como la aplicación k-lineal que a $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V),[\ell]}$ cociente de pol. homogéneos del mismo grado le asigna $\partial_{v\otimes\varphi}(f) := \varphi(X) \frac{\partial f}{\partial v}(X)$, que es independiente del vector $X \in \ell \setminus \{0\}$ (bien definido!).
Notar que Φ sobreyectivo, pues en $\mathcal{U}_0 = \{x_0 \neq 0\}$ consideramos $\varphi_0 = x_0 = 1$ y los $\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial x_i}$ con $v = e_i$ generan $T_{\mathcal{U}_0} \cong T_{\mathbb{A}^n}$. Similar para los otros $\mathcal{U}_i = \{x_i \neq 0\} \cong \mathbb{A}^n$ ✓

Luego, $L := \ker(\Phi)$ es un fibrado vectorial de rango $rg(L) = \dim(V) - \dim(\mathbb{P}(V)) = 1$, i.e., $L \in Pic(\mathbb{P}(V))$.
Finalmente, sea $s := \sum_{i=0}^{n} e_i \otimes e_i^*$ sección global nunca nula, y notamos $\Phi(s) = \sum_{i=0}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} = 0$ pues $\sum_{i=0}^{m} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = df$ (Euler) es 0 para toda $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V),[x]}$ cociente de pol. homog. del mismo grado!
$\Rightarrow^{\exists}\, s \in H^0(\mathbb{P}(V), L)$ sección nunca nula, i.e., $L \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}$ fibrado en rectas trivial. ■

Terminemos esta sección introduciendo la noción de fibrado normal:
Sea $Y \xhookrightarrow{i} X$ subvariedad suave (e irreducible) de X (que también lo es!). Entonces, para todo $y \in Y$ la aplicación lineal $d_y i : T_y Y \hookrightarrow T_y X \underset{\text{def}}{=} (i^* T_X)_y \underset{\text{def}}{=} (T_X|_Y)_y$ es inyectiva, y luego $di : T_Y \hookrightarrow T_X|_Y$ subfibrado.

<u>Def</u>: Dadas $Y \xhookrightarrow{i} X$ como en la discusión anterior, definimos el fibrado normal de Y en X como el cociente $N_{Y/X} = \mathrm{coker}(di) = (T_X|_Y)/T_Y$, de $rg(N_{Y/X}) = \dim(X) - \dim(Y) = \mathrm{codim}_X(Y)$.
Luego, hay una sucesión exacta
$$0 \to T_Y \hookrightarrow T_X|_Y \twoheadrightarrow N_{Y/X} \to 0$$



de fibrados vectoriales en Y. Equivalentemente, por dualidad:
$$0 \to N_{Y/X}^{\vee} \hookrightarrow \Omega^1_X|_Y \xrightarrow{{}^t di} \Omega^1_Y \to 0,$$
donde $N_{Y/X}^{\vee}$ es el fibrado conormal de Y en X.

<u>Construcción</u>: Sea $E \to X$ fibrado vectorial de $rg(E) = r$ y $s \in H^0(X,E)\setminus\{0\}$ sección no-nula. En una trivialización $E|_{\mathcal{U}} \cong \mathcal{U} \times \mathbb{A}^r$, escogemos $(e_1, \dots, e_r)$ marco de referencia (i.e., $(e_1(x), \dots, e_r(x))$ base de $E_x \cong k^r$ $\forall x \in \mathcal{U}$) y escribimos $s = \sum_{i=1}^{r} f_i e_i$, con $f_i \in \mathcal{O}_X(\mathcal{U})$ regular. Luego, $V(s) = \{x \in X \text{ tq } s(x) = 0\} \subseteq X$ cerrado, cumple que $V(s)|_{\mathcal{U}} = V(f_1, \dots, f_r)$.
Luego, para $x \in V(s)$, definimos $d_x s : T_x X \to E_x$ como la aplicación k-lineal dada (en $\mathcal{U}$) por $d_x s := \sum_{i=1}^{r} d_x f_i\, e_i(x)$, la cual no depende de los f_i y e_i si $x \in V(s)$.
<u>Terminología</u>: Decimos que $s : X \to E$ es transversal a la sección nula si $d_x s : T_x X \twoheadrightarrow E_x$ es sobreyectiva $\forall x \in V(s)$. En part, $rg(E) \leq \dim(X)$ en tal caso.

<u>Teorema</u>: Sea $E \to X$ fibrado vectorial de $rg(E) = r \leq \dim(X) = n$ y sea $s \in H^0(X,E)\setminus\{0\}$.
Entonces:
① s es transversal a la sección nula $\Leftrightarrow$ $V(s) \subseteq X$ subvar. suave de $\dim(V(s)) = n - r$.
Más aún, en tal caso: $N_{V(s)/X} \cong E|_{V(s)}$.
② Sup. $car(k) = 0$ y $M \subseteq H^0(X,E)$ globalmente generado (i.e., $ev_x : M \twoheadrightarrow E_x$, $s \mapsto s(x)$ es sobreyectivo $\forall x \in X$). Entonces, para $s \in M$ general la subvar. $V(s) \subseteq X$ es suave.

<u>Dem</u>: Para ① consideramos $V(s)|_{\mathcal{U}} = V(f_1, \dots, f_r)$ como antes, y sup. que $s : X \to E$ es transversal a la sección nula $\Rightarrow$ los $d_x f_i$ son l.i., y luego existen $u_1, \dots, u_n$ coord. locales en $\mathcal{U}$ tq $u_1 = f_1, \dots, u_r = f_r$ $\Rightarrow$ $V(f_1, \dots, f_r)$ suave de dimensión $n - r$ (ver §17, p.60) ✓. Recíprocamente, si $Y = V(s)$ es suave de $\dim(Y) = n - r$ entonces $\dim_k T_y Y = n - r$ $\forall y \in Y$, y $T_y Y \cong \ker(d_y s)$.
Luego, el Teo. del rango implica que $d_y s$ es sobreyectiva $\forall y \in Y$ ✓. Más aún, en tal caso:
$$E_y = \mathrm{Im}(d_y s) \cong T_y X / \ker(d_y s) \cong T_y X / T_y Y \underset{\text{def}}{=} (N_{Y/X})_y \quad \forall y \in Y \iff N_{Y/X} \cong E|_Y.$$
Para ② notamos que, por suavidad genérica, existe $\mathcal{U} \subseteq M$ abierto denso tq $\forall s \in \mathcal{U}$ se tiene que $V(s) \subseteq X$ es suave (mismo argumento usado en §22, p.76). ■

<u>Ejemplo Típico</u>: Sup. $E = L_1 \oplus \dots \oplus L_r$ suma de fibrados en rectas. Si $s_i \in H^0(X, L_i)\setminus\{0\}$ sección no-nula tq $Y := V(s_1, \dots, s_r) \subseteq X$ suave (e irreducible) de $\mathrm{codim}_X(Y) = r$ (i.e., Y intersección completa)
$\Rightarrow N_{Y/X} \cong (L_1 \oplus \dots \oplus L_r)|_Y \cong L_1|_Y \oplus \dots \oplus L_r|_Y$ fibrado normal de Y en X.
En part, si $r = 1$ e $Y = V(s)$ hipersuperficie suave, entonces $N_{Y/X} \cong L|_Y$, con $L \cong \mathcal{O}_X(Y)$.
¡Atención! Por abuso de notación, a veces $\mathcal{O}_X(Y)|_Y \in Pic(Y)$ se escribe "$Y|_Y$" en algunos textos.

§26. Divisor canónico y dimensión de Kodaira

En esta sección presentamos a "la estrella de la película": el divisor (o fibrado en rectas) canónico.

Def: Sea X var. algebraica suave e irreducible. Definimos el fibrado (en rectas) canónico de X como $\omega_X := \det(\Omega^1_X) \cong \Lambda^{\dim(X)}\Omega^1_X$. Además, un divisor canónico es cualquier K_X en $\mathrm{Div}(X) \cong \mathrm{WDiv}(X)$ tal que $\omega_X \cong \mathcal{O}_X(K_X)$. El dual $\omega_X^\vee$ (resp. $-K_X$) es el fibrado (resp. divisor) anti-canónico.

Ejemplos: ① Dado que $T_{\mathbb{A}^n} \cong \Omega^1_{\mathbb{A}^n} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}^{\oplus n}$ es trivial, tenemos $\omega_{\mathbb{A}^n} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}$ es trivial y $K_{\mathbb{A}^n} = 0$.

② Más generalmente, si G es un grupo algebraico irreducible entonces $\omega_G \cong \mathcal{O}_G$ es trivial. En particular, si $A \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ variedad abeliana entonces $\omega_A \cong \mathcal{O}_A$ (ver §25, pág 88).

③ La sucesión exacta de Euler $0 \to \Omega^1_{\mathbb{P}^n} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{\oplus(n+1)} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to 0$ implica (ver §24, pág 86) que $\det(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{\oplus(n+1)}) \cong \det(\Omega^1_{\mathbb{P}^n}) \otimes \det(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \iff \omega_{\mathbb{P}^n} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)$. Así, tenemos que $K_{\mathbb{P}^n} = -(n+1)H$ es un divisor canónico de $\mathbb{P}^n$, donde $H \cong \mathbb{P}^{n-1}$ es un hiperplano.

Teorema (Fórmula de Adjunción): Sea X var. algebraica suave e irreducible y $E \to X$ fibrado vectorial de $\mathrm{rg}(E) = r \leq \dim(X) = n$. Sup. que $s \in H^0(X,E)\setminus\{0\}$ es una sección global no-nula tal que $Y := V(s) \subseteq X$ es suave de $\dim(Y) = n-r$. Entonces:
$$\omega_Y \cong \omega_X|_Y \otimes \det(N_{Y/X}).$$
En part, si $Y \subseteq X$ es una hipersuperficie y $L \cong \mathcal{O}_X(Y)$ en $\mathrm{Pic}(X)$ (ie, $r=1$), entonces se tiene $\omega_Y \cong (\omega_X \otimes L)|_Y$ en $\mathrm{Pic}(Y)$, ie, $K_Y = (K_X + Y)|_Y$ en $\mathrm{Div}(Y) \cong \mathrm{WDiv}(Y)$.

Dem: Dado que $s : X \to E$ es transversal a la sección nula, tenemos $N_{Y/X} \cong E|_Y$ (ver §25, pág 89). Por otra parte, la sucesión exacta $0 \to N_{Y/X}^\vee \hookrightarrow \Omega^1_X|_Y \twoheadrightarrow \Omega^1_Y \to 0$ implica que tenemos $\omega_X|_Y = \det(\Omega^1_X|_Y) \cong \det(N^\vee_{Y/X}) \otimes \det(\Omega^1_Y) = \det(N_{Y/X})^\vee \otimes \omega_Y$, ie, $\omega_Y \cong \omega_X|_Y \otimes \det(N_{Y/X})$ ∎

Ejercicio Sean $L_1, \dots, L_r \in \mathrm{Pic}(X)$ fibrados en rectas y sea $s_i \in H^0(X, L_i)\setminus\{0\}$ sección no-nula para $i = 1, \dots, r$ tal que $Y = V(s_1, \dots, s_r) \subseteq X$ es suave de $\mathrm{codim}_X(Y) = r$. Probar que se cumple $\omega_Y \cong (\omega_X \otimes L_1 \otimes \dots \otimes L_r)|_Y$, ie, $K_Y = (K_X + Y_1 + \dots + Y_r)|_Y$ con $Y_i = V(s_i)$ divisor.

Notación y Terminología: Sea $X \subseteq \mathbb{P}^n$ subvar. irreducible, entonces para $d \in \mathbb{Z}$ denotamos $\mathcal{O}_X(d) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)|_X$ en $\mathrm{Pic}(X)$. En part, $\mathcal{O}_X(1)$ es muy amplio y $\varphi_{\mathcal{O}_X(1)} : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ es la inclusión de X en $\mathbb{P}^n$ (ver §22, pág 74). Más generalmente, una polarización en X es fijar un fibrado en rectas (muy) amplio L en X y decimos que el par (X, L) es una var. polarizada.

Ejemplo: Sea $X \subseteq \mathbb{P}^n$ hipersuperficie suave e irreducible de grado d. Entonces, por adjunción:
$$\omega_X \cong (\omega_{\mathbb{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(X))|_X = (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))|_X = \mathcal{O}_X(d-n-1).$$
Más generalmente, si $X = X_{d_1, \dots, d_r} \subseteq \mathbb{P}^n$ es una intersección completa suave e irreducible dada por $V(f_1, \dots, f_r)$ con $\deg(f_i) = d_i$, entonces el Ejercicio anterior implica $\omega_X \cong \mathcal{O}_X(\sum_{i=1}^r d_i - n - 1)$.

Subejemplo: Sea $C \subseteq \mathbb{P}^2$ curva proy. suave e irred. de grado d, entonces $\omega_C \underset{\text{dy}}{=} \Omega^1_C \cong \mathcal{O}_C(d-3)$. En part, si C es una variedad abeliana entonces necesariamente $d=3$. Recíprocamente, se puede probar que si $d=3$ entonces C posee estructura de grupo abeliano: decimos que es una curva elíptica!

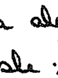
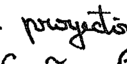
Cultura general: Sea X variedad alg. proyectiva suave e irred. Decimos que X es:
$$\left\{\begin{array}{l}\text{Fano}\\ \text{Calabi-Yau}\\ \text{Canónicamente polarizada}\end{array}\right\} \text{ si } \left\{\begin{array}{l}\omega_X^\vee = \mathcal{O}_X(-K_X) \text{ es amplio}\\ \omega_X \cong \mathcal{O}_X \text{ es trivial}\\ \omega_X \cong \mathcal{O}_X(K_X) \text{ es amplio}.\end{array}\right.$$
Por ejemplo, $X_{d_1, \dots, d_r} \subseteq \mathbb{P}^n$ intersección completa del Ejemplo anterior es de Fano (resp. de CY, resp. canónicamente polarizada) si $\sum_{i=1}^r d_i \leq n$ (resp. $= n+1$, resp. $\geq n+2$).

Ejercicio Determinar las posibles $X_{d_1, \dots, d_r} \subseteq \mathbb{P}^n$ inter. completas de CY de dimensión ≤ 3.

Ejercicio Sea X variedad de Fano y sup. que existe $Y \in |-K_X|$ divisor anti-canónico suave. Probar que Y es una variedad de Calabi-Yau.

Para medir la "positividad" de ω_X consideramos los siguientes invariantes:

Def: Sea X var. algebraica proyectiva suave e irreducible. Para todo $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ definimos el m-ésimo plurigénero de X como
$$P_m = P_m(X) := \dim_k H^0(X, \omega_X^{\otimes m}) = \dim_k H^0(X, \mathcal{O}_X(mK_X)).$$
Para $m=1$, escribimos $p_g = p_g(X) := \dim_k H^0(X, \omega_X)$ en lugar de P_1, y decimos que $p_g(X)$ es el género geométrico de X. Más aún, en el caso de una curva C escribimos $g(C)$ en lugar de $p_g(C)$ y decimos que $g(C) := \dim_k H^0(C, \Omega^1_C)$ es el género de C.

Obs importante: Si $k = \mathbb{C}$, una curva alg. proyectiva suave e irred. $C \subseteq \mathbb{P}^N$ puede verse como una superficie real compacta orientable: $C \underset{\text{homeo}}{\approx}$  ó , y se puede probar (usando Teoría de Hodge) que $g(C)$ es el número de "agujeros" de C (vista como superficie).

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea X variedad de Fano (resp. de Calabi-Yau). Probar que $P_m(X) = 0$ (resp. $= 1$) $\forall m \geq 1$.

Indicación: Probar que si $L \in \mathrm{Pic}(X)$ con $L \cong \mathcal{O}_X(D)$ es amplio, entonces $H^0(X, \mathcal{O}_X(-mD)) = 0$ $\forall m \geq 1$, usando que si $\mathcal{O}_X(m_0 D)$ muy amplio para cierto $m_0 \geq 1$ entonces $\mathcal{O}_X(mm_0 D)$ también y usando que si $s \in H^0(X, \mathcal{O}_X(-mD))$ no-nula entonces $s^{\otimes m_0} \in H^0(X, \mathcal{O}_X(-mm_0 D))$ no-nula.

Teorema: Sean X e Y variedades alg. proyectivas suaves e irreducibles. Supongamos que $X \underset{\text{bir}}{\simeq} Y$ son birracionales, entonces
$$H^0(X, \omega_X^{\otimes m}) \cong H^0(Y, \omega_Y^{\otimes m}) \quad \forall m \geq 1.$$
En particular, los plurigéneros $P_m(X) = P_m(Y)$ son invariantes birracionales.

Dem: $\boxed{\text{Paso 1}}$ Sea $L \in \mathrm{Pic}(X)$ fibrado en rectas y $Z \subseteq X$ cerrado tal que $\mathrm{codim}_X(Z) \geq 2$, entonces la aplicación lineal $H^0(X, L) \xrightarrow[\sim]{\text{res}} H^0(X \setminus Z, L|_{X\setminus Z})$ es un isomorfismo (cf. Teo. de Hartogs):
La inyectividad se obtiene considerando secciones como divisores de Weil efectivos (ver §23, pág 79) ✓
Para la sobreyectividad consideramos $s \in H^0(X\setminus Z, L|_{X\setminus Z})$ y $z \in Z$: trivializamos $L|_{\mathcal{U}} \cong \mathcal{U} \times \mathbb{A}^1$ en una vecindad $\mathcal{U}$ de $z \in Z$ y tenemos que $s(x) = (x, f(x))$ con $f : \mathcal{U}\setminus Z \to k$ regular, que induce $f : \mathcal{U} \dashrightarrow k$ racional. Notamos que $\mathrm{div}(f) \geq 0$ efectivo en $\mathrm{Div}(\mathcal{U})$ (pues los polos están en codim 1) $\underset{\mathcal{U}\text{ suave}}{\Longrightarrow}$ f es regular ✓ Así, existe $\tilde{s} \in H^0(X, L)$ tq $\tilde{s}|_{X\setminus Z} = s$.

$\boxed{\text{Paso 2}}$ Sea $f : \mathcal{U} \xrightarrow{\sim} V$ isomorfismo regular entre var. alg. suaves e irred. Entonces, f induce un isomorfismo k-lineal $F^* : H^0(V, \omega_V) \xrightarrow{\sim} H^0(\mathcal{U}, \omega_{\mathcal{U}})$:
Por functorialidad, f induce $df : T_{\mathcal{U}} \xrightarrow{\sim} f^* T_V$ y ${}^t df : f^*\Omega^1_V \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{\mathcal{U}} \Rightarrow \Lambda^p({}^t df) : f^*\Omega^p_V \xrightarrow{\sim} \Omega^p_{\mathcal{U}}$ para todo $p \geq 1$. Además, f induce $\Gamma(f) : H^0(V, \Omega^p_V) \xrightarrow{\sim} H^0(\mathcal{U}, f^*\Omega^p_V)$. Así, componiendo $\Gamma(f)$ y $\Lambda^p({}^t df)$ obtenemos $F^* : H^0(V, \Omega^p_V) \xrightarrow{\sim} H^0(\mathcal{U}, \Omega^p_{\mathcal{U}})$ isomorfismo $\forall p \geq 1$. En part, para $p = \dim(\mathcal{U}) = \dim(V)$ obtenemos $F^* : H^0(V, \omega_V) \xrightarrow{\sim} H^0(\mathcal{U}, \omega_{\mathcal{U}})$ isomorfismo ✓
Similar: $(F^*)^{\otimes m} : H^0(V, \omega_V^{\otimes m}) \xrightarrow{\sim} H^0(\mathcal{U}, \omega_{\mathcal{U}}^{\otimes m})$ isomorfismo $\forall m \geq 1$.

$\boxed{\text{Paso 3}}$ $f : X \overset{\sim}{\dashrightarrow} Y$ aplicación birracional induce $H^0(Y, \omega_Y^{\otimes m}) \xrightarrow{\sim} H^0(X, \omega_X^{\otimes m})$ isomorfismo $\forall m \geq 1$:
Sabemos que existe $Z \subseteq X$ cerrado tq $\mathrm{codim}_X(Z) \geq 2$ y $f|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to Y$ regular con $\mathcal{U} := X \setminus Z$ (ver §17, pág 60). Así, $f|_{\mathcal{U}}$ induce $H^0(Y, \omega_Y^{\otimes m}) \xrightarrow{\varphi} H^0(\mathcal{U}, \omega_{\mathcal{U}}^{\otimes m}) \cong H^0(X, \omega_X^{\otimes m})$. El mismo argumento aplicado a $g = f^{-1} : Y \overset{\sim}{\dashrightarrow} X$ nos da $H^0(X, \omega_X^{\otimes m}) \to H^0(Y, \omega_Y^{\otimes m})$, la inversa de φ. ∎

Consecuencia: Dado que $\mathbb{P}^n$ variedad de Fano, $P_m(\mathbb{P}^n) = 0$ $\forall m \geq 1$ y luego $X_d \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$ hipersup. suave irred. de grado d no es racional (ie, $X_d \underset{\text{bir}}{\not\simeq} \mathbb{P}^n$) para $d \geq n+2$.

Obs: La demostración también prueba que los $H^0(X, \Omega^p_X)$ son invariantes birracionales $\forall p \geq 1$.

Def: Sea X variedad alg. proyectiva suave e irred. La dimensión de Kodaira de X, denotada $\kappa(X)$, es la dimensión de Iitaka de ω_X (cf. §22, p.77):
$$\kappa(X) = \begin{cases} \max\limits_{m \in \mathbb{N}^{\geq 1}} \dim\left(\overline{\varphi_{\omega_X^{\otimes m}}(X)}\right) & \text{si } \exists m_0 \geq 1 \text{ tq } P_{m_0}(X) \neq 0 \\ -\infty & \text{si } P_m(X) = 0 \ \forall m \geq 1. \end{cases}$$
En part, $\kappa(X) \in \{-\infty, 0, 1, \dots, \dim(X)\}$ y decimos que X es de tipo general si $\kappa(X) = \dim(X)$, ie, si ω_X es big.

Ejemplos: ① si $X \underset{\text{bir}}{\approx} Y$ entonces $\kappa(X) = \kappa(Y)$. En part, $\kappa(Bl_Z(X)) = \kappa(X)$.

② sea $X \underset{\text{bir}}{\approx} \mathbb{P}^n$ variedad racional, entonces $\kappa(X) = -\infty$.

③ sea $C_d \subseteq \mathbb{P}^2$ curva proy. suave e irred. de grado $d \geq 1$, entonces $\kappa(C_d) = \begin{cases} -\infty & \text{si } d \leq 2 \\ 0 & \text{si } d = 3 \\ 1 & \text{si } d \geq 4 \end{cases}$

④ sea X variedad de Fano (resp. CY, resp. Can. Pol.) entonces $\kappa(X) = -\infty$ (resp. $= 0$, resp. $\dim(X)$).

⑤ $\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que $\omega_{X\times Y} \cong \omega_X \boxtimes \omega_Y$ (cf. §21, pág 72) y deducir que $\kappa(X\times Y) = \kappa(X) + \kappa(Y)$, con $-\infty + d := -\infty$ para $d \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$. En part, $\kappa(X \times \mathbb{P}^n) = -\infty$.

Prop: sea $X = V(f) \subseteq \mathbb{P}^n$ hipersuperficie suave e irreducible de grado d. Entonces:

$$p_g(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } d \leq n \\ \binom{d-1}{n} & \text{si } d \geq n+1 \end{cases}$$

En part, $g(C_d) = \dfrac{(d-1)(d-2)}{2}$ para $C_d \subseteq \mathbb{P}^2$ curva proy. suave e irreducible de grado d.

Dem: En $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 = \{x_0 \neq 0\} \cong \mathbb{A}^n$ tenemos $X \cap \mathcal{U} = V(g)$ con $g(x) = g(x_1, \dots, x_n) = f(1, x_1, \dots, x_n)$. Sea $V_i := \{x \in \mathcal{U} \text{ tq } \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \neq 0\} \subseteq \mathcal{U}$ y notar que $\mathcal{U} = \bigcup_{i\in I} V_i$ (pues X suave) y que $x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n$ (se omite x_i) son coord. locales de $X \cap \mathcal{U}_0$ en V_i (pues Euler $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_j} dx_j = 0$ (E) permite despejar dx_i). Luego, $dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$ generador de $H^0(X\cap V_i, \omega_{X\cap V_i})$ como $\mathcal{O}_X(X\cap V_i)$-módulo, y reescalando:

$$\omega_i = \omega_i^0 := \frac{(-1)^{i-1}}{(\partial g/\partial x_i)} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n \quad (*)$$

En $V_i \cap V_j$, la relación $(E) \wedge (dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n) = 0$ equivale a $\omega_i = \omega_j$, ie, $\omega^0 = \{\omega_i^0\}_{i\in I}$ define una sección de ω_X en $X \cap (\bigcup_{i\in I} V_i) = X \cap \mathcal{U}_0$. Veamos qué ocurre en otra carta:

En $\mathcal{U}_1 = \{x_1 \neq 0\} \cong \mathbb{A}^n$ con coord. $y_0, y_2, \dots, y_n$ (donde $y_0 = \frac{1}{x_1}$, $y_2 = \frac{x_2}{x_1}, \dots, y_n = \frac{x_n}{x_1}$ en $\mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_1$ y luego $dy_0 = -\frac{1}{x_1^2} dx_1$ y $dy_j = \frac{1}{x_1} dx_j - \frac{x_j}{x_1^2} dx_1$ si $j = 2, \dots, n$), tenemos que $X \cap \mathcal{U}_1 = V(h)$ donde $h(y) = h(y_0, y_2, \dots, y_n)$ es $f(y_0, 1, y_2, \dots, y_n)$. Así, h define $\omega^1 \in H^0(X\cap \mathcal{U}_1, \omega_{X\cap\mathcal{U}_1})$ que en $\{y \in \mathcal{U}_1 \text{ tq } \frac{\partial h}{\partial y_n}(y) \neq 0\}$ está dada por:

$$\omega_n^1 = \frac{(-1)^{n-1}}{(\partial h/\partial y_n)} dy_0 \wedge dy_2 \wedge \dots \wedge dy_{n-1} \iff \omega_n^1 = \frac{(-1)^{n-1}}{(\partial h/\partial y_n)} \cdot \frac{1}{x_1^n} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1} \quad (**)$$

Por otro lado, $h(y) = f(y_0, 1, y_2, \dots, y_n) = y_0^d f(1, \frac{1}{y_0}, \dots, \frac{y_n}{y_0}) = y_0^d f(1, x_1, \dots, x_n) = y_0^d g(x) \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial y_n} = y_0^d \cdot \frac{1}{y_0} \frac{\partial g}{\partial y_n} = \frac{1}{x_1^{d-1}} \frac{\partial g}{\partial y_n}$

$\underset{(*)+(**)}{\Longrightarrow} \omega^1 = (-1)^* x_1^{d-n-1} \omega^0$ en $\mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_1$. Finalmente, $s \in H^0(X, \omega_X)$ define $s|_{X\cap \mathcal{U}_i} = P_i \omega^i$ con P_i un polinomio en n variables, con $P_0(x) = (-1)^* x_1^{d-n-1} P_1(\frac{1}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}) = (-1)^* x_1^{d-n-1} \frac{Q(x_1, \dots, x_n)}{x_1^{\deg P_1}} \leftarrow$ homogénea

$\Rightarrow H^0(X, \omega_X) \cong \left\{ \begin{matrix} \text{pol. homog. en } n \text{ variables} \\ \text{de grado} \leq d-n-1 \end{matrix} \right\}$ de donde se calcula $p_g(X) = \dim_k H^0(X, \omega_X)$. ∎

El "Teorema de factorización débil" de Wlodarczyk (ver §17, p.61) nos motiva a estudiar blow-ups:

Prop: sea X variedad alg. suave e irred. y sea $Z \subseteq X$ subvar. suave e irred. de $\text{codim}_X(Z) = r \geq 2$. Sea $\varepsilon: \tilde{X} \to X$ el blow-up de $Z \subseteq X$ con $E = \varepsilon^{-1}(Z) \subseteq \tilde{X}$ divisor excepcional. Entonces:

$$\omega_{\tilde{X}} \cong \varepsilon^* \omega_X \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}}((r-1)E), \text{ ie, } K_{\tilde{X}} = \varepsilon^* K_X + (r-1)E.$$

Dem: Sabemos que $\text{Pic}(\tilde{X}) = \varepsilon^* \text{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z}\mathcal{O}_X(E)$ (ver §23, p.83) y luego $\omega_{\tilde{X}} = \varepsilon^* L \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}}(mE)$ para ciertos $L \in \text{Pic}(X)$ y $m \in \mathbb{Z}$: Notamos que $\omega_X|_{X\setminus Z} \cong \omega_{\tilde{X}}|_{\tilde{X}\setminus E} \cong \varepsilon^* L|_{\tilde{X}\setminus E} \cong L|_{X\setminus Z} \underset{\text{codim}(Z)\geq 2}{\Longrightarrow} L \cong \omega_X$ ✓

Basta calcular $m \in \mathbb{Z}$: sean $u_1, \dots, u_n$ coord. locales en X tq $Z \underset{\text{loc}}{=} \{u_1 = \dots = u_r = 0\}$. Entonces (ver §17, p.61), $\tilde{X}$ está dado localmente por $u_i y_j = u_j y_i$ con $i, j = 1, \dots, r$ y donde $y = [y_1, \dots, y_r] \in \mathbb{P}^{r-1}$.

Para $y_1 \neq 0$ obtenemos $u_j = y_j u_1$ $(j = 2, \dots, r)$ y $E \underset{\text{loc}}{=} \{u_1 = 0\}$. Finalmente, calculamos que $\varepsilon^*(du_1 \wedge \dots \wedge du_n) \overset{\text{def}}{=} du_1 \wedge d(y_2 u_1) \wedge \dots \wedge d(y_r u_1) \wedge du_{r+1} \wedge \dots \wedge du_n = u_1^{r-1} du_1 \wedge dy_2 \wedge \dots \wedge dy_r \wedge \dots \wedge du_n$, ie, $m = r-1$. ∎

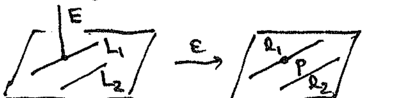
Consecuencias:

① S superficie suave irred y $\varepsilon: \tilde{S} = Bl_{p_1, \dots, p_r}(S) \to S$, entonces $K_{\tilde{S}} = \varepsilon^* K_S + E_1 + \dots + E_r$, $E_i \cong \mathbb{P}^1$ curva excepc.

② si $Z = \{p\}$ punto, $E = \varepsilon^{-1}(p) \cong \mathbb{P}^{n-1}$ y luego $\omega_E \cong \omega_{\mathbb{P}^{n-1}} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-n)$. Por otro lado, la fórmula de adjunción $\omega_E \cong (\omega_{\tilde{X}} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}}(E))|_E = \omega_{\tilde{X}}|_E \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}}(E)|_E$ y la fórmula $\omega_{\tilde{X}}|_E \cong (\varepsilon^* \omega_X \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}}((n-1)E))|_E \cong \mathcal{O}_{\tilde{X}}((n-1)E)|_E$ implican $\omega_E \cong \mathcal{O}_{\tilde{X}}(nE)|_E \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-n)$. Luego, $\mathcal{O}_E(E) := \mathcal{O}_{\tilde{X}}(E)|_E \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1) \cong \mathcal{N}_{E/\tilde{X}}$.

③ Caso particular importante: S superficie proy. suave irred y $\varepsilon: \tilde{S} = Bl_p(S) \to S$, con $E = \varepsilon^{-1}(p) \cong \mathbb{P}^1$. Entonces, la "auto-intersección" $E^2 := E \cdot E \underset{\text{def}}{=} \deg(\mathcal{O}_{\tilde{S}}(E)|_E) = \deg(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) = -1$.

Importante (cultura general): En 1901, Castelnuovo y Enriques prueban que si S superficie proy. suave irred y $C \subseteq S$ con $C \cong \mathbb{P}^1$ y $C^2 = -1$, entonces existe S' superficie proy. suave irred tal que $S \cong Bl_p(S')$ y $E = C$.



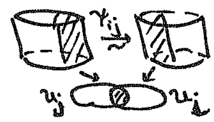
$\varepsilon^* \ell_1 = L_1 + E$
$\varepsilon^* \ell_2 = L_2$
$/ \cdot E \rightsquigarrow 1 + E^2 = 0$, ie, $E^2 = -1$.

§27. Fibrados proyectivos

En esta sección, X es una var. alg. proyectiva suave e irred. y $E \to X$ fibrado vect. de $rg(E) = r$.

Construcción: Sea $X = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$ cubr. abierto tq $E|_{\mathcal{U}_i} \cong \mathcal{U}_i \times k^r$. Definimos el fibrado proyectivo $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}_X(E)$ como la variedad alg. obtenida mediante el atlas algebraico dado por las $\mathcal{U}_i \times \mathbb{P}(k^r) = \mathcal{U}_i \times \mathbb{P}^{r-1}$ pegadas usando los cambios de carta:

$$(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \times \mathbb{P}^{r-1} \xrightarrow[\sim]{\varphi_{ij}} (\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \times \mathbb{P}^{r-1}, \quad (x, [v]) \longmapsto (x, [g_{ij}(x) v])$$



matrices de transición de E.

Notamos que la construcción sólo depende de $[g_{ij}(x)] \in PGL_r(k)$, y que $\mathbb{P}(E)$ admite una proyección $\pi : \mathbb{P}(E) \to X$ con $\pi^{-1}(x) = \mathbb{P}(E_x) \simeq \mathbb{P}^{r-1}$. Decimos que $rg(\mathbb{P}(E)) := r - 1$.

Obs: ① $\boxed{\text{Ejercicio}}$ $\mathbb{P}(E)$ es suave e irreducible de $\dim(\mathbb{P}(E)) = \dim(X) + r - 1$.

② Por construcción, para todo $L \in Pic(X)$ se tiene $\mathbb{P}(L) \cong X$ y $\mathbb{P}(E \otimes L) \cong \mathbb{P}(E)$.

③ $\mathbb{P}(E) \underset{bir}{\simeq} X \times \mathbb{P}^{r-1}$ y luego $\kappa(\mathbb{P}(E)) = -\infty$ si $r \geq 2$.

④ $\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $E \cong \mathcal{O}_X^{\oplus r}$ fibrado trivial, entonces $\mathbb{P}(E) \cong X \times \mathbb{P}^{r-1}$.

Ejemplo: En $X = \mathbb{P}^1$, sea $E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$ con $g_{ij}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x_i/x_j \end{pmatrix}$. Luego, $S = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1))$ se obtiene al pegar los $V_i := \mathcal{U}_i \times \mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1$ $(i = 0, 1)$ usando el cambio de cartas

$$(\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}) \times \mathbb{P}^1 \xrightarrow[\sim]{\varphi} (\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}) \times \mathbb{P}^1, \quad (s, [u, v]) \mapsto (\tfrac{1}{s}, [u, sv])$$

Por otro lado, si $p = [1, 0, 0]$ entonces $Bl_p(\mathbb{P}^2) = \{[x, y, z], [t_1, t_2] \text{ tq } y t_2 = z t_1\} \subseteq \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$. Notamos que hay isomorfismos

$$V_0 \cong \mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\sim} \{t_2 \neq 0\} \cap Bl_p(\mathbb{P}^2), \quad (s, [u, v]) \mapsto ([u, sv, v], [s, 1]) \leftarrow \text{Aquí: } y = z t_1 \,!$$

$$V_1 \cong \mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\sim} \{t_1 \neq 0\} \cap Bl_p(\mathbb{P}^2), \quad (s, [u, v]) \mapsto ([u, v, sv], [1, s]) \leftarrow \text{Aquí: } z = y t_2 \,!$$

que son compatibles con φ. Luego, $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) \cong Bl_p(\mathbb{P}^2)$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $\Lambda \cong \mathbb{P}^{k-1} \subseteq \mathbb{P}^n$. Probar que $Bl_\Lambda(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-k}}^{\oplus k} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-k}}(-1))$ (cf. §16, pág 55).

Terminología: $\mathbb{F}_m := \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-m))$ es la m-ésima superficie de Hirzebruch, con $m \in \mathbb{Z}$.

Def: Sea $\pi : \mathbb{P}(E) \to X$ fibrado proyectivo con $rg(E) = r \geq 2$, y sea $\pi^* E$ el fibrado vect. de rango r en $\mathbb{P}(E)$ con $(\pi^* E)_y = E_x$, donde $y = (x, [\ell]) \in \pi^{-1}(x) = \mathbb{P}(E_x)$. Definimos el subfibrado en rectas tautológico de $\mathbb{P}(E)$, denotado $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1)$, mediante $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1)_{(x, [\ell])} := \ell \simeq k$. Así, si $E|_{\mathcal{U}} \cong \mathcal{U} \times k^r$ y $\pi^{-1}(\mathcal{U}) \cong \mathcal{U} \times \mathbb{P}^{r-1}$ entonces $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1)|_{\pi^{-1}(\mathcal{U})} \cong pr_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r-1}}(-1)$.

Prop: Sea $\pi : \mathbb{P}(E) \to X$ fibrado proyectivo con $rg(E) = r \geq 2$, entonces:

$$\omega_{\mathbb{P}(E)} \cong \pi^*(\omega_X \otimes \det(E^\vee)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-r) \quad \text{en } Pic(\mathbb{P}(E)).$$

Dem: Consideramos la sucesión exacta $0 \to T_{\mathbb{P}(E)/X} \hookrightarrow T_{\mathbb{P}(E)} \xrightarrow{d\pi} \pi^* T_X \to 0$ $(*)$ (ver §25, p.87), donde $(T_{\mathbb{P}(E)/X})|_{\mathbb{P}(E_x)} \cong T_{\mathbb{P}(E_x)} \cong T_{\mathbb{P}^{r-1}}$. Por otro lado, $0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E_x)} \hookrightarrow E_x \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E_x)}(1) \twoheadrightarrow T_{\mathbb{P}(E_x)} \to 0$ (sucesión de Euler) se reescribe como $0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}|_{\mathbb{P}(E_x)} \hookrightarrow (\pi^* E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1))|_{\mathbb{P}(E_x)} \twoheadrightarrow (T_{\mathbb{P}(E)/X})|_{\mathbb{P}(E_x)} \to 0$, de donde obtenemos la sucesión de Euler relativa en $\mathbb{P}(E)$:

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)} \hookrightarrow \pi^* E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1) \twoheadrightarrow T_{\mathbb{P}(E)/X} \to 0 \quad (**).$$

Luego, $\det(**)$ nos da: $\det(T_{\mathbb{P}(E)/X}) \cong \det(\pi^* E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(r) \otimes \det(\pi^* E) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(r) \otimes \pi^*(\det E)$

Además, $\det(*)$ nos da: $\omega_{\mathbb{P}(E)}^\vee \underset{def}{:=} \det(T_{\mathbb{P}(E)}) \cong \det(T_{\mathbb{P}(E)/X}) \otimes \det(\pi^* T_X)$ y reemplazando nos da $\omega_{\mathbb{P}(E)}^\vee \cong (\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(r) \otimes \pi^*(\det E)) \otimes \pi^* \omega_X^\vee$, i.e., $\omega_{\mathbb{P}(E)} \cong \pi^*(\omega_X \otimes \det(E^\vee)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-r)$. ∎

$\boxed{\text{¡Atención!}}$ En muchos textos, se usa la convención de Grothendieck $\mathbb{P}(E_x) := \{\text{hiperplanos en } E_x\}$ (que corresp. a nuestro $\mathbb{P}(E^\vee)$!) y luego $\omega_{\mathbb{P}(E)} \cong \pi^*(\omega_X \otimes \det(E)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-r)$ en tal caso.

Cultura general: Usando la convención de Grothendieck, decimos que $E \to X$ fibrado vect. de $rg(E) \geq 2$ es amplio (resp. big, nef, etc) si $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1) \in Pic(\mathbb{P}(E))$ lo es. Por ejemplo, se puede probar usando la sucesión de Euler que $T_{\mathbb{P}^n}$ es amplio (ver Lazarsfeld, "Positivity in Alg Geom").

Teorema (Mori, 1979): Sea X var. alg proy suave e irred. Entonces, T_X amplio $\iff X \cong \mathbb{P}^n$.

§28. Cohomología de Čech y Haces coherentes

Esta sección es un primer acercamiento a la cohomología de haces y a la noción de haz coherente (introducida por J.P. Serre en 1955): usaremos varios resultados que serán probados más adelante!

Motivación: sea X un espacio topológico y $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ sucesión exacta de haces de grupos abelianos en X. Entonces, "Γ es un functor exacto por la izquierda", i.e.:

$$0 \to \Gamma(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{\Gamma(f)} \Gamma(X,\mathcal{G}) \xrightarrow{\Gamma(g)} \Gamma(X,\mathcal{H})$$

es exacta, pero $\Gamma(X,\mathcal{G}) \to \Gamma(X,\mathcal{H})$ no es necesariamente sobreyectiva (eg. $0 \to \underline{\mathbb{Z}} \hookrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp(2\pi i\,\cdot)} \mathcal{O}_X^* \to 0$ sucesión exponencial en $X = \mathbb{C}$). La cohomología mide "cuánto falla la exactitud".

Ejercicio Sea $C \subseteq \mathbb{P}^2$ curva elíptica. Probar que $0 \to \mathcal{O}_C(-3) \to \Omega^1_{\mathbb{P}^2}|_C \to \Omega^1_C \to 0$ es otro contraejemplo.

Objetivo: Definir de manera canónica (!) para todo haz de grupos abelianos $\mathcal{F}$ en X y todo $i \in \mathbb{N}$ el i-ésimo grupo de cohomología $H^i(X,\mathcal{F})$ verificando (entre otras cosas):

① $H^0(X,\mathcal{F}) = \Gamma(X,\mathcal{F}) \underset{\text{def}}{=} \mathcal{F}(X)$.

② $\varphi: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ morfismo de haces induzca $H^i(\varphi): H^i(X,\mathcal{F}) \to H^i(X,\mathcal{G})$ $\forall i \in \mathbb{N}$, con $H^0(\varphi) = \Gamma(\varphi)$.

③ Toda sucesión exacta $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ de haces induzca una sucesión exacta (larga)

$$0 \to H^0(X,\mathcal{F}) \to H^0(X,\mathcal{G}) \to H^0(X,\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta^0} H^1(X,\mathcal{F}) \to H^1(X,\mathcal{G}) \to H^1(X,\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta^1} H^2(X,\mathcal{F}) \to \dots$$

La manera más concreta (pero que depende de elecciones a priori) es considerar cohomología de Čech:

Def: Sea $\mathcal{F}$ haz de grupos abelianos en un esp. topológico X. Dado un cubrimiento abierto $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ de X, donde I es un conjunto ordenado, definimos el grupo abeliano de p-cocadenas de Čech de $\mathcal{F}$ resp. a $\mathcal{U}$ por:

$$C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) := \prod_{i_0<\dots<i_p} \mathcal{F}(U_{i_0}\cap\dots\cap U_{i_p}), \quad \text{donde } p\in\mathbb{N}.$$

Así, una p-cocadena $s \in C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ es una colección $s = \{s_{i_0,\dots,i_p}\}_{i_0<\dots<i_p}$ de secciones de $\mathcal{F}$, con una sección por cada posible intersección (ordenada) de $p+1$ abiertos del cubrimiento $\mathcal{U}$.

Ejemplos: ⓪ $C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i)$ y $s = \{s_i\}_{i\in I}$ con $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$.

① $C^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \prod_{i<j} \mathcal{F}(U_i\cap U_j)$ y $s = \{s_{ij}\}_{i<j}$ con $s_{ij} \in \mathcal{F}(U_i\cap U_j)$.

② $C^2(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \prod_{i<j<k} \mathcal{F}(U_i\cap U_j\cap U_k)$ y $s = \{s_{ijk}\}_{i<j<k}$ con $s_{ijk} \in \mathcal{F}(U_i\cap U_j\cap U_k)$.

Def: Para cada $p\in\mathbb{N}$, definimos el operador de coborde $d^p: C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ mediante

$$(d^p s)_{i_0,\dots,i_{p+1}} := \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k s_{i_0,\dots,i_{k-1},i_{k+1},\dots,i_{p+1}}|_{U_{i_0}\cap\dots\cap U_{i_{p+1}}}.$$

Ejemplos: ⓪ Sea $s = \{s_i\} \in C^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$ entonces $(d^0 s)_{i_0 i_1} := s_{i_1}|_{U_{i_0}\cap U_{i_1}} - s_{i_0}|_{U_{i_0}\cap U_{i_1}}$, i.e., $d^0 s = \{s_{ij}\}$ con $s_{ij} := s_j|_{U_i\cap U_j} - s_i|_{U_i\cap U_j} \in \mathcal{F}(U_i\cap U_j)$.

① Sea $s = \{s_{ij}\} \in C^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$, entonces $(d^1 s)_{i_0 i_1 i_2} := s_{i_1 i_2}|_{U_{i_0}\cap U_{i_1}\cap U_{i_2}} - s_{i_0 i_2}|_{U_{i_0}\cap U_{i_1}\cap U_{i_2}} + s_{i_0 i_1}|_{U_{i_0}\cap U_{i_1}\cap U_{i_2}}$ i.e., $d^1 s = \{s_{ijk}\}$ con $s_{ijk} := s_{jk}|_{U_i\cap U_j\cap U_k} - s_{ik}|_{U_i\cap U_j\cap U_k} + s_{ij}|_{U_i\cap U_j\cap U_k} \in \mathcal{F}(U_i\cap U_j\cap U_k)$.

En particular, $d^1(d^0 s) = 0$ para toda $s \in C^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$.

Ejercicio importante Verificar que $d^{p+1}\circ d^p = 0$ para todo $p\in\mathbb{N}$, i.e., $\operatorname{Im}(d^p) \subseteq \ker(d^{p+1})$.

Def: Sea $\mathcal{F}$ haz de grupos abelianos en un espacio topológico X. Dado un cubrimiento abierto $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ de X, donde I es un conjunto ordenado, definimos el p-ésimo grupo de cohomología de Čech por

$$\check{H}^p(X,\mathcal{F}) := \check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) := \ker(d^p)/\operatorname{Im}(d^{p-1}), \quad \text{donde } p\in\mathbb{N},$$

y donde por convención $d^p = 0$ y $C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) = 0$ si $p<0$ (eg. $\check{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \ker(d^0)$). En part, si cada $\mathcal{F}(U)$ es un k-ev entonces $\check{H}^p(X,\mathcal{F})$ también, y escribimos $h^p(X,\mathcal{F}) := \dim_k \check{H}^p(X,\mathcal{F})$.

Ejemplo: $\check{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \underset{\text{def}}{=} \ker(d^0: C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^1(\mathcal{U},\mathcal{F}))$. Sea $s = \{s_i\}_{i\in I} \in C^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$ con $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$, entonces $d^0 s = (s_j|_{U_i\cap U_j} - s_i|_{U_i\cap U_j}) = 0 \iff s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}$ $\forall i,j\in I$. Luego, como $\mathcal{F}$ es haz, $\exists!\, s \in \mathcal{F}(X) = \Gamma(X,\mathcal{F})$ tq $s|_{U_i} = s_i$ $\forall i\in I$. Así, $\check{H}^0(X,\mathcal{F}) = \check{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \cong \Gamma(X,\mathcal{F})$ para todo $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$!

<u>Importante</u>: Para $p \geq 1$, los grupos $\check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ pueden <u>depender</u> del cubrimiento $\mathcal{U}=(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ de X. Pero si $\mathcal{V}<\mathcal{U}$ es un <u>refinamiento</u> (ie, $\forall V_j\in\mathcal{V}$, $\exists\, \mathcal{U}_i\in\mathcal{U}$ tq $V_j\subseteq\mathcal{U}_i$) entonces hay restricciones naturales $C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})\to C^p(\mathcal{V},\mathcal{F})$ que inducen morfismos de grupos $\check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F})\to\check{H}^p(\mathcal{V},\mathcal{F})$. Luego, se puede definir de manera canónica

$$\check{H}^p(X,\mathcal{F}):=\varinjlim_{\mathcal{U}\text{ cubr. de }X}\check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}),$$

que en términos prácticos nos dice que $s\in\check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ y $t\in\check{H}^p(\mathcal{V},\mathcal{F})$ son iguales en $\check{H}^p(X,\mathcal{F})$ si existe un refinamiento común $\mathcal{W}<\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}<\mathcal{V}$ tal que $s|_{\mathcal{W}}=t|_{\mathcal{W}}$.

⚠ Veremos que para <u>variedades algebraicas</u> X podemos considerar <u>cualquier</u> cubrimiento <u>afín</u> (!) $\mathcal{U}=(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ de X y tendremos que $\check{H}^p(X,\mathcal{F})=\check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ siempre que $\mathcal{F}$ sea un <u>haz coherente</u>. Más aún, $H^p(X,\mathcal{F})=\check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ en ese caso, donde $H^p(X,\mathcal{F})$ es la "verdadera" cohomología (que definiremos más adelante usando functores derivados !).

<u>Ejemplo importante</u>: Sea X variedad alg. irreducible. Veamos que $\mathrm{Div}(X)/\mathrm{PDiv}(X)\cong\mathrm{Pic}(X)\cong\check{H}^1(X,\mathcal{O}_X^*)$. En efecto, un fibrado en rectas $L\in\mathrm{Pic}(X)$ está det. por un cubrimiento $\mathcal{U}=(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ de X y por funciones de transición $g_{ij}\in\mathcal{O}_X^*(\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j)$ que verifican $g_{ij}\,g_{jk}\,g_{ki}=1$ (condición de cociclo). Por otro lado, $g=(g_{ij})\in C^1(\mathcal{U},\mathcal{O}_X^*)$ con $g_{ij}\in\mathcal{O}_X^*(\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j)$ (grupo multiplicativo !) cumple $d^1g=0$ si y sólo si $g_{ij}\,g_{jk}\,g_{ki}=1$ en $\mathcal{O}_X^*(\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j\cap\mathcal{U}_k)$ ✓ Además, $\mathrm{Im}(d^0)$ corresponde (por definición) a divisores de Cartier principales ✓ Luego, $\mathrm{Pic}(X)\cong\check{H}^1(X,\mathcal{O}_X^*)$.

<u>Functorialidad</u>: Recordemos que un morfismo $\varphi:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ de haces de grupos abelianos en X es una colección de morfismos de grupos $\varphi_{\mathcal{U}}:\mathcal{F}(\mathcal{U})\to\mathcal{G}(\mathcal{U})$ $\forall\,\mathcal{U}\subseteq X$ abierto, compatibles con las restricciones. En part, inducen morfismos $C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})\to C^p(\mathcal{U},\mathcal{G})$ que conmutan con los diferenciales $d^p_{\mathcal{F}}$ y $d^p_{\mathcal{G}}$, y luego definen morfismos $\check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F})\to\check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{G})$. Tomando límites inductivos obtenemos:

$$\check{H}^p(\varphi):\check{H}^p(X,\mathcal{F})\longrightarrow\check{H}^p(X,\mathcal{G})$$

morfismos de grupos $\forall p\in\mathbb{N}$, con $\check{H}^0(\varphi)=\Gamma(\varphi):\Gamma(X,\mathcal{F})\to\Gamma(X,\mathcal{G})$ ✓

$\boxed{\text{¡Atención!}}$ Para completar nuestro "objetivo" falta verificar si dada $0\to\mathcal{F}\to\mathcal{G}\to\mathcal{H}\to0$ suc. exacta existe una sucesión exacta (larga) en cohomología

$$0\to\check{H}^0(X,\mathcal{F})\to\check{H}^0(X,\mathcal{G})\to\check{H}^0(X,\mathcal{H})\xrightarrow{\delta^0}\check{H}^1(X,\mathcal{F})\to\check{H}^1(X,\mathcal{G})\to\check{H}^1(X,\mathcal{H})\xrightarrow{\delta^1}\check{H}^2(X,\mathcal{F})\to\dots$$

se puede verificar que no hay problema para los $\check{H}^p$ con $p\in\{0,1\}$, pero si X <u>no</u> es Hausdorff (eg. top. de Zariski !) esto falla para $\check{H}^p$ con $p\geq2$ ⇝ No es la "buena" cohomología ☹
Por otro lado, veremos que $H^p(X,\mathcal{F})$ definida usando functores derivados <u>sí</u> lo cumple ! ☺

⚠ El siguiente resultado (que discutiremos más adelante) permite comparar ambas cohomologías.

<u>Teorema de Leray</u>: Sea X un esp. topológico y $\mathcal{F}$ un haz de grupos abelianos en X. Sea $\mathcal{U}=(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ cubrimiento abierto de X tal que $H^p(\mathcal{U}_{i_1}\cap\dots\cap\mathcal{U}_{i_k},\mathcal{F})=0$ para todos $i_1,\dots,i_k\in I$ y todo $p\geq1$. Entonces, $\check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F})\cong H^p(X,\mathcal{F})$ isomorfismo para todo $p\geq0$.

Veremos que las hipótesis anteriores se cumplen para $\mathcal{U}$ cubrimiento <u>afín</u> y $\mathcal{F}$ <u>haz coherente</u>:

<u>Def</u>: Sea X una variedad algebraica. Un <u>haz quasi-coherente</u> en X es un $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathcal{F}$ tal que para todo $x\in X$ existe $\mathcal{U}$ vecindad abierta de x y una sucesión exacta de $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$-módulos

$$\mathcal{O}_{\mathcal{U}}^{\oplus I}\to\mathcal{O}_{\mathcal{U}}^{\oplus J}\to\mathcal{F}|_{\mathcal{U}}\to0,$$

donde I y J son conjuntos arbitrarios. En part, si I y J son conjuntos <u>finitos</u> para todo $\mathcal{U}$, diremos que $\mathcal{F}$ es un <u>haz coherente</u> (ie, $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}^{\oplus m}\to\mathcal{O}_{\mathcal{U}}^{\oplus n}\to\mathcal{F}|_{\mathcal{U}}\to0$ con $m,n\in\mathbb{N}$).

<u>Ejemplos</u>: ① Sea $E\to X$ fibrado vectorial de $\mathrm{rg}(E)=r$ y $\mathcal{E}$ su haz de secciones. Si $E|_{\mathcal{U}}\cong\mathcal{U}\times\mathbb{A}^r$ entonces $\mathcal{E}|_{\mathcal{U}}\cong\mathcal{O}_{\mathcal{U}}^{\oplus r}$. Luego, $\mathcal{E}$ es un haz coherente !

② $\mathcal{O}_X^*$ y $\underline{\mathbb{Z}}$ <u>no</u> son quasi-coherentes, pues no son $\mathcal{O}_X$-módulos !

<u>Caso part. importante</u>: Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ var. alg. <u>afín</u> irreducible, con $A = \mathcal{O}(X) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ k-álgebra de funciones regulares. Recordemos que si $f \in A$ entonces $\mathcal{U}_f = \{x \in X \text{ tq } f(x) \neq 0\}$ es un abierto ("principal") afín con $\mathcal{O}(\mathcal{U}_f) \cong A_f$ (localización en f). Dichos abiertos forman una base de la topología de Zariski de X.

Sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo y recordemos que $M := \Gamma(X, \mathcal{F})$ es un A-módulo. Además, para todo A-módulo M y todo $f \in A$ se define

$$M_f := M \otimes_A A_f = \left\{ \frac{m}{f^p} \text{ con } m \in M \text{ y } p \in \mathbb{N} \right\} / \sim$$

donde $\frac{m}{f^p} \sim \frac{m'}{f^q} \iff \exists r \in \mathbb{N}$ tq $f^r(mf^q - m'f^p) = 0$ en M.

<u>Teorema</u>: Sea $\mathcal{F}$ un haz coherente en una variedad alg. <u>afín</u> irreducible X. Entonces, para toda $f \in \mathcal{O}(X)$ el morfismo $\varphi_f : \Gamma(X, \mathcal{F})_f \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathcal{U}_f, \mathcal{F})$, $\frac{s}{f^p} \mapsto \frac{1}{f^p} \cdot s$ es un isomorfismo.

<u>Dem</u>: La afirmación es local, y luego podemos sup. que existe $\mathcal{O}_X^{\oplus m} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_X^{\oplus n} \xrightarrow{\beta} \mathcal{F} \to 0$ exacta en X. Veamos que:

1° <u>φ_f inyectiva</u> (ie, si $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ es tq $s|_{\mathcal{U}_f} = 0$ entonces $\exists p \in \mathbb{N}$ tq $sf^p = 0$ en X):
Sea $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ tq $s|_{\mathcal{U}_f} = 0$. Como β morfismo de haces (!) sobreyectivo, existe $X = \bigcup \mathcal{U}_i$ cubr. de X y $\vec{g_i} \in \mathcal{O}_X^{\oplus m}(\mathcal{U}_i)$ tq $\beta(\vec{g_i}) = s|_{\mathcal{U}_i}$. Por otro lado, dado que si $sf^p|_{\mathcal{U}_i} = 0 \; \forall i \Rightarrow sf^p = 0$ en X, basta tratar el caso $s = \beta(g)$ con $g \in \mathcal{O}_X^{\oplus m}(X) = A^{\oplus m}$. Como $s|_{\mathcal{U}_f} = \beta(g)|_{\mathcal{U}_f} = \beta(g|_{\mathcal{U}_f}) = 0$, tenemos que $g|_{\mathcal{U}_f} \in \ker(\beta) = \operatorname{Im}(\alpha)$. Como antes: existe $\mathcal{U}_f = \bigcup_i \mathcal{U}_{f_i}$ cubr. de $\mathcal{U}_f$ y $g_i \in A^{\oplus m}$ tq $g|_{\mathcal{U}_{f_i}} = \alpha\left(\frac{g_i}{f_i^p}\right)$, ie, las componentes del vector $f_i^p g - \alpha(g_i)$ son <u>nulas</u> en $\mathcal{U}_f \Rightarrow$ nulas en todo X (pues $\mathcal{U}_f$ denso!). Además, como los $\mathcal{U}_{f_i}$ cubren $\mathcal{U}_f$, los f_i^p <u>no</u> tienen ceros comunes en $\mathcal{U}_f$ y luego (Nullstellensatz) existen $h_i \in A$ tq $\sum_i f_i^p \frac{h_i}{f^q} = 1$ en A_f
$\underset{A \text{ dominio}}{\Rightarrow} f^q s = \beta(f^q g) = \beta\left(\sum_i f_i^p h_i g\right) = \beta\left(\sum_i \alpha(g_i) h_i\right) = 0$, pues $\beta \circ \alpha = 0$ ✓

2° <u>φ_f sobreyectiva</u> (ie, si $s \in \Gamma(\mathcal{U}_f, \mathcal{F})$ entonces existe $p \in \mathbb{N}$ y $\tilde{s} \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ tq $sf^p = \tilde{s}|_{\mathcal{U}_f}$):
Veamos primero que $\Gamma(\beta) : A^{\oplus m} \to \Gamma(X, \mathcal{F})$ sobreyectiva: Sea $s \in \Gamma(X, \mathcal{F}) \underset{\beta \text{ sobre}}{\Rightarrow} \exists X = \bigcup_i \mathcal{U}_{f_i}$ cubr. de X y $g_i \in A^{\oplus m}$ tq $s|_{\mathcal{U}_{f_i}} = \beta\left(\frac{g_i}{f_i^p}\right)$. Las secciones $f_i^p s$ y $\beta(g_i)$ coinciden en $\mathcal{U}_{f_i}$ y luego 1° implica que $\exists q \in \mathbb{N}$ tq $sf_i^{p+q} = \beta(g_i f_i^q)$. Como antes: $\exists \sum_i f_i^{p+q} h_i = 1$ "partición de la unidad"
$\Rightarrow s = \sum_i f_i^{p+q} h_i s = \sum_i h_i \beta(g_i f_i^q) = \beta\left(\sum_i h_i g_i f_i^q\right)$, ie, $\Gamma(\beta)$ sobreyectivo ✓
El mismo cálculo implica $\Gamma(\mathcal{U}_f, \mathcal{F}) = \beta(\Gamma(\mathcal{U}_f, \mathcal{O}_X)^{\oplus m}) = \beta(A_f^{\oplus m})$, ie, $s \in \Gamma(\mathcal{U}_f, \mathcal{F})$ se escribe como $s = \beta\left(\frac{g}{f^p}\right)$ y luego $\tilde{s} := \beta(g) \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ cumple $\tilde{s}|_{\mathcal{U}_f} = sf^p$. ■

<u>Conclusión</u>: Un haz coherente $\mathcal{F}$ en una variedad afín X está determinado por el A-módulo $\Gamma(X, \mathcal{F})$ de sus secciones globales, donde $A = \mathcal{O}(X)$.

<u>Construcción</u>: Sea X var. alg. afín, con $A = \mathcal{O}(X)$ k-álgebra de funciones regulares. Dado un A-módulo M, definimos un haz $\tilde{M}$ de $\mathcal{O}_X$-módulos mediante: Para todo $f \in A$ se define

$$\Gamma(\mathcal{U}_f, \tilde{M}) \underset{\text{not}}{=} \tilde{M}(\mathcal{U}_f) := M_f$$

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que $\tilde{M}$ es efectivamente un haz (de $\mathcal{O}_X$-módulos) y que $\tilde{M}$ es <u>coherente</u> si M es un A-módulo finitamente generado. Además, $\tilde{A} = \mathcal{O}_X$.

<u>Indicación</u>: M fin. gen. sobre A anillo noetheriano implica que $\exists r, s \in \mathbb{N}$ tq $A^{\oplus r} \to A^{\oplus s} \to M \to 0$ exacta. Además $M \mapsto \tilde{M}$ envía suc. exactas de A-mód. en suc. exactas de $\mathcal{O}_X$-módulos pues la localización preserva la exactitud.

<u>Conclusión</u>: En una variedad alg. afín X, las construcciones $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$ y $M \mapsto \tilde{M}$ son inversas una de la <u>otra</u>. En particular,

$$\mathcal{F} \cong \widetilde{\Gamma(X, \mathcal{F})} \quad \text{y} \quad \Gamma(X, \tilde{M}) \cong M$$

para todo haz coherente $\mathcal{F}$ en X y para todo A-módulo M finitamente generado.

La correspondencia anterior permite traducir geométricamente resultados sobre módulos sobre un anillo!

Ejemplo: Sea X variedad algebraica y sea $Y \overset{i}{\hookrightarrow} X$ subvar. Entonces, $\mathcal{I}_Y$ y $i_* \mathcal{O}_Y$ son coherentes en X. En efecto, en un abierto afín $\mathcal{U} \subseteq X$ con $\mathcal{O}(\mathcal{U}) = A$ y con $\mathcal{I}(Y \cap \mathcal{U}) = I$, tenemos que $\mathcal{O}(Y \cap \mathcal{U}) =: B \cong A/I$ y I son A-módulos finitamente generados.
$\Rightarrow \mathcal{I}_Y|_{\mathcal{U}} \cong \widetilde{I}$ y $(i_* \mathcal{O}_Y)|_{\mathcal{U}} \cong \widetilde{B}$ son haces coherentes $\forall \mathcal{U} \subseteq X$ abierto afín ✓ Similar:

Corolario: Sean X e Y variedades alg. y sea $f : X \to Y$ morfismo regular. Entonces:
① Para todo $\varphi : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ morfismo de haces coherentes de X, se tiene que $\ker(\varphi)$, $\operatorname{Im}(\varphi)$ y $\operatorname{coker}(\varphi)$ son coherentes en X (ie, la categoría $\underline{\mathrm{Coh}}(X)$ de haces coherentes en X es abeliana (!)).
② El producto tensorial y suma directa finita de haces coherentes es coherente.
③ Si $\mathcal{G}$ es coherente en Y, entonces $f^* \mathcal{G}$ es coherente en X.
④ Si $\mathcal{F}$ es quasi-coherente en X, entonces $f_* \mathcal{F}$ es quasi-coherente en X. Más aún, si f es un morfismo finito (!) y $\mathcal{F}$ coherente en X, entonces $f_* \mathcal{F}$ es coherente en Y.

Aplicación: Sea X variedad alg. afín con $A = \mathcal{O}(X)$. Entonces, $\Gamma : \underline{\mathrm{Coh}}(X) \to \underline{A\text{-mod}}$, $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$ es un functor exacto, ie, si $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \to 0$ sucesión exacta de haces coherentes en X, entonces $0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\Gamma(\alpha)} \Gamma(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\Gamma(\beta)} \Gamma(X, \mathcal{H}) \to 0$ es una sucesión exacta de A-módulos.
En efecto, sea $N = \operatorname{Im}(\Gamma(\beta)) \subseteq \Gamma(X, \mathcal{H})$. Entonces, $0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{G}) \to N \to 0$ es exacta y luego (como la localización es exacta (!)) $0 \to \widetilde{\Gamma(X, \mathcal{F})} \cong \mathcal{F} \to \widetilde{\Gamma(X, \mathcal{G})} \cong \mathcal{G} \to \widetilde{N} \to 0$ es exacta.
$\Rightarrow \widetilde{N} \cong \mathcal{H}$ y así $N \cong \Gamma(X, \widetilde{N}) \cong \Gamma(X, \mathcal{H})$, de donde se concluye que Γ es exacto ✓

Volvamos a nuestra discusión sobre cohomología:

Prop: Sea X variedad algebraica y $\mathcal{F}$ haz coherente en X. Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento finito de X por abiertos afines principales (ie, de la forma $\mathcal{U}_f$). Entonces, si X es afín se tiene:
$$\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0 \quad \text{para todo } p \geq 1.$$
En particular, $\check{H}^p(X, \mathcal{F}) = 0$ para todo $p \geq 1$ con X var. alg afín y $\mathcal{F}$ haz coherente en X.

Dem: Por simpleza, veamos el caso $p = 1$: Sea $A = \mathcal{O}(X)$ y $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$ A-módulo. En un cubrimiento $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_{f_i})$ toda 1-cocadena $s \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ se escribe como $s = (s_{ij})_{i<j}$ con $s_{ij} \in M_{f_i f_j}$ de la forma $s_{ij} = \dfrac{m_{ij}}{f_i^p f_j^p}$, con $p \in \mathbb{N}$ y $m_{ij} \in M$. Por otro lado,
$d^1 s = 0 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} s_{jk} - s_{ik} + s_{ij} = 0 \Leftrightarrow f_i^p m_{jk} - f_j^p m_{ik} + f_k^p m_{ij} = 0$ en $M_{f_i f_j f_k}$, ie, $\exists\, q \in \mathbb{N}$ tal que $(f_i f_j f_k)^q (f_i^p m_{jk} - f_j^p m_{ik} + f_k^p m_{ij}) = 0$ en $M \Rightarrow f_k^{p+q} s_{ij} = \dfrac{m_{ik} f_k^q}{f_i^p} - \dfrac{m_{jk} f_k^q}{f_j^p}$ en $M_{f_i f_j}$.
Como siempre, consideramos $\sum_k g_k f_k^{p+q} = 1$ "partición de la unidad", de donde obtenemos que
$$s_{ij} = \sum_k g_k f_k^{p+q} s_{ij} = \frac{\sum_k g_k m_{ik} f_k^q}{f_i^p} - \frac{\sum_k g_k m_{jk} f_k^q}{f_j^p} = s_j - s_i \text{ en } M_{f_i f_j}, \text{ con } s_i := -\frac{\sum_k g_k m_{ik} f_k^q}{f_i^p}$$
ie, $(s_{ij})_{i<j}$ está en la imagen de d^0 y luego $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$. Similar para $\check{H}^p$ con $p \geq 2$. ∎

Veremos más adelante que lo mismo ocurre para la "verdadera" cohomología:

Teorema (Serre): Sea $\mathcal{F}$ un haz coherente en una variedad alg. afín. Entonces,
$$H^p(X, \mathcal{F}) = 0 \quad \text{para todo } p \geq 1.$$

Como consecuencia del resultado anterior y el Teorema de Leray, obtenemos el importante:

Teorema: Sea X una variedad algebraica y $\mathcal{F}$ un haz coherente en X. Entonces, para todo cubrimiento finito $\mathcal{U}$ de X formado por abiertos afines se tiene que:
$$\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \cong H^p(X, \mathcal{F}) \quad \text{para todo } p \geq 0.$$

Dem: Sea $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_i)$ con $\mathcal{U}_i$ abierto afín. Entonces, como X es separada (!) se tiene que $\mathcal{U}_{i_1} \cap \ldots \cap \mathcal{U}_{i_k}$ es también afín, y luego $H^p(\mathcal{U}_{i_1} \cap \ldots \cap \mathcal{U}_{i_k}, \mathcal{F}) = 0$ $\forall p \geq 1$. ∎

Una consecuencia importante de lo anterior es el siguiente resultado que afirma que la cohomología de un cerrado $Y \subseteq X$ se puede calcular en X.

[**Corolario**: Sea X una variedad algebraica y sea $Y \overset{i}{\hookrightarrow} X$ subvariedad. Entonces, para todo haz coherente $\mathcal{F}$ en Y se tiene que $i_*\mathcal{F}$ es coherente en X y además

$$H^p(X, i_*\mathcal{F}) \cong H^p(Y, \mathcal{F}) \quad \text{para todo } p \geq 0.$$

Dem: Sabemos que $i : Y \hookrightarrow X$ es un morfismo finito (ver §15, pág 49) y luego $i_*\mathcal{F}$ es coherente en X. Más explícitamente, si $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto <u>afín</u> con $A = \mathcal{O}(\mathcal{U})$ y con $I = \mathcal{I}(Y \cap \mathcal{U})$ ideal en A, entonces $M := \Gamma(Y \cap \mathcal{U}, \mathcal{F})$ es un A/I-módulo fin. gen, y para $f \in A$ se tiene

$$\Gamma(\mathcal{U}_f, i_*\mathcal{F}) \underset{\text{def}}{=} \Gamma(Y \cap \mathcal{U}_f, \mathcal{F}) = M_f \quad (*)$$

ie, $(i_*\mathcal{F})|_{\mathcal{U}} = \widetilde{M}$, donde pensamos a M como A-módulo fin. gen (!), y así $i_*\mathcal{F}$ es coherente.
Por otro lado, si $\mathfrak{U} = (\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ cubrimiento <u>afín</u> de X, entonces $\mathcal{V} = (V_i)_{i \in I}$ con $V_i := Y \cap \mathcal{U}_i$ es un cubrimiento <u>afín</u> de Y. Luego, gracias al Teorema anterior, basta verificar que $\check{H}^p(\mathfrak{U}, i_*\mathcal{F}) \cong \check{H}^p(\mathcal{V}, \mathcal{F})$. Esto último se obtiene del hecho que las restricciones de p-cocadenas $C^p(\mathfrak{U}, i_*\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} C^p(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ son isomorfismos (gracias a $(*)$) ✓ ■

Como aplicación, podemos probar el siguiente resultado fundamental en un caso particular:

[**Teorema de anulación de Grothendieck**: Sea X una variedad algebraica y $\mathcal{F}$ un haz de grupos abelianos en X. Entonces,

$$H^p(X, \mathcal{F}) = 0 \quad \text{para todo } p > \dim(X).$$]

Dem (caso particular): El caso general se deduce del hecho que toda variedad alg. X de $\dim(X) = n$ se puede cubrir con a lo más $n+1$ abiertos afines (ver libro de Hartshorne p.208 y p.224), de donde obtenemos un cubrimiento $\mathfrak{U}$ que cumple $C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0$ para $p > n$ y luego (por el Teorema de Leray) $H^p(X, \mathcal{F}) = 0$ si $p > n$ y si $\mathcal{F}$ coherente (el caso abeliano es más delicado).
Supongamos $\mathcal{F}$ coherente y veamos que toda variedad <u>proyectiva</u> $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ de $\dim(X) = n$ se puede cubrir con a lo más $n+1$ abiertos afines: Como $\dim(X) = n$, existe $\Lambda \subseteq \mathbb{P}^N$ subesp. lineal con $\Lambda \cong \mathbb{P}^{N-n-1}$ tal que $X \cap \Lambda = \emptyset$ (cf. §16, p.54). Si suponemos que Λ está dado por $\{x_0 = \dots = x_n = 0\}$ entonces $X \subseteq \mathcal{U}_0 \cup \dots \cup \mathcal{U}_n$, con $\mathcal{U}_i = \{x_i \neq 0\} \cong \mathbb{A}^N$ y donde cada $V_i = X \cap \mathcal{U}_i$ es afín. ■

Ejemplo: Sea $X = \mathbb{P}^1$ y $\mathcal{F}$ haz coherente, entonces $H^i(\mathbb{P}^1, \mathcal{F}) = 0$ si $i \geq 2$.

① $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$: $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) \cong k$ ✓ Calculemos $H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$ usando cohomología de Čech resp. al cubrimiento <u>afín</u> $\mathcal{U}_i = \{x_i \neq 0\}$ $(i = 0, 1)$:

$$C^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_1) \cong \left\{ \frac{f}{x_0^a x_1^b} \text{ con } f \text{ homog. de grado } a+b \right\} = \mathrm{Vect}_k \left\langle \frac{x_0^m x_1^n}{x_0^a x_1^b} \text{ con } m+n = a+b, \; \begin{matrix} m, n \geq 0 \\ a, b \geq 0 \end{matrix} \right\rangle$$

Luego, $m - a = n - b$ implica que $m \geq a$ ó $n \geq b$ y luego $s = \frac{x_0^m x_1^n}{x_0^a x_1^b}$ es regular en $\mathcal{U}_0$ ó en $\mathcal{U}_1$.
$\Rightarrow$ Cada generador está en la imagen de $d^0 : C^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{U}_0) \times \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{U}_1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_1)$, ie, $H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) = 0$.

$$(s_0, s_1) \longmapsto s_1|_{\mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_1} - s_0|_{\mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_1}$$

② $\mathcal{F} = \omega_{\mathbb{P}^1} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$: Como antes, tenemos que (cf. §21, pág 72):

$$C^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)(\mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_1) \cong \left\{ \frac{f}{x_0^a x_1^b} \text{ con } f \text{ homog. de grado } a+b-2 \right\} = \mathrm{Vect}_k \left\langle \frac{x_0^m x_1^n}{x_0^a x_1^b} \text{ con } m+n = a+b-2 \right\rangle$$

Luego, $m - (a-1) = n - (b-1)$ implica que $m \geq a-1$ ó $n \geq b-1$. Si alguna desigualdad es estricta, entonces $s = \frac{x_0^m x_1^n}{x_0^a x_1^b}$ sería regular en algún $\mathcal{U}_0$ ó $\mathcal{U}_1$ y, tal como antes, sería 0 en $H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2))$.
Así, sólo nos queda el caso $m = a-1$ y $n = b-1$, ie, $s = \frac{1}{x_0 x_1}$. Dado que $C^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)) = 0$ tenemos que $d^1 = 0$ y $\ker(d^1) = C^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2))$. Finalmente, $H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)) \cong \mathrm{Vect}_k \left\langle \frac{1}{x_0 x_1} \right\rangle \cong k$.

Ejercicio: Probar que $X_n = \mathbb{A}^n \setminus \{0\}$ <u>no</u> es afín para todo $n \geq 2$.
[Indicación: usar el Teorema de Leray para calcular $H^1(X_2, \mathcal{O}_{X_2})$ vía cohomología de Čech.]

§29. Cohomología de haces coherentes en una variedad proyectiva

Comenzamos por calcular la cohomología de fibrados en rectas en $\mathbb{P}^n$, y recordemos que $\omega_{\mathbb{P}^n} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)$.

Teorema: Sea $i \in \{0,..,n\}$ y $d \in \mathbb{Z}$. Entonces,

① $h^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = \binom{n+d}{n}$ (resp. $=0$) si $d \geq 0$ (resp. $d<0$).

② $h^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = \binom{-d-1}{n}$ (resp. $=0$) si $d \leq -n-1$ (resp. $d \geq -n$).

③ $h^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = 0$ para todo $d \in \mathbb{Z}$ si $0<i<n$.

En particular, $h^n(\mathbb{P}^n, \omega_{\mathbb{P}^n}) = 1$.

Dem: Sea $\mathcal{F} := \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$. Entonces, $\check{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}) = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \check{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$. En part, para $i=0$ tenemos (ver §21, p.72) que $\check{H}^0(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}) \simeq k[x_0,\dots,x_n] =: S$ anillo graduado, y ① se cumple ✓

Por el Teorema de Leray, basta considerar los abiertos afines estándar $\mathcal{U}_0 = \{x_0 \neq 0\}, \dots, \mathcal{U}_n = \{x_n \neq 0\}$ de $\mathbb{P}^n$ para calcular $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F})$ usando cohomología de Čech. Para $I \subseteq \{0,..,n\}$ escribimos $\mathcal{U}_I := \bigcap_{i\in I} \mathcal{U}_i$

$\Rightarrow H^0(\mathcal{U}_I, \mathcal{F}|_{\mathcal{U}_I}) \simeq \mathrm{Vect}_k \langle x_0^{l_0} \cdots x_n^{l_n}$ con $l_j \in \mathbb{Z}$ y $l_j \geq 0$ si $j \notin I \rangle$. Luego, el complejo de Čech es:

$C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}): \prod S_{x_{i_0}} \xrightarrow{d^0} \prod S_{x_{i_0}x_{i_1}} \xrightarrow{d^1} \dots \xrightarrow{d^{n-1}} S_{x_0\cdots x_n} \xrightarrow{d^n} 0$ con $\check{H}^i(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}) = \ker(d^i)/\mathrm{Im}(d^{i-1})$

(e.g. $(n=1)$: $k[x_0,x_1,x_0^{-1}] \times k[x_0,x_1,x_1^{-1}] \xrightarrow{d^0} k[x_0,x_1,x_0^{-1},x_1^{-1}] \xrightarrow{d^1} 0$ y $H^1(\mathbb{P}^1,\mathcal{F}) \cong k[x_0,x_1,x_0^{-1},x_1^{-1}]/\mathrm{Im}(d^0)$
$\cong x_0^{-1}x_1^{-1} k[x_0^{-1},x_1^{-1}] \simeq \mathrm{Vect}_k\langle x_0^a x_1^b$ con $a,b<0\rangle$ ← graduación $d := a+b \in \mathbb{Z}$.

Para probar ②, veremos que $H^n(\mathbb{P}^n, \omega_{\mathbb{P}^n}) \simeq k$ y que hay un "emparejamiento perfecto" (ie, forma bilineal no-degenerada) $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \times H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-d-n-1)) \to H^n(\mathbb{P}^n, \omega_{\mathbb{P}^n}) \simeq k$, que en part. implica $h^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = h^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-d-n-1))$ y por ende ②:

Como antes, $H^n(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}) = \mathrm{coker}(\prod_k S_{x_0\cdots\hat{x}_k\cdots x_n} \to S_{x_0\cdots x_n}) \cong \mathrm{Vect}_k\langle x_0^{a_0}\cdots x_n^{a_n}$ con $a_j<0\}$ y con graduación $d := \sum_{i=0}^n a_i$. En part, si $d=-n-1$ sólo hay un monomio posible: $x_0^{-1}\cdots x_n^{-1}$ y luego $h^n(\mathbb{P}^n, \omega_{\mathbb{P}^n}) = 1$. Más aún, si $d \geq 0$ entonces $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \simeq \mathrm{Vect}_k\langle x_0^{b_0}\cdots x_n^{b_n}$ con $b_j \geq 0$ y $\sum b_j = d\rangle$ y
$\Rightarrow$ si $x_0^{a_0}\cdots x_n^{a_n} \in H^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-d-n-1))$ y $x_0^{b_0}\cdots x_n^{b_n} \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ entonces:
$x_0^{a_0+b_0}\cdots x_n^{a_n+b_n} \in H^n(\mathbb{P}^n, \omega_{\mathbb{P}^n}) \cong k$ ✓ si $d<0$, entonces $H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-d-n-1)) = 0$ pues no hay monomios en $H^n(\mathbb{P}^n,\mathcal{F})$ de grado $-d-n-1 > -n-1$ ✓

Para ③ usamos inducción en n (OK si $n=1$ ✓): si localizamos resp. a x_n obtenemos que $C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})_{x_n} \cong C^\bullet(\mathcal{U}|_{\mathcal{U}_n}, \mathcal{F}|_{\mathcal{U}_n})$. Además, el Teorema de Serre (ver §28, p.97) implica que $H^i(\mathcal{U}_n, \mathcal{F}|_{\mathcal{U}_n}) = 0$ para $i \geq 1$ pues $\mathcal{U}_n \cong \mathbb{A}^n$ es afín. Dado que la localización preserva la exactitud, deducimos que $H^i(X,\mathcal{F})_{x_n} = 0$ para $i \geq 1$, ie, todo elemento de $H^i(X,\mathcal{F})$ es anulado por una potencia de x_n. Veamos que mult. por x_n es inyectivo ($\Rightarrow H^i(X,\mathcal{F}) = 0 \rightsquigarrow$ ③ ✓):

sea $H = \{x_n = 0\} \cong \mathbb{P}^{n-1} \xhookrightarrow{i} \mathbb{P}^n$ y recordemos (ver §23, p.82) que hay una sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-H) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \xrightarrow{\cdot x_n} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow i_*\mathcal{O}_H \longrightarrow 0 \quad (*)$$

Tensorizando $(*) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ y considerando $\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}}$ obtenemos $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\cdot x_n} \mathcal{F} \longrightarrow i_*\mathcal{F}_H \to 0$ exacta, con $\mathcal{F}_H = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}_H(d)$. Usando que $H^i(\mathbb{P}^n, i_*\mathcal{F}_H) \cong H^i(H, \mathcal{F}_H)$ obtenemos sucesiones exactas:

ⓐ $0 \to H^0(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}) \xrightarrow{\cdot x_n} H^0(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}) \to H^0(H,\mathcal{F}_H) \to H^1(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}) \xrightarrow{\cdot x_n} H^1(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}) \to 0$ ← inducción

ⓑ $0 \to H^i(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}) \xrightarrow[\sim]{\cdot x_n} H^i(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}) \to 0$ ← inducción si $1<i<n-1$ $\Rightarrow H^i(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}) = 0$ si $1<i<n-1$ ✓

ⓒ $0 \to H^{n-1}(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}) \xrightarrow{\cdot x_n} H^{n-1}(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}) \to H^{n-1}(H,\mathcal{F}_H) \to H^n(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}) \xrightarrow{\cdot x_n} H^n(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}) \to 0$ ← $\dim(H) = n-1$.

Notamos que los primeros términos de ⓐ se escriben como

$$0 \to \underbrace{k[x_0,\dots,x_n] \xhookrightarrow{\cdot x_n} k[x_0,\dots,x_n] \twoheadrightarrow k[x_0,\dots,x_{n-1}] \to 0}_{\text{exacta! } \rightsquigarrow \text{ "podemos agregar un 0"}} \to H^1(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}) \xrightarrow[\sim]{\cdot x_n} H^1(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}) \to 0$$

$\Rightarrow H^1(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}) = 0$. De manera similar (eg. usando ②) se deduce que $H^{n-1}(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}) = 0$ ✓ ■

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Deducir (usando la sucesión de Euler) que $h^i(\mathbb{P}^n, \Omega^1_{\mathbb{P}^n}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=1 \\ 0 & \text{sino.} \end{cases}$

Veamos algunas consecuencia del cálculo anterior:

Obs importante: Hay una biyección, para todo $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathcal{F}$, entre:
$$\left\{\begin{matrix} s\in\Gamma(X,\mathcal{F}) \\ \text{sección global}\end{matrix}\right\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \left\{\begin{matrix}\varphi:\mathcal{O}_X\to\mathcal{F} \text{ morfismos} \\ \text{de } \mathcal{O}_X\text{-módulos}\end{matrix}\right\}$$
$$s \longmapsto \varphi_{s,\mathcal{U}}:\mathcal{O}_X(\mathcal{U})\to\mathcal{F}(\mathcal{U}),\ \lambda\mapsto\lambda s|_{\mathcal{U}}$$
$$s_\varphi := \varphi_X(1)\in\mathcal{F}(X) \longleftrightarrow \varphi$$

Notación (Recuerdo): Sea $X \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^n$ var. proyectiva y $d\in\mathbb{Z}$. Entonces, $\mathcal{O}_X(d) := i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)|_X$. Más generalmente, si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo entonces denotamos $\mathcal{F}(d) := \mathcal{F}\otimes\mathcal{O}_X(d)$.

Lema (Serre): Sea $X\hookrightarrow\mathbb{P}^n$ var. proyectiva y $\mathcal{F}$ haz coherente en X. Entonces, existe $r\in\mathbb{N}^{\geq 1}$ y $m\gg 0$ tq $\mathcal{O}_X(-m)^{\oplus r}\twoheadrightarrow\mathcal{F}$ morfismo sobreyectivo de $\mathcal{O}_X$-módulos (ie, $\mathcal{O}_X^{\oplus r}\twoheadrightarrow\mathcal{F}(m)$).

Dem: Sea $\mathcal{U}_i = \{x_i\neq 0\}\cong\mathbb{A}^n$ y $V_i := X\cap\mathcal{U}_i$ abierto afín de X. Como $\mathcal{F}$ es coherente, $\mathcal{F}|_{V_i}\cong\widetilde{M}_i$ para cierto A_i-módulo M_i fin. gen, con $A_i = \mathcal{O}(V_i)$. Sean $s_{i,1},\dots,s_{i,k_i}\in M_i\cong\Gamma(V_i,\mathcal{F}|_{V_i})$ generadores de M_i, que en particular generan el tallo $\mathcal{F}_x$ $\forall x\in V_i$.

A pesar que las s_{ij} no se extienden a seccions globales de $\mathcal{F}$, veremos que $s_{ij}x_i^m\in\Gamma(X,\mathcal{F}(m))$ para cierto $m\gg 0$. Para ello, notamos que $X\setminus V_i$ se cubre por los V_k con $k\neq i$ y luego basta probar que $s_{ij}x_i^m$ se extiende a cada V_k para cierto $m\gg 0$: Como $\mathcal{F}(V_k) = M_k$ y $\mathcal{F}(V_i\cap V_k) = (M_k)_{x_i}$ (localización), existe $d_k\in\mathbb{N}$ tq $s_{ij}x_i^{d_k}\in\mathcal{F}(V_k)$. $\rightsquigarrow$ Tomar $m = \max_k\{d_k\}$ ✓

Así, para $m\gg 0$ obtenemos r secciones $s_{ij}\in\Gamma(X,\mathcal{F}(m))$ que generan los tallos $\mathcal{F}(m)_x$ $\forall x\in X$ $\Rightarrow$ Ellos definen $\mathcal{O}_X^{\oplus r}\twoheadrightarrow\mathcal{F}(m)$ sobreyectivo, ie, $\mathcal{O}_X(-m)^{\oplus r}\twoheadrightarrow\mathcal{F}$ sobreyectivo. ∎

Terminología: Sea X variedad alg. y $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo. Decimos que $\mathcal{F}$ es globalmente generado (por finitas secciones) si existe $N\in\mathbb{N}^{\geq 1}$ y un morfismo sobreyectivo $\mathcal{O}_X^{\oplus N}\twoheadrightarrow\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}_X$-módulos.

Así, el lema anterior dice: "Sea $\mathcal{F}$ haz coherente en $X\hookrightarrow\mathbb{P}^n$ var. proyectiva, entonces $\mathcal{F}(m) := \mathcal{F}\otimes\mathcal{O}_X(m)$ es globalmente generado para cierto $m\gg 0$."

Ejercicio Sea $E\to X$ fibrado vectorial y $\mathcal{E}$ su haz de secciones. Probar que E es globalmente generado (en el sentido de §24, p.86) $\Leftrightarrow$ $\mathcal{E}$ es globalmente generado (como $\mathcal{O}_X$-módulo).

Teorema de finitud: Sea $X\overset{i}{\hookrightarrow}\mathbb{P}^n$ var. alg. proyectiva y $\mathcal{F}$ un haz coherente en X. Entonces, para todo $i\in\mathbb{N}$ los k-ev. $H^i(X,\mathcal{F})$ son de dimensión finita (ie, $h^i(X,\mathcal{F})<+\infty$).

Dem: Dado que $H^i(X,\mathcal{F})\cong H^i(\mathbb{P}^n,i_*\mathcal{F})$ y $i_*\mathcal{F}$ coherente en $\mathbb{P}^n$, podemos sup. que $X=\mathbb{P}^n$. Además, $H^i(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}) = 0$ si $i>n$ (anulación de Grothendieck) ✓ Procedemos por inducción descendente en $i\in\mathbb{N}$: Por el Lema anterior, existen $r,m\in\mathbb{N}$ y una sucesión exacta de haces coherentes en $\mathbb{P}^n$:
$$0\to\mathcal{G}\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m)^{\oplus r}\to\mathcal{F}\to 0 \underset{\text{induce}}{\rightsquigarrow} \dots\to\underbrace{H^i(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m))^{\oplus r}}_{\text{dim. finita!}}\xrightarrow{\alpha}H^i(\mathbb{P}^n,\mathcal{F})\xrightarrow{\delta}\underbrace{H^{i+1}(\mathbb{P}^n,\mathcal{G})}_{\substack{\text{dim finita}\\ \text{(inducción)}}}\to\dots$$
$$\Rightarrow h^i(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}) = \mathrm{rg}(\delta)+\dim_k\ker(\delta) = \mathrm{rg}(\delta)+\mathrm{rg}(\alpha) < +\infty. \ ∎$$

Teorema de anulación de Serre: Sea $X\overset{i}{\hookrightarrow}\mathbb{P}^n$ var. alg. proyectiva y $\mathcal{F}$ un haz coherente en X. Entonces, existe $m_0 = m_0(\mathcal{F})\in\mathbb{N}$ tal que: para todo $i\geq 1$ y $m\geq m_0$ se tiene $H^i(X,\mathcal{F}(m)) = 0$.

Dem: Como antes, podemos sup. que $X=\mathbb{P}^n$ y argumentamos por inducción descendente en $i\in\mathbb{N}$ (OK si $i>n$ ✓): Por el Lema anterior, existen $r,m_1\in\mathbb{N}$ y una sucesión exacta:
$$0\to\mathcal{G}\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m_1)^{\oplus r}\to\mathcal{F}\to 0 \underset{\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)}{\rightsquigarrow} 0\to\mathcal{G}(m)\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m-m_1)^{\oplus r}\to\mathcal{F}(m)\to 0.$$
En cohomología: $\dots\to\underbrace{H^i(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m-m_1))^{\oplus r}}_{=0 \text{ para } m\geq m_1 \text{ y } i\geq 1}\to H^i(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}(m))\to\underbrace{H^{i+1}(\mathbb{P}^n,\mathcal{G}(m))}_{=0 \text{ para } m\geq m_2=m_2(\mathcal{G})=m_2(\mathcal{F})}\to\dots$
$$\Rightarrow H^i(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}(m)) = 0 \quad\text{para } m\geq m_0 := \max\{m_1,m_2\} ✓ \ ∎$$

Caso particular importante: Sea X var. proyectiva y $L\in\mathrm{Pic}(X)$ fibrado en rectas amplio, ie, $\exists m_0\in\mathbb{N}^{\geq 1}$ tq $L^{\otimes m_0}$ muy amplio: $\varphi_{L^{\otimes m_0}}: X\hookrightarrow\mathbb{P}^n$ incrustamiento con $(\varphi_{L^{\otimes m_0}})^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\simeq L^{\otimes m_0}$. Así, $L^{\otimes m_0}\underset{\text{dy}}{=}\mathcal{O}_X(1)$ resp. al incrustamiento $X\hookrightarrow\mathbb{P}^n$. Luego, para todo $\mathcal{F}$ haz coherente en X:

① $\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}^{\otimes m m_0} \underset{\text{def}}{=} \mathcal{F}\otimes\mathcal{O}_X(m) \underset{\text{def}}{=} \mathcal{F}(m)$ es glob. generado $\forall m\gg 0$.

② $\forall i\geq 1$ y $m\gg 0$ se tiene $H^i(X,\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}^{\otimes m_0 m})=0$

donde $\mathcal{L}$ es el haz de secciones de L. Esto motiva la siguiente:

Def: Sea X una variedad alg. y $L\in \operatorname{Pic}(X)$ fibrado en rectas con $\mathcal{L}$ su haz de secciones. Decimos que $\mathcal{L}$ es amplio como $\mathcal{O}_X$-módulo si para todo $\mathcal{F}$ haz coherente en X se tiene que $\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}^{\otimes m}$ es globalmente generado para todo $m=m(\mathcal{F})\gg 0$.

Prop: Sea X variedad alg. y sean $L,M\in\operatorname{Pic}(X)$ con haces de secciones $\mathcal{L}$ y $\mathcal{M}$. Entonces:

① Para todo $r\in\mathbb{N}^{\geq 1}$, $\mathcal{L}$ es amplio como $\mathcal{O}_X$-módulo si y sólo si $\mathcal{L}^{\otimes r}$ lo es.

② Si $\mathcal{L}$ y $\mathcal{M}$ son amplios como $\mathcal{O}_X$-módulos, entonces $\mathcal{L}\otimes\mathcal{M}$ también.

③ Si $\mathcal{M}$ es amplio como $\mathcal{O}_X$-módulo, entonces $\mathcal{L}\otimes\mathcal{M}^{\otimes r}$ también para todo $r\gg 0$.

Dem: Sea $\mathcal{F}$ un haz coherente arbitrario en X. Entonces:

① Si $\mathcal{L}$ amplio entonces $\mathcal{L}^{\otimes r}$ también (pues $mr\geq m$). Sup. $\mathcal{L}^{\otimes r}$ amplio, entonces para todo $0\leq s<r$ el haz $(\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}^{\otimes s})\otimes(\mathcal{L}^{\otimes r})^{\otimes m}\cong\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}^{\otimes(s+mr)}$ es glob. gen para $m\geq m_s$. Luego, $\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}^{\otimes m}$ es glob. gen para $m\geq r\cdot\max\{m_0,\dots,m_{r-1}\}$, ie, $\mathcal{L}$ es amplio ✓

② Sup. primero que $\mathcal{L}$ amplio y $\mathcal{M}$ glob. gen: entonces $\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}^{\otimes m}$ glob. gen $\forall m\gg 0$ y luego $\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}^{\otimes m}\otimes\mathcal{M}^{\otimes m}$ también, ie, $\mathcal{L}\otimes\mathcal{M}$ es amplio en tal caso. En general, si $\mathcal{L}$ y $\mathcal{M}$ son amplios entonces $\mathcal{O}_X\otimes\mathcal{L}^{\otimes m}\cong\mathcal{L}^{\otimes m}$ glob. gen $\forall m\gg 0$ y como $\mathcal{M}^{\otimes m}$ es amplio (por ①) se tiene que $\mathcal{L}^{\otimes m}\otimes\mathcal{M}^{\otimes m}\cong(\mathcal{L}\otimes\mathcal{M})^{\otimes m}$ es amplio $\overset{①}{\Leftrightarrow}$ $\mathcal{L}\otimes\mathcal{M}$ es amplio ✓

③ Si $\mathcal{M}$ amplio, entonces $\mathcal{L}\otimes\mathcal{M}^{\otimes r}$ glob. gen $\forall r\gg 0$. Luego, $(\mathcal{F}\otimes\mathcal{M}^{\otimes m})\otimes(\underbrace{\mathcal{L}\otimes\mathcal{M}^{\otimes r}}_{\text{glob. gen}})^{\otimes m}\cong\mathcal{F}\otimes(\mathcal{L}\otimes\mathcal{M}^{\otimes(r+1)})^{\otimes m}$ glob. gen $\forall m\gg 0$, ie, $\mathcal{L}\otimes\mathcal{M}^{\otimes(r+1)}$ amplio ✓ ■

Teorema: Sea X variedad alg. proyectiva y sea $L\in\operatorname{Pic}(X)$ fibrado en rectas con haz de secciones $\mathcal{L}$. Entonces, $\mathcal{L}$ es amplio como $\mathcal{O}_X$-módulo si y sólo si L es amplio (ie, $\exists r\in\mathbb{N}^{\geq 1}$ tq $L^{\otimes r}$ es muy amplio).

Dem: Sabemos que si $L^{\otimes r}$ es muy amplio, entonces $\mathcal{L}^{\otimes r}$ es amplio como $\mathcal{O}_X$-módulo y luego $\mathcal{L}$ también.
Sup. que $\mathcal{L}$ es amplio como $\mathcal{O}_X$-módulo y sea $x_0\in X$. Consideramos V vecindad afín de x_0 tq $L|_V\cong V\times\mathbb{A}^1$ (ie, $\mathcal{L}|_V\cong\mathcal{O}_V$) y consideramos $Y:=X\setminus V$ cerrado dado por $\mathcal{I}_Y\subseteq\mathcal{O}_X$ haz de ideales. Como $\mathcal{I}_Y$ es coherente y $\mathcal{L}$ es amplio, $\exists m\in\mathbb{N}^{\geq 1}$ tq $\mathcal{I}_Y\otimes\mathcal{L}^{\otimes m}$ es globalmente generado. Por otro lado, podemos pensar las secciones de $\mathcal{I}_Y\otimes\mathcal{L}^{\otimes m}$ como secciones de $\mathcal{L}^{\otimes m}$ que se anulan en Y.
$\Rightarrow \exists s\in\Gamma(X,\mathcal{I}_Y\otimes\mathcal{L}^{\otimes m})\subseteq\Gamma(X,\mathcal{L}^{\otimes m})\overset{\text{def}}{=}H^0(X,L^{\otimes m})$ que no se anula en $x_0\notin Y$ y luego el abierto $X_s:=\{x\in X \text{ tq } s(x)\neq 0\}$ está contenido en V. Como $\mathcal{L}|_V\cong\mathcal{O}_V$, tenemos que $s|_V\in\mathcal{O}(V)$ función regular y luego X_s es un abierto afín que contiene x_0.
Consideramos $X=\bigcup_{i=1}^{p}X_{s_i}$ cubr. finito por dichos abiertos y, reemplazando s_i por una potencia si fuera necesario, podemos sup. que m es el mismo en cada X_{s_i}. Además notamos que las $s_1,\dots,s_p$ no poseen ceros comunes.
Sean f_{ij} los (finitos) generadores del k-álgebra $\mathcal{O}(X_{s_i})$. Luego, tal como en el Lema de Serre, $\exists r\in\mathbb{N}^{\geq 1}$ tq $s_i^r f_{ij}\in\Gamma(X,\mathcal{L}^{\otimes rm})\overset{\text{def}}{=}H^0(X,L^{\otimes rm})$. Las secciones s_i^r y $s_{ij}:=s_i^r f_{ij}$ de $L^{\otimes rm}$ no tienen ceros comunes y definen $\varphi: X\longrightarrow\mathbb{P}^N$ morfismo regular ✓
Sea $\mathcal{U}_i=\{x_i\neq 0\}\cong\mathbb{A}^N$ abierto estándar de $\mathbb{P}^N$ corresp. a la coordenada s_i^r de φ, entonces los $\mathcal{U}_1,\dots,\mathcal{U}_p$ cubren $\varphi(X)\subseteq\mathbb{P}^N$ y $\varphi^{-1}(\mathcal{U}_i)\overset{\text{def}}{=}X_{s_i}$. Además, $\varphi_i:=\varphi|_{X_{s_i}}:X_{s_i}\to\mathcal{U}_i$ corresponde (por construcción!) a $\varphi_i^*:\mathcal{O}(\mathcal{U}_i)\twoheadrightarrow\mathcal{O}(X_{s_i})$ sobreyectivo (ie, $\mathcal{O}(X_{s_i})\cong\mathcal{O}(\mathcal{U}_i)/I_i$)
$\Rightarrow \varphi_i$ induce un isomorfismo sobre su imagen $V(I_i)\subseteq\mathcal{U}_i\Rightarrow\varphi$ inmersión cerrada y luego $L^{\otimes rm}$ es un fibrado en rectas muy amplio ✓ ■

Del mismo modo, tenemos el siguiente criterio cohomológico de amplitud:

Teorema: Sea X variedad alg. proyectiva y sea $L \in \mathrm{Pic}(X)$ fibrado en rectas con haz de secciones $\mathcal{L}$. Entonces, son equivalentes:

① L es amplio.

② Para todo $\mathcal{F}$ haz coherente en X, tenemos $H^i(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m}) = 0$ para todo $m \gg 0$ y todo $i \geq 1$.

③ Para todo $\mathcal{F}$ haz coherente en X, tenemos $H^1(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m}) = 0$ para todo $m \gg 0$.

Dem: Sea $\mathcal{F}$ un haz coherente en X. Entonces ① $\Rightarrow$ ② $\Rightarrow$ ③ pues si L amplio entonces existe $r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tq $L^{\otimes r}$ es muy amplio. Por anulación de Serre, para todo $0 \leq s < r$ se tiene que:

$$H^i(X, (\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes s}) \otimes (\mathcal{L}^{\otimes r})^{\otimes m}) = 0 \quad \forall i \geq 1 \text{ y } \forall m \geq m_s.$$

Así, para $m \geq r \cdot \max\{m_0, \dots, m_{r-1}\}$ se tiene que $H^i(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m}) = 0$ $\forall i \geq 1$ ✓ Veamos que ③ $\Rightarrow$ ①:
Sea $x \in X$ fijo y denotemos por $k_x := i_x(k)$ al haz rascacielos (ver §3, p.10), el cual es coherente pues $0 \to \mathcal{I}_x \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{ev_x} k_x \to 0$ exacta. Consideremos $\mathcal{F} \xrightarrow{ev_x} \mathcal{F} \otimes k_x$ sobreyectivo con kernel $\mathcal{G} := \mathcal{F} \otimes \mathcal{I}_x$, ie, $0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{F} \xrightarrow{ev_x} \mathcal{F} \otimes k_x \to 0$ exacta. Por ③, existe $m_0 = m_0(\mathcal{F}, x)$ tal que $H^1(X, \mathcal{G} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m}) = 0$ $\forall m \geq m_0$ $\Rightarrow$ $\Gamma(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m}) \xrightarrow{ev_x} \Gamma(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m} \otimes k_x)$ sobreyectivo $\overset{\text{Nakayama}}{\Rightarrow}$ $\exists\, \mathcal{U} = \mathcal{U}_{\mathcal{F},x}$ vecindad abierta de $x \in X$ tq $(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m})|_{\mathcal{U}}$ globalmente generado. En part, existe $m_1 \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ y un abierto $\mathcal{U}_{\mathcal{O}_X, m_1}$ tq $\mathcal{L}^{\otimes m_1}$ glob. gen en $\mathcal{U}_{\mathcal{O}_X, m_1}$. Luego, $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m}$ glob. gen. en $\mathcal{U}_x := \mathcal{U}_{\mathcal{O}_X, m_1} \cap \mathcal{U}_{\mathcal{F}, m_0} \cap \mathcal{U}_{\mathcal{F}, m_0+1} \cap \dots \cap \mathcal{U}_{\mathcal{F}, m_0+m_1-1}$ para todo $m \geq m_0$, puesto que $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m}$ se escribe como $(\mathcal{L}^{\otimes m_1})^{\otimes r} \otimes (\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes (m_0+s)})$ para ciertos $r \geq 0$ y $0 \leq s < m_1$. Finalmente, cubrimos X con finitos $\mathcal{U}_x$ y consideramos el máximo m_0 $\Rightarrow$ $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m}$ glob. gen. $\forall m \geq m_0$ ie, $\mathcal{L}$ es amplio como $\mathcal{O}_X$-módulo $\Leftrightarrow$ L es amplio. ■

Aplicación a morfismos finitos:

Lema útil (fórmula de proyección): Sea $f : X \to Y$ morfismo regular, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo y $\mathcal{E}$ un haz localmente libre de rango r en Y. Entonces, $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_Y} f_*\mathcal{F} \cong f_*(f^*(\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F})$ en Y.

Dem: La afirmación es local en Y, por lo que podemos suponer $\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_Y^{\oplus r}$. Además, todos los términos conmutan con la suma directa y luego basta considerar $\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_Y$. Notar que $f^*\mathcal{O}_Y \cong \mathcal{O}_X$ ✓ ■

Teorema: Sea $f : X \to Y$ un morfismo finito entre variedades alg. proyectivas. Sea $\mathcal{F}$ un haz coherente en X y $L \in \mathrm{Pic}(Y)$ un fibrado en rectas en Y. Entonces:

① $H^i(X, \mathcal{F}) \cong H^i(Y, f_*\mathcal{F})$ para todo $i \geq 0$.

② Si L es amplio, entonces $f^*L \in \mathrm{Pic}(X)$ es amplio.

Dem: Sea $V \subseteq Y$ abierto afín. Como f es finito, $\mathcal{U} := f^{-1}(V)$ es afín en X (ver §15, p.50). Luego, si $\mathfrak{V}$ cubr. afín de Y entonces $\mathfrak{U} = f^{-1}(\mathfrak{V})$ cubr. afín de X y, por definición de $f_*\mathcal{F}$, se tiene $C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \cong C^\bullet(\mathfrak{V}, f_*\mathcal{F})$. Como $f_*\mathcal{F}$ es coherente en X (pues f finito !):

$$H^i(X, \mathcal{F}) \underset{\text{Leray}}{\cong} \check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \cong \check{H}^i(\mathfrak{V}, f_*\mathcal{F}) \underset{\text{Leray}}{\cong} H^i(Y, f_*\mathcal{F}) \text{ para todo } i \geq 0 \rightsquigarrow ① ✓$$

Por otro lado, si $\mathcal{L}$ es el haz de secciones de $L \in \mathrm{Pic}(Y)$, entonces la fórmula de proyección implica que $f_*(\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{L}^{\otimes m}) \cong f_*\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m} \overset{①}{\Rightarrow} H^1(X, \mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{L}^{\otimes m}) \cong \underbrace{H^1(Y, f_*\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m})}_{=0\ \forall m \geq m_0 \text{ pues } L \text{ amplio}}$

$\Rightarrow H^1(X, \mathcal{F} \otimes (f^*\mathcal{L})^{\otimes m}) = 0$ $\forall m \geq m_0$, ie, f^*L amplio ✓ ■

Ejemplo: La normalización $\nu : X^\nu \to X$ es un morfismo finito. Más aún, si X variedad proyectiva entonces X^ν también lo es (Ejercicio). Luego, si $L \in \mathrm{Pic}(X)$ amplio $\Rightarrow$ ν^*L amplio en X^ν.

Consecuencia importante (ver §23, p.84): Sea X var. alg proyectiva e irreducible, y $L \cong \mathcal{O}_X(D)$ fibrado en rectas amplio, entonces $D \cdot C > 0$ para toda $C \subseteq X$ curva irreducible, donde $D \cdot C \underset{\text{def}}{=} \deg(\nu^*(L|_C))$, con $\nu : C^\nu \to C$ normalización.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $\tilde{S} = \mathrm{Bl}_p(S) \xrightarrow{\varepsilon} S$ con S superficie proy. suave e irred, y sea $E = \varepsilon^{-1}(p) \cong \mathbb{P}^1$ divisor excepcional. Probar que $\mathcal{O}_{\tilde{S}}(E)$ no es amplio.

§30. Categorías abelianas y functores exactos

Para definir los grupos de cohomología usando functores derivados necesitamos las sgtes nociones:

Def: Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Decimos que $\mathcal{C}$ es una categoría aditiva si para todos $A, B \in Ob(\mathcal{C})$ se tiene que $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ es un grupo abeliano y se verifica:
① La composición $Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \times Hom_{\mathcal{C}}(B,C) \to Hom_{\mathcal{C}}(A,C)$, $(f,g) \mapsto g \circ f$ es bilineal.
② Existe $0 \in Ob(\mathcal{C})$ objeto tal que $Hom(0,0) = \{0\}$ es el grupo trivial con 1 elemento.
③ Para todos $A_1, A_2 \in Ob(\mathcal{C})$ existe (un único) $B \in Ob(\mathcal{C})$ junto con morfismos $j_i : A_i \to B$ (resp. $p_i : B \to A_i$) con $i = 1,2$ que hacen de B la suma directa (resp. producto) de A_1 y A_2.
Más aún, un functor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre categorías aditivas es un functor aditivo (covariante) si las aplicaciones inducidas $Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \longrightarrow Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B))$ son morfismos de grupos.

Para poder hablar de sucesiones exactas, se requiere la noción de kernel e imagen:

Def: Sea $\mathcal{C}$ una categoría aditiva. Decimos que $\mathcal{C}$ es una categoría abeliana si además cumple:
④ Todo morfismo $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ posee un kernel y un cokernel en $\mathcal{C}$, y la aplicación natural $Coim(f) \xrightarrow{\sim} Im(f)$ es un isomorfismo.

Obs: Aquí, $Im(f)$ es el kernel de la aplicación $B \to coker(f)$ y la Coimagen $Coim(f)$ es el cokernel de la aplicación $ker(f) \to A$. Así, ④ dice que para todo $f : A \to B$ se tiene

$$\begin{tikzcd} ker(f) \arrow[r, "i"] & A \arrow[rr, "f"] \arrow[d] & & B \arrow[r, "\pi"] & coker(f) \\ & coker(i) \arrow[rr, "\sim"] & & ker(\pi) \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

(ie, "$A/ker(f) \cong Im(f)$").

Importante: En una categoría abeliana $\mathcal{C}$, tiene sentido hablar de sucesión exacta. Concretamente, decimos que $A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3$ es exacta en $\mathcal{C}$ si $ker(f_2) = Im(f_1)$.

Ejemplos: ① Sea A un anillo conmutativo. La categoría A-Mod de A-módulos es abeliana, y la subcategoría de A-módulos finitamente generados es abeliana también.
② Sea X un espacio topológico. La categoría $Sh(X)$ de haces de grupos abelianos en X es abeliana.
③ Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado. La categoría $\mathcal{O}_X$-Mod de $\mathcal{O}_X$-módulos es abeliana.
④ Sea X una variedad algebraica. Las categorías $Coh(X)$ y $Qcoh(X)$ de haces coherentes y quasi-coherentes en X, resp., son categorías abelianas! Si $dim(X) \geq 1$, la categoría $Vect(X)$ de fibrados vectoriales en X no es abeliana!

Obs: Sea $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un functor aditivo entre categorías abelianas, y sea $A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3$ una sucesión en $\mathcal{C}$ tal que $f_2 \circ f_1 = 0$ (ie, $Im(f_1) \subseteq ker(f_2)$). Aplicando $\mathcal{F}$, obtenemos una sucesión $\mathcal{F}(A_1) \xrightarrow{\mathcal{F}(f_1)} \mathcal{F}(A_2) \xrightarrow{\mathcal{F}(f_2)} \mathcal{F}(A_3)$ en $\mathcal{D}$ que también cumple $\mathcal{F}(f_2) \circ \mathcal{F}(f_1) = \mathcal{F}(f_2 \circ f_1) = 0$.

Def: Sea $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un functor aditivo entre categorías abelianas. Decimos que $\mathcal{F}$ es exacto por la izquierda (resp. derecha) si toda sucesión exacta corta en $\mathcal{C}$

$$0 \to A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3 \to 0 \qquad (S)$$

es enviada por $\mathcal{F}$ a una sucesión en $\mathcal{D}$

$$0 \to \mathcal{F}(A_1) \xrightarrow{\mathcal{F}(f_1)} \mathcal{F}(A_2) \xrightarrow{\mathcal{F}(f_2)} \mathcal{F}(A_3) \to 0 \qquad \mathcal{F}(S)$$

que es exacta salvo quizás en $\mathcal{F}(A_3)$ (resp. en $\mathcal{F}(A_1)$), ie, quizás $\mathcal{F}(f_2)$ (resp. $\mathcal{F}(f_1)$) no es sobreyectivo (resp. no es inyectivo). Decimos que $\mathcal{F}$ es un functor exacto si es exacto por la izquierda y por la derecha (ie, (S) exacta implica $\mathcal{F}(S)$ exacta).

Ejemplos: ① Sea X variedad alg. afín con $A = \mathcal{O}(X)$. El functor $\Gamma : Coh(X) \to A$-Mod, $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$ es exacto (ver §28, pág 97).
② Sea A anillo conmutativo y $f \in A$. El functor de localización $(\cdot)_f : A$-Mod $\to A_f$-Mod, $M \mapsto M_f$ es exacto.

③ Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y $A_0 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ objeto fijo. Entonces, $\mathrm{Hom}(A_0,\cdot): \mathcal{C} \to \underline{\mathrm{Ab}}$ dado por $B \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A_0,B)$ es exacto <u>por la izquierda</u>. Algunos casos típicos son (notación):

a) $\mathcal{C} = A\text{-}\underline{\mathrm{Mod}} \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_A(M,N)$ es un A-módulo.

b) $\mathcal{C} = \mathcal{O}_X\text{-}\underline{\mathrm{Mod}} \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_X(\mathcal{F},\mathcal{G})$ es un A-módulo, donde $A = \mathcal{O}_X(X)$.

c) $\mathcal{C} = \mathcal{O}_X\text{-}\underline{\mathrm{Mod}}$ y consideramos $\mathcal{H}om(\mathcal{F},\cdot): \mathcal{O}_X\text{-}\underline{\mathrm{Mod}} \to \mathcal{O}_X\text{-}\underline{\mathrm{Mod}}$, $\mathcal{G} \mapsto \mathcal{H}om(\mathcal{F},\mathcal{G})$ donde el $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathcal{H}om(\mathcal{F},\mathcal{G})$ es el haz asociado al prehaz $\mathcal{U} \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\mathcal{F}|_{\mathcal{U}},\mathcal{G}|_{\mathcal{U}})$ (ver §4, pág 16).

④ Sea X espacio topológico. Entonces, $\Gamma: \underline{\mathrm{Sh}}(X) \to \underline{\mathrm{Ab}}$, $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X,\mathcal{F})$ es exacto <u>por la izquierda</u>.

⑤ $\boxed{\text{Ejercicio importante}}$ Sea $f: X \to Y$ morfismo regular entre variedades algebraicas. Probar que el functor $f_*: \underline{\mathrm{Qcoh}}(X) \to \underline{\mathrm{Qcoh}}(Y)$, $\mathcal{F} \mapsto f_*\mathcal{F}$ es exacto <u>por la izquierda</u>.

<u>Cultura general</u>: Dado $f: X \to Y$ como en ⑤, entonces $f^*: \underline{\mathrm{Qcoh}}(Y) \to \underline{\mathrm{Qcoh}}(X)$, $\mathcal{G} \mapsto f^*\mathcal{G}$ (ver §4, p.17) es exacto <u>por la derecha</u>. Cuando f^* también es exacto por la izquierda (y luego f^* exacto) se dice que f es un <u>morfismo plano</u> (flat): es una noción muy importante en Teoría de Deformación!

<u>Def</u>: Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana. Un <u>complejo</u> (<u>de cocadenas</u>) en $\mathcal{C}$ es $K^\bullet = (K^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que:

① $K^n \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.

② $d^n: K^n \to K^{n+1}$ es un morfismo para cada $n \in \mathbb{Z}$ (ie, $d^n \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(K^n, K^{n+1})$), llamado <u>diferencial</u> (o <u>coborde</u>) y verifica $d^{n+1} \circ d^n = 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}$.

<u>Gráficamente</u>: $K^\bullet: \cdots \to K^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} K^0 \xrightarrow{d^0} K^1 \xrightarrow{d^1} K^2 \xrightarrow{d^2} K^3 \xrightarrow{d^3} \cdots$

Para cada $i \in \mathbb{Z}$, el objeto

$$H^i(K^\bullet) := \ker(d^i)/\mathrm{Im}(d^{i-1}) \underset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{coker}\left(\mathrm{Im}(d^{i-1}) \to \ker(d^i)\right) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$$

es llamado la <u>i-ésima cohomología</u> del complejo $K^\bullet$.

<u>Notación</u>: Dado $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ functor aditivo entre categorías abelianas y dado $K^\bullet = (K^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ complejo en $\mathcal{C}$, denotamos por $F(K^\bullet)$ al complejo en $\mathcal{D}$ dado por los $F(K^n) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ y con diferenciales $F(d^n): F(K^n) \to F(K^{n+1})$. Por abuso de notación, escribimos $d^n = F(d^n)$.

<u>Lema</u>: Sea $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un functor <u>exacto</u> entre categorías abelianas. Entonces, para todo complejo $K^\bullet$ en $\mathcal{C}$ hay un isomorfismo $H^i(F(K^\bullet)) \xrightarrow{\sim} F(H^i(K^\bullet))$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

<u>Dem</u>: Dado $K^\bullet = (K^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ complejo en $\mathcal{C}$, definimos $Z^i := \ker(d^i)$ y $B^i := \mathrm{Im}(d^{i-1})$ para $i \in \mathbb{Z}$, y así $H^i(K^\bullet) \overset{\mathrm{def}}{=} Z^i/B^i$. Por functorialidad, $F(Z^i) = \ker(F(d^i))$ y $F(B^i) = \mathrm{Im}(F(d^{i-1}))$. Así, aplicando F a la sucesión exacta corta en $\mathcal{C}$: $0 \to B^i \to Z^i \to H^i(K^\bullet) \to 0$ obtenemos la sucesión exacta (pues F exacto!) $0 \to F(B^i) \to F(Z^i) \to F(H^i(K^\bullet)) \to 0$ en $\mathcal{D}$.
$\Rightarrow F(H^i(K^\bullet)) \cong F(Z^i)/F(B^i) = \ker(F(d^i))/\mathrm{Im}(F(d^{i-1})) \overset{\mathrm{def}}{=} H^i(F(K^\bullet))$ ✓ ∎

<u>Def</u>: Sean $K^\bullet = (K^n, d^n_K)_{n\in\mathbb{Z}}$ y $L^\bullet = (L^n, d^n_L)_{n\in\mathbb{Z}}$ complejos en una categoría abeliana $\mathcal{C}$. Un <u>morfismo de complejos</u> $\varphi: K^\bullet \to L^\bullet$ es una familia de morfismos $\{\varphi^n: K^n \to L^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ que son compatibles con los diferenciales: $\varphi^{n+1} \circ d^n_K = d^n_L \circ \varphi^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Equivalentemente, el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
K^\bullet & : \cdots \to & K^{n-1} & \xrightarrow{d_K^{n-1}} & K^n & \xrightarrow{d_K^n} & K^{n+1} & \xrightarrow{d_K^{n+1}} & \cdots \\
\downarrow \varphi & & \downarrow \varphi^{n-1} & & \downarrow \varphi^n & & \downarrow \varphi^{n+1} & & \\
L^\bullet & : \cdots \to & L^{n-1} & \xrightarrow{d_L^{n-1}} & L^n & \xrightarrow{d_L^n} & L^{n+1} & \xrightarrow{d_L^{n+1}} & \cdots
\end{array}$$

es conmutativo. Denotamos por $\mathrm{Kom}(\mathcal{C})$ la categoría cuyos objetos son complejos $K^\bullet$ en $\mathcal{C}$ y sus morfismos son morfismos de complejos, es llamada <u>la categoría de complejos de $\mathcal{C}$</u>.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que $\mathrm{Kom}(\mathcal{C})$ es una categoría abeliana.

<u>Indicación</u>: $0 \in \mathrm{Kom}(\mathcal{C})$ es $0^\bullet: \cdots \to 0 \to 0 \to 0 \to \cdots$, el kernel de $\varphi: K^\bullet \to L^\bullet$ es el complejo formado por los kernels $\ker(\varphi^i)$ para $i \in \mathbb{Z}$, etc.

§31. Resoluciones inyectivas y quasi-isomorfismos

Durante esta sección, denotamos por $\mathcal{C}$ una categoría abeliana. La siguiente noción será fundamental en lo que sigue (cf. Teorema de Extensión de Hahn-Banach):

Def: Decimos que un objeto $I \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ es inyectivo si para toda sucesión exacta en $\mathcal{C}$ de la forma $0 \to A \xhookrightarrow{\varphi} B$ (i.e., "φ inyectivo") y todo morfismo $f: A \to I$, existe un morfismo (no nec. único) $g: B \to I$ tal que $g \circ \varphi = f$. Equivalentemente, el functor (contravariante!)
$$\mathrm{Hom}(\cdot, I): \mathcal{C} \to \underline{\mathrm{Ab}}$$
$$A \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, I)$$
es exacto.

$$\text{"}\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[d, dotted, "\exists g"] \\ & I \end{tikzcd}\text{"}$$

Nuestras categorías favoritas serán las siguientes:

Def: Una categoría abeliana $\mathcal{C}$ tiene suficientes inyectivos si todo objeto $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ se incrusta en un objeto inyectivo, i.e., existe $I = I(A) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ inyectivo y $A \hookrightarrow I$ morfismo de kernel nulo.

Terminología (Teoría de Grupos): Un grupo abeliano G es divisible si $\forall m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ el morfismo $G \overset{\cdot m}{\twoheadrightarrow} G$, $x \mapsto mx$ es sobreyectivo. Por ejemplo, $(\mathbb{Q}, +)$ y $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$ son divisibles.

Lema: En la categoría $\underline{\mathrm{Ab}}$ de grupos abelianos, todo grupo divisible G es inyectivo.

Dem: Sea $A \xhookrightarrow{\varphi} B$ subgrupo y $f: A \to B$ morfismo, con A, B grupos abelianos. Por el Lema de Zorn, $\exists B' \subseteq B$ subgrupo maximal tq $A \subseteq B'$ y tq $\exists g: B' \to G$ con $g \circ \varphi = f$. Veamos que $B' = B$: En caso contrario, $\exists b \in B$ tq $b \notin B'$, y consideramos la inclusión $B' \cap \langle b \rangle \hookrightarrow \langle b \rangle = \mathbb{Z}b$: si $B' \cap \langle b \rangle = 0$ podemos extender g al subgrupo $\langle B', b \rangle = B' \oplus \mathbb{Z}b$ por $\tilde{g}(b' + mb) := g(b')$, mientras que si $B' \cap \langle b \rangle \neq 0$ entonces $\exists m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tq $mb \in B'$ y (como G divisible!) $g(mb) = my$ para algún $y \in G$, y extendemos g a $\langle B', b \rangle$ por $\tilde{g}(b' + mb) := g(b') + my$ ✓ Contradicción! (B maximal). ∎

Prop: La categoría $\underline{\mathrm{Ab}}$ de grupos abelianos tiene suficientes inyectivos.

Dem: Veamos que todo grupo abeliano G se incrusta en un grupo divisible: Sea $\check{G} := \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. El emparejamiento natural $\check{G} \times G \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ induce un morfismo $G \hookrightarrow \check{\check{G}}$, $a \mapsto ev_a$ que es inyectivo: si $a \neq 0$ existe $f: \langle a \rangle = \mathbb{Z}a \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tq $f(a) \neq 0$ (eg. $f(a) = [\frac{1}{2}]$) y como $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es inyectivo en $\underline{\mathrm{Ab}}$ (pues es divisible), $\exists g: G \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tq $g(a) \neq 0$, i.e., $ev_a \neq 0$ ✓
Si $G \cong \mathbb{Z}^{(I)}$ es un grupo abeliano libre, con I un conjunto, entonces $\check{G}$ es isomorfo a un producto de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ y luego es divisible ✓ En general, $\check{G}$ es cociente de un grupo libre L (eg. $L = \mathbb{Z}^{(\check{G})}$) y luego $L \twoheadrightarrow \check{G} \to 0$ induce $0 \to \check{\check{G}} \hookrightarrow \check{L}$, y luego $G \hookrightarrow \check{L} \leftarrow$ divisible ✓ ∎

$\boxed{\text{Ejercicio importante}}$ Sea A un anillo conmutativo con unidad, y sea M un A-módulo. Definimos $\check{M} := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, que es un A-módulo vía: $(a \cdot f)(x) := f(ax)$ para $f \in \check{M}$, $x \in M$ y $a \in A$. Además, tal como antes, $M \hookrightarrow \check{\check{M}}$ es inyectivo.

① Probar que $\check{M} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(M, \check{A})$, $f \mapsto \tilde{f}$ con $\tilde{f}(x)(a) := f(ax)$ es un isomorfismo de A-módulos con inversa $\tilde{g} \mapsto g$, con $g(x) := \tilde{g}(x)(1)$.

② Deducir que $\check{A}$ es un A-módulo inyectivo (i.e., objeto inyectivo en A-$\underline{\mathrm{Mod}}$).

[Indicación: Dadas $M \xhookrightarrow{\varphi} N$ y $\tilde{f}: M \to \check{A}$, considerar $f: M \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ que se extiende a $g: N \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ y que define $\tilde{g}: N \to \check{A}$ que extiende a $\tilde{f}$.]

③ Deducir, tal como se hizo para $\underline{\mathrm{Ab}}$, que la categoría A-$\underline{\mathrm{Mod}}$ tiene suficientes inyectivos!

Teorema: Sea X un espacio topológico (resp. una variedad algebraica). Entonces, la categoría $\underline{\mathrm{Sh}}(X)$ de haces de grupos abelianos en X (resp. la categoría $\mathcal{O}_X$-$\underline{\mathrm{Mod}}$ de $\mathcal{O}_X$-módulos) tiene suficientes inyectivos.

Dem: Sea $\mathcal{F}$ haz de grupos abelianos en X y para cada $x \in X$, consideramos $\mathcal{F}_x \hookrightarrow I(\mathcal{F}_x)$ el grupo abeliano (como antes) inyectivo donde se incrusta el tallo $\mathcal{F}_x$. Sea $I(\mathcal{F}) \in \underline{\mathrm{Sh}}(X)$ el

haz definido por $I(\mathcal{F})(U) := \prod_{x\in U} I(\mathcal{F}_x)$ $\forall U \subseteq X$ abierto. Así, tenemos $\mathcal{F} \hookrightarrow I(\mathcal{F})$ morfismo inyectivo. Más aún, dado que los morfismos de haces están determinados por los tallos, tenemos que para todo $\mathcal{G} \in \underline{Sh}(X)$ la identidad $\mathrm{Hom}(\mathcal{G}, I(\mathcal{F})) = \prod_{x\in X} \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_x, I(\mathcal{F}_x))$ en $\underline{Ab}$.
$\Rightarrow I(\mathcal{F})$ es un objeto inyectivo de $\underline{Sh}(X)$ ✓ La prueba para $\mathcal{O}_X$-módulos es idéntica ■

Recordemos (ver §28, p.96) que si X variedad afín con $A = \mathcal{O}(X)$, entonces la categoría abeliana $\underline{Coh}(X)$ puede verse como una subcategoría de A-$\underline{Mod}$ (vía $\mathcal{F} \mapsto H^0(X,\mathcal{F})$), y en A-$\underline{Mod}$ los cálculos son más simples (cf. §28, p.97). Más generalmente:

<u>Hecho importante</u> (Teorema de Freyd-Mitchell, 1964): <u>Toda</u> categoría abeliana $\mathcal{C}$ puede ser vista como una subcategoría de R-$\underline{Mod}$ para cierto anillo R (no nec. conmutativo).

<u>Consecuencia</u>: Los cálculos en $\mathcal{C}$ que involucran kernels, imágenes y cokernels pueden hacerse en R-$\underline{Mod}$ haciendo "cacería de diagramas". Notablemente:

① Un morfismo $\varphi: K^\bullet \to L^\bullet$ de complejos en $\mathcal{C}$, dado por $\{\varphi^i : K^i \to L^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ tales que $\varphi^{i+1}\circ d_K^i = d_L^i \circ \varphi^i$ $\forall i \in \mathbb{Z}$, induce $H^i(\varphi): H^i(K^\bullet) \to H^i(L^\bullet)$ en cohomología $\forall i\in\mathbb{Z}$.
En efecto, recordando que $H^i(K^\bullet) \underset{\mathrm{def}}{:=} \ker(d_K^i)/\mathrm{Im}(d_K^{i-1})$, para $x \in \ker(d_K^i)$ (!) tenemos que $0 = (\varphi^{i+1}\circ d_K^i)(x) = d_L^i(\varphi^i(x))$, i.e., $\varphi^i(x) \in \ker(d_L^i)$. Además, la relación $\varphi^i \circ d_K^{i-1} = d_L^{i-1}\circ\varphi^{i-1}$ implica que si $x' \in \ker(d_K^i)$ con $x' = x + d_K^{i-1}(y) \Rightarrow \varphi^i(x') = \varphi^i(x) + d_L^{i-1}(\varphi^{i-1}(y))$ y luego $[\varphi(x)] = [\varphi(x')]$ en $H^i(L^\bullet) \underset{\mathrm{def}}{=} \ker(d_L^i)/\mathrm{Im}(d_L^{i-1})$ ✓

② Más aún, el <u>lema de la serpiente</u> (en R-$\underline{Mod}$!) implica (de hecho, equivale a) que si
$$0 \to K^\bullet \xrightarrow{\varphi} L^\bullet \xrightarrow{\psi} M^\bullet \to 0$$
es una sucesión exacta de complejos en $\mathcal{C}$ (i.e, $0 \to K^i \xrightarrow{\varphi^i} L^i \xrightarrow{\psi^i} M^i \to 0$ es exacta en $\mathcal{C}$ para todo $i\in\mathbb{Z}$), entonces hay una sucesión <u>exacta</u> larga en cohomología
$$\cdots \to H^{i-1}(M^\bullet) \xrightarrow{\delta^{i-1}} H^i(K^\bullet) \xrightarrow{H^i(\varphi)} H^i(L^\bullet) \xrightarrow{H^i(\psi)} H^i(M^\bullet) \xrightarrow{\delta^i} H^{i+1}(K^\bullet) \xrightarrow{H^{i+1}(\varphi)} H^{i+1}(L^\bullet) \to \cdots$$
donde $\delta^i: H^i(M^\bullet) \to H^{i+1}(K^\bullet)$ es llamado el (i-ésimo) <u>morfismo de conexión</u>.

<u>Def</u>: Sea $\varepsilon: K^\bullet \to L^\bullet$ un morfismo de complejos en $\mathcal{C}$. Decimos que ε es un <u>quasi-isomorfismo</u> (qis) si $H^i(\varepsilon): H^i(K^\bullet) \xrightarrow{\sim} H^i(L^\bullet)$ es un isomorfismo $\forall i\in\mathbb{Z}$, y decimos que $(\varepsilon, L^\bullet)$ es una <u>resolución</u> de $K^\bullet$.

Para relacionar lo anterior al concepto de objetos inyectivos, necesitamos el siguiente concepto (que proviene de la topología algebraica):

<u>Def</u>: Sean $f: K^\bullet \to L^\bullet$ y $g: K^\bullet \to L^\bullet$ dos morfismos de complejos en $\mathcal{C}$. Decimos que f y g son <u>homotópicamente equivalentes</u> (y escribimos $f \sim g$) si existe $h = \{h^i : K^i \to L^{i-1}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ familia de morfismos tales que $f^i - g^i = d_L^{i-1}\circ h^i + h^{i+1}\circ d_K^i$ $\forall i\in\mathbb{Z}$. Gráficamente, h está dada por
$$\begin{tikzcd} & K^i \arrow[r, "d_K^i"] \arrow[dl, "h^i"'] & K^{i+1} \arrow[dl, "h^{i+1}"] \\ L^{i-1} \arrow[r, "d_L^{i-1}"] & L^i & \end{tikzcd}$$
La familia $h = \{h^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ es llamada una <u>homotopía</u> entre f y g.

<u>Lema</u>: Sean $f, g: K^\bullet \to L^\bullet$ morfismos de complejos en $\mathcal{C}$. Si $f \sim g$, entonces f y g inducen el mismo morfismo en cohomología, i.e, $H^i(f) = H^i(g)$ $\forall i\in\mathbb{Z}$.

<u>Dem</u>: Sea $x\in\ker(d_K^i)$, entonces $f^i(x) - g^i(x) = d_L^{i-1}(h^i(x)) + h^{i+1}(\cancel{d_K^i(x)}) = d_L^{i-1}(h^i(x))$ y luego $[f^i(x)] = [g^i(x)]$ en $H^i(L^\bullet) \underset{\mathrm{def}}{=} \ker(d_L^i)/\mathrm{Im}(d_L^{i-1})$ ✓ ■

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que si $f: K^\bullet \to L^\bullet$ y $g: L^\bullet \to K^\bullet$ son morfismos de complejos en $\mathcal{C}$ tales que $f\circ g \sim \mathrm{Id}_{L^\bullet}$ y $g \circ f \sim \mathrm{Id}_{K^\bullet}$, entonces f y g son quasi-isomorfismos y $H^i(f)^{-1} = H^i(g)$ $\forall i\in\mathbb{Z}$.

<u>Terminología</u>: Notar que si $f: K^\bullet \to L^\bullet$ cumple $f \sim 0$, entonces $H^i(f) = 0$ $\forall i\in\mathbb{Z}$. Para el recíproco necesitamos hipótesis adicionales: Decimos que un complejo $K^\bullet$ en $\mathcal{C}$ es:
① <u>Exacto</u> si $H^i(K^\bullet) = 0$ $\forall i\in\mathbb{Z}$, i.e, $\mathrm{Im}(d^{i-1}) = \ker(d^i)$ $\forall i\in\mathbb{Z}$.
② <u>Positivo</u> si $K^i = 0$ para todo $i < 0$.

Prop: Sea $f: K^\bullet \to L^\bullet$ un morfismo de complejos positivos en $\mathcal{C}$, y supongamos que:

① Todo objeto L^i es inyectivo en $\mathcal{C}$, y que

② El complejo $K^\bullet$ es exacto (y en particular $H^i(f)=0 \ \forall i\in\mathbb{Z}$).

Entonces, $f\sim 0$.

Dem: Construimos h^i por inducción en $i\in\mathbb{N}$ (OK si $i<0$): Sup. que $h^i: K^i\to L^{i-1}$ está construido y verifica la fórmula de homotopía $f^j - 0 = f^j = d_L^{j-1}\circ h^j + h^{j+1}\circ d_K^j \ \forall j\le i-1$ (⊛). Definimos $g^i := f^i - d_L^{i-1}\circ h^i$ (que a posteriori verificará $g^i = h^{i+1}\circ d_K^i$ por (⊛)). Los diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} K^{i-1} \arrow[r, "d_K^{i-1}"] & K^i \arrow[r, "d_K^i"] \arrow[dl, "h^i"'] \arrow[d, "g^i"] & K^{i+1} \arrow[dl, dashed, "\exists ?\, h^{i+1}"] \\ L^{i-1} \arrow[r, "d_L^{i-1}"] & L^i & \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} K^{i-1} \arrow[r, "d_K^{i-1}"] \arrow[d, "f^{i-1}"'] & K^i \arrow[d, "f^i"] \\ L^{i-1} \arrow[r, "d_L^{i-1}"] & L^i \end{tikzcd}$$

implican que $g^i\circ d_K^{i-1} = f^i\circ d_K^{i-1} - d_L^{i-1}\circ(h^i\circ d_K^{i-1}) \overset{(⊛)\, j=i-1}{=} \underbrace{f^i\circ d_K^{i-1} - d_L^{i-1}\circ f^{i-1}}_{=0} + \underbrace{d_L^{i-1}\circ d_L^{i-2}}_{=0}\circ h^{i-1} = 0$, i.e., $g^i=0$ en $\mathrm{Im}(d_K^{i-1}) = \ker(d_K^i)$ ✓

La prop. universal del cociente implica que g^i se factoriza en $g^i: K^i/\ker(d_K^i)\cong \mathrm{Im}(d_K^i)\to L^i$. Dado que L^i inyectivo y $\mathrm{Im}(d_K^i)=\ker(d_K^{i+1})\hookrightarrow K^{i+1}$, existe $h^{i+1}: K^{i+1}\to L^i$ que cumple (⊛). ■

Definición/construcción importante: Sea A un objeto de $\mathcal{C}$, definimos el complejo $\underline{A}^\bullet$ (o también A) por $\underline{A}^i = 0$ si $i\neq 0$ y $\underline{A}^0 := A$, i.e., $\underline{A}^\bullet: \cdots 0 \xrightarrow{0} 0\xrightarrow{0} A\xrightarrow{0} 0\xrightarrow{0} 0\to\cdots$.

Una resolución de A es una resolución de $\underline{A}^\bullet$ por un complejo positivo, i.e., un morfismo $\varepsilon: \underline{A}^\bullet\to R^\bullet$ de complejos positivos que es un quasi-isomorfismo. Concretamente, un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \underline{A}^\bullet \arrow[d, "\varepsilon"'] & : & A \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon^0"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ R^\bullet & : & R^0 \arrow[r, "d^0"] & R^1 \arrow[r, "d^1"] & R^2 \arrow[r, "d^2"] & R^3 \arrow[r, "d^3"] & \cdots \end{tikzcd}$$

con $H^i(\varepsilon): H^i(\underline{A}^\bullet)\xrightarrow{\sim} H^i(R^\bullet)$ isomorfismo para todo $i\geq 0$.

Así, dado que $H^0(\underline{A}^\bullet)=A$ y $H^i(\underline{A}^\bullet)=0$ para $i>0$, se tiene que $H^i(R^\bullet)=0 \ \forall i>0$ y que el morfismo de aumentación $\varepsilon^0: A\to R^0$ identifica A con el kernel de $d^0: R^0\to R^1$. En particular, $0\to A\xrightarrow{\varepsilon^0} R^0\xrightarrow{d^0} R^1\xrightarrow{d^1} R^2\xrightarrow{d^2} R^3\xrightarrow{d^3}\cdots$ es un complejo exacto (❢), que contiene la misma información que $\varepsilon: \underline{A}^\bullet\to R^\bullet$. Finalmente, si todos los objetos de $R^\bullet$ son inyectivos, decimos que $\varepsilon: A\to R^\bullet$ es una resolución inyectiva de A.

Teorema: Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana con suficientes inyectivos. Entonces:

① Todo objeto A admite una resolución inyectiva $\varepsilon: A\to I^\bullet$.

② Sea $f: A\to I^\bullet$ un morfismo (arbitrario) de complejos positivos, donde todos los objetos de $I^\bullet$ son inyectivos. Entonces, para toda resolución $\varepsilon: A\to R^\bullet$ (no nec. inyectiva), existe un morfismo de complejos $g: R^\bullet\to I^\bullet$ tal que
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, "f"'] & R^\bullet \arrow[d, "g"] \\ & I^\bullet \end{tikzcd}$$
es conmutativo. Además, si $g': R^\bullet\to I^\bullet$ es otro morfismo tal que $f=g'\circ\varepsilon$, entonces $g\sim g'$ (i.e., g es único módulo homotopía).

Dem: ① Como $\mathcal{C}$ tiene suficientes inyectivos, podemos incrustar $A\overset{\varepsilon^0}{\hookrightarrow} I^0$ con I^0 objeto inyectivo. Sea $A_1 := I^0/A$ en $\mathcal{C}$ y lo incrustamos $A_1\overset{\delta^1}{\hookrightarrow} I^1$ con I^1 objeto inyectivo, y con $\ker(\delta^1)=0$ en I^0/A, i.e., la composición $\varepsilon_1: I^0\xrightarrow{\pi} I^0/A\xrightarrow{\delta^1} I^1$ tiene $\ker(\varepsilon^1) = A = \mathrm{Im}(\varepsilon^0)$. Inductivamente obtenemos $\varepsilon: A\to I^\bullet$ ✓

② Construimos g^i por inducción en $i\in\mathbb{N}$: Como ε resolución, $A\overset{\varepsilon^0}{\hookrightarrow}R^0$ es un morfismo inyectivo. Dado que I^0 es un objeto inyectivo, $f^0: A\to I^0$ se extiende a $g^0: R^0\to I^0$ ✓ Sup. g^i construido, el diagrama

$$\begin{tikzcd} R^{i-1} \arrow[r, "d_R^{i-1}"] & R^i \arrow[r, "d_R^i"] \arrow[d, "g^i"'] & R^{i+1} \arrow[d, dashed, "\exists ?\, g^{i+1}"] \\ & I^i \arrow[r, "d_I^i"] & I^{i+1} \end{tikzcd}$$

implica (como antes) que $d_I^i\circ g^i: R^i\to I^{i+1}$ se anula en $\mathrm{Im}(d_R^{i-1})=\ker(d_R^i)$ (pues el complejo $0\to A\overset{\varepsilon^0}{\hookrightarrow}R^\bullet$ es exacto), y luego se puede ver como $d_I^i\circ g^i: R^i/\ker(d_R^i)\cong\mathrm{Im}(d_R^i)\to I^{i+1}$. Como I^{i+1} objeto inyectivo, $d_I^i\circ g^i$ se extiende a $g^{i+1}: R^{i+1}\to I^{i+1}$ ✓ Finalmente, dados otro $g': R^\bullet\to I^\bullet$ consideramos el complejo $K^\bullet := R^\bullet/A$ dado por $K^i := R^i$ si $i>0$ y $K^0 := R^0/A$. Entonces, $g-g'$ se factoriza en un morfismo de complejos $G: K^\bullet\to I^\bullet$, con $K^\bullet$ exacto $\underset{\text{Prop anterior}}{\Longrightarrow} G\sim 0$, i.e., $g\sim g'$. ■

§32. Functores derivados

Comencemos por la siguiente construcción:

Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías abelianas, donde $\mathcal{C}$ posee suficientes inyectivos (!). Consideremos un functor covariante aditivo $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y construyamos functores $R^i\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ $\forall i \geq 0$ como sigue:

Para cada objeto A en $\mathcal{C}$, escogemos $A \to I_A^\bullet$ una resolución inyectiva y definimos

$$R^i\mathcal{F}(A) := H^i(\mathcal{F}(I_A^\bullet)) \text{ en } \mathcal{D}. \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Más aún, si $f : A \to B$ es un morfismo en $\mathcal{C}$ entonces (ver §31, p. 107), podemos extender f a un morfismo de complejos $g : I_A^\bullet \to I_B^\bullet$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & I_A^\bullet \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ B & \longrightarrow & I_B^\bullet \end{array} \quad \text{es conmutativo.}$$

Más aún, g es único módulo homotopía, y luego el morfismo $H^i(\mathcal{F}(g)) : H^i(\mathcal{F}(I_A^\bullet)) \to H^i(\mathcal{F}(I_B^\bullet))$ es independiente de la elección de g y será denotado

$$(R^i\mathcal{F})(f) : R^i\mathcal{F}(A) \to R^i\mathcal{F}(B).$$

Def: Dado un functor (covariante) aditivo $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre categorías abelianas, donde $\mathcal{C}$ posee suficientes inyectivos, el functor $R^i\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $A \mapsto R^i\mathcal{F}(A)$ es llamado el *i-ésimo functor derivado* (derecho) de $\mathcal{F}$.

Lema útil: Sea $\varepsilon : A \to I^\bullet$ una resolución inyectiva de A, entonces el morfismo canónico $H^i(\mathcal{F}(I^\bullet)) \xrightarrow{\sim} R^i\mathcal{F}(A)$ es un isomorfismo (ie, la construcción de $R^i\mathcal{F}(A)$ es indep. de elecciones).

Dem: Considerando $Id_A : A \to A$, las resoluciones $A \to I^\bullet$ y $A \to I_A^\bullet$ inducen un único (módulo homotopía) $g : I^\bullet \to I_A^\bullet$. Invirtiendo el rol de $I^\bullet$ con $I_A^\bullet$ obtenemos $h : I_A^\bullet \to I^\bullet$ único (módulo homotopía) y donde $g \circ h \sim Id_{I_A^\bullet}$ y $h \circ g \sim Id_{I^\bullet}$, por lo que g y h son quasi-isom (ver §31, p.106). Dado que la imagen por $\mathcal{F}$ de una homotopía es una homotopía de morfismos de complejos en $\mathcal{D}$, tenemos que $\mathcal{F}(g) : \mathcal{F}(I^\bullet) \to \mathcal{F}(I_A^\bullet)$ también es invertible módulo homotopía y luego un quasi-isom, ie, $H^i(\mathcal{F}(I^\bullet)) \xrightarrow{\sim} H^i(\mathcal{F}(I_A^\bullet)) \underset{\text{def}}{=} R^i\mathcal{F}(A)$ isomorfismo $\forall i \geq 0$. ■

Importante: El complejo (exacto) $0 \to A \xrightarrow{\varepsilon^0} I_A^0 \xrightarrow{d^0} I_A^1 \xrightarrow{d^1} I_A^2 \to \ldots$ en $\mathcal{C}$ induce un complejo $\mathcal{F}(A) \xrightarrow{\mathcal{F}(\varepsilon^0)} \mathcal{F}(I_A^0) \xrightarrow{\mathcal{F}(d^0)} \mathcal{F}(I_A^1) \to \ldots$ en $\mathcal{D}$. Dado que $d^0 \circ \varepsilon^0 = 0$, tenemos $\mathcal{F}(d^0) \circ \mathcal{F}(\varepsilon^0) = 0$ y luego $\mathcal{F}(\varepsilon^0) : \mathcal{F}(A) \to \mathcal{F}(I_A^0)$ se factoriza por $\mathcal{F}(A) \to \ker(\mathcal{F}(d^0)) \underset{\text{def}}{=} H^0(\mathcal{F}(I_A^\bullet)) \underset{\text{def}}{=} (R^0\mathcal{F})(A)$ de manera functorial (ie, existe una transformación natural $\mathcal{F} \to R^0\mathcal{F}$) !

Teorema: Sea $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un functor (covariante) aditivo entre categorías abelianas, donde $\mathcal{C}$ tiene suficientes inyectivos. Entonces:

① Si $\mathcal{F}$ es exacto por la izquierda, la transformación natural $\mathcal{F} \to R^0\mathcal{F}$ es un isomorfismo.

② Toda sucesión exacta $0 \to A \to B \to C \to 0$ en $\mathcal{C}$, tiene asociada una sucesión exacta (larga) $\ldots \to R^i\mathcal{F}(A) \to R^i\mathcal{F}(B) \to R^i\mathcal{F}(C) \xrightarrow{\delta^i} R^{i+1}\mathcal{F}(A) \to \ldots$ en $\mathcal{D}$ de manera functorial, ie, dado un morfismo de sucesiones exactas (cortas) en $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \to & B & \to & C & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & A' & \to & B' & \to & C' & \to & 0 \end{array}$$

el diagrama

$$\begin{array}{ccc} R^i\mathcal{F}(C) & \xrightarrow{\delta^i} & R^{i+1}\mathcal{F}(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R^i\mathcal{F}(C') & \xrightarrow{\delta^i} & R^{i+1}\mathcal{F}(A') \end{array} \quad \text{es conmutativo.}$$

③ Para todo objeto inyectivo I en $\mathcal{C}$, se tiene $R^i\mathcal{F}(I) = 0$ para todo $i > 0$.

Dem: ① Sea A objeto en $\mathcal{C}$ y $\varepsilon : A \to I^\bullet$ una resolución inyectiva. La sucesión exacta en $\mathcal{C}$ $0 \to A \xrightarrow{\varepsilon^0} I^0 \xrightarrow{d^0} I^1$ es enviada por $\mathcal{F}$ en la sucesión exacta (!) $0 \to \mathcal{F}(A) \to \mathcal{F}(I^0) \to \mathcal{F}(I^1)$, y luego $\mathcal{F}(A) \cong \ker(\mathcal{F}(d^0)) = (R^0\mathcal{F})(A)$ ✓ Para probar ②:

Sea $0 \to A \overset{f}{\hookrightarrow} B \overset{g}{\twoheadrightarrow} C \to 0$ sucesión exacta en $\mathcal{C}$, y sean $A \xrightarrow{\varepsilon_A} I_A^\bullet$, $B \xrightarrow{\varepsilon_B} I_B^\bullet$ y $C \xrightarrow{\varepsilon_C} I_C^\bullet$ resoluciones inyectivas fijas. A priori, no contamos con $0 \to I_A^\bullet \to I_B^\bullet \to I_C^\bullet \to 0$ sucesión exacta! Veamos que $B \to I^\bullet$ con $I^i := I_A^i \oplus I_C^i$ también es una resolución inyectiva de B (y donde construiremos $d^i : I^i \to I^{i+1}$ por inducción en $i \in \mathbb{N}$): El morfismo de aumentación $\varepsilon_A^0 : A \hookrightarrow I_A^0$ se extiende a $\eta : B \to I_A^0$ pues $A \overset{f}{\hookrightarrow} B$ y I_A^0 objeto inyectivo. Así, usando $\varepsilon_C^0 : C \hookrightarrow I_C^0$, construimos $\varepsilon^0 := (\eta, \varepsilon_C^0 \circ g) : B \to I^0 \overset{\text{def}}{=} I_A^0 \oplus I_C$ que hace el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & I_A^0 & \overset{i}{\hookrightarrow} & I^0 & \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} & I_C^0 & \to & 0 \\ & & \varepsilon_A^0 \uparrow & & \uparrow \varepsilon^0 & & \uparrow \varepsilon_C^0 & & \\ 0 & \to & A & \overset{f}{\hookrightarrow} & B & \overset{g}{\twoheadrightarrow} & C & \to & 0 \end{array} \quad \text{conmutativo.}$$

Luego, el lema de la serpiente implica que $\varepsilon^0 : B \hookrightarrow I^0$ es inyectivo y que la sucesión de cokernels $I_A^1 = \operatorname{coker}(\varepsilon_A^0) \to I^1 \cong \operatorname{coker}(\varepsilon^0) \to I_C^1 = \operatorname{coker}(\varepsilon_C^0)$ es exacta! Así, obtenemos $d^0 : I^0 \to I^1$ ✓ Intercambiando el rol de $0 \to A \to B \to C \to 0$ por $0 \to I_A^0 \to I \to I_C^0 \to 0$, obtenemos $d^1 : I^1 \to I^2$, y así sucesivamente ✓ Luego, obtemos una sucesión exacta de complejos $0 \to I_A^\bullet \xrightarrow{i} I^\bullet \xrightarrow{\pi} I_C^\bullet \to 0$, donde (más aún!) $I^\bullet = I_A^\bullet \oplus I_C^\bullet$, y luego $F(I^\bullet) = F(I_A^\bullet) \oplus F(I_C^\bullet)$ (!). En particular, la sucesión $0 \to F(I_A^\bullet) \to F(I^\bullet) \to F(I_C^\bullet) \to 0$ es exacta en $\mathcal{D}$ y, por el lema de la serpiente, tenemos $\cdots \to H^i(I_A^\bullet) \underset{\text{def}}{=} R^iF(A) \to H^i(I^\bullet) \underset{\text{lema útil}}{\cong} H^i(I_B^\bullet) \underset{\text{def}}{=} R^iF(B) \to H^i(I_C^\bullet) \underset{\text{def}}{=} R^iF(C) \xrightarrow{\delta^i} R^{i+1}F(A) \to \cdots$ sucesión exacta larga asociada ✓ Veamos que la construcción es functorial: sea $0 \to I_{A'}^\bullet \to (I')^\bullet \to I_{C'}^\bullet \to 0$ asociada a $0 \to A' \to B' \to C' \to 0$, y donde $A' \to I_{A'}^\bullet$, $B' \to (I')^\bullet$ y $C' \to I_{C'}^\bullet$ son resoluciones inyectivas (tal como antes). La composición de $B \to B'$ y de $B' \overset{\eta'}{\hookrightarrow} I_{A'}^0$ induce un morfismo $I_A^0 \to I_{A'}^0$ (pues $I_{A'}^0$ objeto inyectivo) tal que

$$\begin{array}{ccc} B & \overset{\eta}{\hookrightarrow} & I_A^0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ B' & \overset{\eta'}{\hookrightarrow} & I_{A'}^0 \end{array}$$

es conmutativo. Además, obtenemos un morfismo de complejos:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & I_A^\bullet & \to & I^\bullet & \to & I_C^\bullet & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & I_{A'}^\bullet & \to & (I')^\bullet & \to & I_{C'}^\bullet & \to & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{con } I^\bullet = I_A^\bullet \oplus I_C^\bullet \\ \\ \text{con } (I')^\bullet = I_{A'}^\bullet \oplus I_{C'}^\bullet \end{array}$$

Aplicando F y considerando la sucesión exacta larga asociada, obtenemos ② ✓ Finalmente, ③ se deduce del lema útil considerando para un objeto inyectivo I la resolución inyectiva $I \to R^\bullet$ dada por $0 \to I \xrightarrow[\sim]{\varepsilon^0 = \mathrm{Id}_I} I =: R^0 \xrightarrow{d^0} 0 \xrightarrow{d^1} 0 \to \cdots$. Así, recordando (ver §1, pág 3) que $F(\mathrm{Id}_I) = \mathrm{Id}_{F(I)}$, tenemos que $0 \to F(I) \xrightarrow[\sim]{F(\varepsilon^0)} F(I) \xrightarrow{d^0} 0 \to 0 \to \cdots$ es exacta (!) y luego $R^iF(A) \cong H^i(F(R^\bullet)) = 0$ si $i > 0$. ■

¡Por fin! Estamos listos para "derivar" nuestros functores (exactos por la izquierda) favoritos:

Ejemplos/Definiciones importantes (cf. Ejemplos en §30, pág 104):

① Sea A anillo conmutativo con unidad y M un A-módulo. Los functores derivados (derechos) del functor $N \mapsto \operatorname{Hom}_A(M,N)$ se llaman $\operatorname{Ext}_A^i(M,N)$ (muy usados en topología!). En particular, toda sucesión exacta corta $0 \to N_1 \xrightarrow{f} N_2 \xrightarrow{g} N_3 \to 0$ de A-módulos induce una sucesión exacta $0 \to \operatorname{Hom}_A(M,N_1) \xrightarrow{f_*} \operatorname{Hom}_A(M,N_2) \xrightarrow{g_*} \operatorname{Hom}_A(M,N_3) \xrightarrow{\delta^0} \operatorname{Ext}_A^1(M,N_1) \to \operatorname{Ext}_A^1(M,N_2) \to \operatorname{Ext}_A^1(M,N_3) \xrightarrow{\delta^1} \operatorname{Ext}_A^2(M,N_1)$

② Sea $(X,\mathcal{O}_X)$ un espacio anillado y $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo, los functores derivados del functor $\mathcal{G} \mapsto \operatorname{Hom}_X(\mathcal{F},\mathcal{G})$ se denotan $\operatorname{Ext}_X^i(\mathcal{F},\mathcal{G})$ (o simplemente $\operatorname{Ext}^i(\mathcal{F},\mathcal{G})$). Como antes, una sucesión exacta $0 \to \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2 \to \mathcal{G}_3 \to 0$ de $\mathcal{O}_X$-módulos induce una sucesión exacta en $\underline{\mathrm{Ab}}$:

$0 \to \operatorname{Hom}_X(\mathcal{F},\mathcal{G}_1) \to \operatorname{Hom}_X(\mathcal{F},\mathcal{G}_2) \to \operatorname{Hom}_X(\mathcal{F},\mathcal{G}_3) \to \operatorname{Ext}_X^1(\mathcal{F},\mathcal{G}_1) \to \operatorname{Ext}_X^1(\mathcal{F},\mathcal{G}_2) \to \operatorname{Ext}_X^1(\mathcal{F},\mathcal{G}_3) \to \cdots$

③ Sea $(X,\mathcal{O}_X)$ espacio anillado y $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo, los functores derivados del functor $\mathcal{G} \mapsto \mathcal{H}om(\mathcal{F},\mathcal{G})$ se denotan $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F},\mathcal{G})$. Así, $0 \to \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2 \to \mathcal{G}_3 \to 0$ sucesión exacta de $\mathcal{O}_X$-mód. induce una sucesión exacta (de $\mathcal{O}_X$-módulos!):

$0 \to \mathcal{H}om(\mathcal{F},\mathcal{G}_1) \to \mathcal{H}om(\mathcal{F},\mathcal{G}_2) \to \mathcal{H}om(\mathcal{F},\mathcal{G}_3) \to \mathcal{E}xt^1(\mathcal{F},\mathcal{G}_1) \to \mathcal{E}xt^1(\mathcal{F},\mathcal{G}_2) \to \mathcal{E}xt^1(\mathcal{F},\mathcal{G}_3) \to \cdots$

④ Sea X una variedad algebraica con $A = \mathcal{O}(X)$. Los functores derivados del functor de secciones globales $\Gamma : \mathcal{O}_X\text{-}\underline{\mathrm{Mod}} \to A\text{-}\underline{\mathrm{Mod}}$, $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X,\mathcal{F})$ se llaman <u>grupos de cohomología</u>, y se denotan $H^i(X,\mathcal{F})$. En part, gracias al Teorema anterior, $H^0(X,\mathcal{F}) \cong \Gamma(X,\mathcal{F})$ y toda sucesión exacta $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ de $\mathcal{O}_X$-módulos induce una sucesión exacta larga

$$0 \to \Gamma(X,\mathcal{F}) \to \Gamma(X,\mathcal{G}) \to \Gamma(X,\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta^0} H^1(X,\mathcal{F}) \to H^1(X,\mathcal{G}) \to H^1(X,\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta^1} H^2(X,\mathcal{F}) \to \ldots$$

de A-módulos!

⑤ Sea $f : X \to Y$ morfismo regular entre variedades algebraicas. Los functores derivados del functor imagen directa $f_* : \underline{\mathrm{Qcoh}}(X) \to \underline{\mathrm{Qcoh}}(Y)$, $\mathcal{F} \mapsto f_*\mathcal{F}$ se llaman <u>imágenes directas superiores</u>, y se denotan $R^i f_* \mathcal{F}$. En part, $R^0 f_* \mathcal{F} \cong f_*\mathcal{F}$ y toda sucesión exacta $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ de haces quasi-coherentes en X induce una sucesión exacta larga

$$0 \to f_*\mathcal{F} \to f_*\mathcal{G} \to f_*\mathcal{H} \to R^1 f_*\mathcal{F} \to R^1 f_*\mathcal{G} \to R^1 f_*\mathcal{H} \to R^2 f_*\mathcal{F} \to \ldots$$

de haces quasi-coherentes en Y.

<u>Obs</u>: Sea X un espacio topológico y $\underline{\mathrm{Sh}}(X)$ la categoría de haces de grupos abelianos en X. Los functores derivados del functor $\Gamma : \underline{\mathrm{Sh}}(X) \to \underline{\mathrm{Ab}}$, $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X,\mathcal{F})$ también se llaman grupos de cohomología de X con valores en $\mathcal{F}$ y también denotados $H^i(X,\mathcal{F})$. Veremos más adelante que si X es una variedad algebraica, ambos grupos de cohomología (este último y ④) coinciden.

<u>Prop</u>: Sea X una variedad algebraica y $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo. Entonces:
① $\mathcal{E}xt^0(\mathcal{O}_X,\mathcal{F}) \cong \mathcal{F}$ y $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{O}_X,\mathcal{F}) = 0$ si $i > 0$.
② $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{O}_X,\mathcal{F}) \cong H^i(X,\mathcal{F})$ para todo $i \geq 0$.
Más generalmente, si $\mathcal{E}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo localmente libre de rango r, entonces se tiene que $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{E},\mathcal{F}) \cong H^i(X,\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{F})$ para todo $i \geq 0$.

<u>Dem</u>: Como $\mathcal{H}om(\mathcal{O}_X,\mathcal{F}) \cong \mathcal{F}$, tenemos que $\mathcal{H}om(\mathcal{O}_X,-) \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{O}_X\text{-}\underline{\mathrm{Mod}}}$ es un functor <u>exacto</u>, de donde se obtiene ① ✓ Para ②, notamos que por la biyección entre $\Gamma(X,\mathcal{F})$ y $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{O}_X,\mathcal{F})$ (ver §29, pág 100) tenemos que $\Gamma(X,-) \cong \mathrm{Hom}_X(\mathcal{O}_X,-)$ y luego los functores derivados respectivos $H^i(X,\mathcal{F}) \cong \mathrm{Ext}^i(\mathcal{O}_X,\mathcal{F})$ coinciden $\forall i \geq 0$ ✓
Finalmente, notemos por un lado que las propiedades del producto tensorial (ver §2, pág 5) implican que $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{E},-) = \mathrm{Hom}_X(\mathcal{O}_X \otimes \mathcal{E},-) \cong \mathrm{Hom}_X(\mathcal{O}_X,\mathcal{E}^\vee \otimes -)$.

Por otro lado, si $\mathcal{F} \to \mathcal{I}^\bullet$ es una resolución inyectiva de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{O}_X$-$\underline{\mathrm{Mod}}$ entonces al tensorizar por $\mathcal{E}^\vee$ (lo que preserva exactitud, pues $\mathcal{E}$ loc. libre!) obtenemos $\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{F} \to \mathcal{R}^\bullet := \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{I}^\bullet$ resolución inyectiva de $\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{F}$ (pues $\mathcal{E}^\vee$ loc. libre y luego $(\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{I}^i)|_{\mathcal{U}} \simeq (\mathcal{I}^i|_{\mathcal{U}})^{\oplus r}$). Dados que por definición $R^i F(A) := H^i(F(I_A^\bullet))$, tenemos que los complejos

$$\begin{array}{c} 0 \to \Gamma(X,\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{F}) \to \Gamma(X,\mathcal{R}^\bullet) \\ \text{\rotatebox{90}{$\cong$}} \\ 0 \to \mathrm{Hom}_X(\mathcal{O}_X,\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}_X(\mathcal{E},\mathcal{F}) \to \mathrm{Hom}_X(\mathcal{E},\mathcal{I}^\bullet) \end{array}$$

calculan el mismo functor derivado, ie, $H^i(X,\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{F}) \cong \mathrm{Ext}^i(\mathcal{E},\mathcal{F})$ $\forall i \geq 0$ ✓ ■

<u>Cultura general</u>: Un objeto P en una categoría abeliana $\mathcal{C}$ es <u>proyectivo</u> si el functor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\cdot)$, $A \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,A)$, es <u>exacto</u>. Usando <u>resoluciones proyectivas</u> $P_\bullet \to A$ y <u>homología</u> se pueden definir functores derivados <u>izquierdos</u> $L_i F(A) := H_i(F(P_\bullet))$ para $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ functor exacto a la derecha. Por ejemplo, en A-$\underline{\mathrm{Mod}}$, el functor $M \otimes_A - : N \mapsto M \otimes_A N$ es exacto a la derecha, y su functor derivado izquierdo se denota $\mathrm{Tor}_i^A(M,N)$.

§33. Resoluciones acíclicas y resoluciones flasques

Durante esta sección, denotamos por $\mathcal{F}: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un functor (covariante) aditivo y exacto por la izquierda entre categorías abelianas, donde $\mathcal{C}$ tiene suficientes inyectivos. Luego, los functores derivados $R^i\mathcal{F}: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ están bien definidos y $R^0\mathcal{F} \cong \mathcal{F}$.

El objetivo de esta sección es estudiar otros tipos de resoluciones de un objeto A en $\mathcal{C}$ que nos permitan calcular $R^i\mathcal{F}(A)$ de manera "más sencilla" (cf. Teorema de Leray en §28).

[<u>Def</u>: Sea A un objeto de $\mathcal{C}$. Decimos que A es <u>$\mathcal{F}$-acíclico</u> si $R^i\mathcal{F}(A) = 0 \ \forall i > 0$]

<u>Ejemplo</u>: Todo objeto inyectivo de $\mathcal{C}$ es $\mathcal{F}$-acíclico (ver §32, pág 108).

[<u>Lema</u>: Sea $K^\bullet$ un complejo <u>positivo</u> en $\mathcal{C}$ cuyos objetos son $\mathcal{F}$-acíclicos. Supongamos que $K^\bullet$ es <u>exacto</u>, entonces $\mathcal{F}(K^\bullet)$ es <u>exacto</u> en $\mathcal{D}$.]

<u>Dem</u>: Sea $K^\bullet = (K^i, d^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ y sean $Z^i = \ker(d^i)$ y $B^i = \operatorname{Im}(d^{i-1})$. Así, $K^\bullet$ exacto $\iff Z^i = B^i \ \forall i$ y en particular la sucesión $0 \to Z^{i-1} \hookrightarrow K^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} Z^i \to 0$ es <u>exacta</u> $\forall i$. Aplicando $\mathcal{F}$:

$$0 \to \mathcal{F}(Z^{i-1}) \to \mathcal{F}(K^{i-1}) \to \mathcal{F}(Z^i) \to R^1\mathcal{F}(Z^{i-1}) \to \underbrace{\cancel{R^1\mathcal{F}(K^{i-1})}}_{0} \to R^1\mathcal{F}(Z^i) \xrightarrow{\sim} R^2\mathcal{F}(Z^{i-1}) \to \underbrace{\cancel{R^2\mathcal{F}(K^{i-1})}}_{0} \to \dots$$

$\Rightarrow R^p\mathcal{F}(Z^i) \cong R^{p+1}\mathcal{F}(Z^{i-1}) \ \forall i \in \mathbb{Z}$ y $\forall p \geq 1$. En part, $R^1\mathcal{F}(Z^{i-1}) \cong R^2\mathcal{F}(Z^{i-2}) \cong \dots \cong R^p\mathcal{F}(0) = 0$ si $p \gg 0$.

$\Rightarrow 0 \to \mathcal{F}(Z^{i-1}) \to \mathcal{F}(K^{i-1}) \to \mathcal{F}(Z^i) \to 0$ es <u>exacta</u> $\forall i$, i.e., $\mathcal{F}(K^\bullet)$ es exacto ✓ ■

<u>Construcción</u>: Sea $f: K^\bullet \to L^\bullet$ un morfismo de complejos en $\mathcal{C}$. Definimos el <u>cono de f</u> como el complejo $C(f)^\bullet$ dado por

$$C(f)^i := L^i \oplus K^{i+1}$$

y con diferencial $d^i_{C(f)}: C(f)^i \to C(f)^{i+1}$ dado por $d^i_{C(f)} := \begin{pmatrix} d^i_L & f^{i+1} \\ 0 & -d^{i+1}_K \end{pmatrix}$, i.e., si $(x,y) \in L^i \oplus K^{i+1}$ entonces $d^i_{C(f)}(x,y) = (d^i_L(x) + f^{i+1}(y), -d^{i+1}_K(y))$ en $L^{i+1} \oplus K^{i+2} \underset{\text{def}}{=} C(f)^{i+1}$.

En particular, si denotamos por $K[1]^\bullet$ al complejo $K[1]^i := K^{i+1}$ con diferencial $d^i_{K[1]} := -d^{i+1}_K$ entonces la sucesión de complejos $0 \to L^\bullet \xhookrightarrow{i} C(f)^\bullet \xrightarrow{\pi} K[1]^\bullet \to 0$ es <u>exacta</u>. Así, obtenemos en cohomología la sucesión exacta larga

$$\dots \to H^i(L^\bullet) \to H^i(C(f)^\bullet) \to H^i(K[1]^\bullet) \cong H^{i+1}(K^\bullet) \xrightarrow{\delta^i} H^{i+1}(L^\bullet) \to H^{i+1}(C(f)^\bullet) \to \dots \quad (*)$$

donde en este caso (por construcción), el morfismo de conexión δ^i coincide con el morfismo $H^{i+1}(f): H^{i+1}(K^\bullet) \to H^{i+1}(L^\bullet)$ inducido en cohomología por f.

[<u>Prop</u>: Sea $f: K^\bullet \to L^\bullet$ un morfismo de complejos <u>positivos</u> en $\mathcal{C}$ tal que:
① f es un quasi-isomorfismo (i.e, $H^i(f): H^i(K^\bullet) \to H^i(L^\bullet)$ es un isomorfismo $\forall i$); y
② Los objetos de $K^\bullet$ y $L^\bullet$ son $\mathcal{F}$-acíclicos.
Entonces, $\mathcal{F}(f): \mathcal{F}(K^\bullet) \to \mathcal{F}(L^\bullet)$ es un quasi-isomorfismo.]

<u>Dem</u>: Las hipótesis ① y ② implican, usando $(*)$, que el complejo $C(f)^\bullet$ es <u>exacto</u> y cada objeto $C(f)^i \overset{\text{def}}{=} L^i \oplus K^{i+1}$ es $\mathcal{F}$-acíclico. Luego, el Lema anterior implica que $\mathcal{F}(C(f)^\bullet) \cong C(\mathcal{F}(f))^\bullet$ es <u>exacto</u> también. Así, la sucesión exacta larga $(*)$ asociada a la sucesión exacta corta

$$0 \to \mathcal{F}(L^\bullet) \to C(\mathcal{F}(f))^\bullet \to \mathcal{F}(K[1]^\bullet) \to 0$$

muestra que el morfismo de complejos $\mathcal{F}(f): \mathcal{F}(K^\bullet) \to \mathcal{F}(L^\bullet)$ es un quasi-isomorfismo. ■

[<u>Teorema de de Rham</u>: Sea A un objeto en $\mathcal{C}$ y sea $A \to K^\bullet$ una resolución de A tal que todos los objetos de $K^\bullet$ son $\mathcal{F}$-acíclicos. Entonces, hay un isomorfismo canónico

$$H^i(\mathcal{F}(K^\bullet)) \xrightarrow{\sim} R^i\mathcal{F}(A) \quad \text{para todo } i \geq 0.$$]

<u>Dem</u>: Consideremos la resolución inyectiva $A \to I^\bullet_A$ que escogimos para calcular $R^i\mathcal{F}(A) \underset{\text{def}}{=} H^i(\mathcal{F}(I^\bullet_A))$, entonces (ver Teorema en §31, pág 107) la resolución $A \to K^\bullet$ induce un morfismo de complejos $f: K^\bullet \to I^\bullet_A$ (único módulo homotopía) tal que el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr] & K^\circ \arrow[d, "f"] \\ & I_A^\circ \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Aplicando $\mathcal{F}$ obtenemos un morfismo de complejos $\mathcal{F}(K^\circ) \to \mathcal{F}(I_A^\circ)$ (único modulo homotopía). Así, obtenemos un único morfismo inducido en cohomología $H^i(\mathcal{F}(K^\circ)) \longrightarrow H^i(\mathcal{F}(I_A^\circ)) \underset{\text{Df}}{=} R^i\mathcal{F}(A)$.

Finalmente, dado que $A \to K^\circ$ y $A \to I_A^\circ$ son resoluciones del mismo objeto, tenemos que $f : K^\circ \to I_A^\circ$ es un quasi-isomorfismo (ver Df/Construcción en §31, p.107) ✓ Además, K° y I_A° son $\mathcal{F}$-acíclicos (por hipótesis y pues I_A° inyectivo, resp.), por lo que la proposición anterior implica que $\mathcal{F}(K^\circ) \to \mathcal{F}(I_A^\circ)$ es un quasi-isomorfismo, ie, $H^i(\mathcal{F}(K^\circ)) \cong R^i\mathcal{F}(A)$ $\forall i \geq 0$ ■

[Conclusión: Para calcular los functores derivados $R^i\mathcal{F}$ de $\mathcal{F}$ basta considerar resoluciones $\mathcal{F}$-acíclicas en lugar de resoluciones inyectivas!]

[Cultura general: En 1931, Georges de Rham considera X variedad diferenciable y $\mathcal{O}_X = \mathcal{C}^\infty_X$ haz de funciones diferenciables, y construye el complejo (de de Rham!)

$$0 \to \underline{\mathbb{R}} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathcal{O}_X \xrightarrow{d} \Omega^1_X \xrightarrow{d} \Omega^2_X \to \dots \to \Omega_X^{\dim(X)} \qquad (\text{cf. §4, pág 17})$$

y calcula (cf. Lema de Poincaré) que $H^i(X, \Omega_X^p) = 0$ $\forall i > 0$ y $\forall p \geq 0$ (con $\Omega^0_X := \mathcal{O}_X$), ie, $\underline{\mathbb{R}} \to \Omega^\circ_X$ es una resolución Γ-acíclica del haz $\underline{\mathbb{R}}$. Luego, el Teorema de de Rham implica:

$$H^i(X, \underline{\mathbb{R}}) \cong H^i(\Gamma(\Omega^\circ_X)) = \frac{\ker\{d : \Omega^i_X(X) \to \Omega^{i+1}_X(X)\}}{\operatorname{Im}\{d : \Omega^{i-1}_X(X) \to \Omega^i_X(X)\}} \underset{\text{Df}}{=} \frac{\{i\text{-formas } \underline{\text{cerradas}}\}}{\{i\text{-formas } \underline{\text{exactas}}\}} =: H^i_{dR}(X).$$

En 1953, Pierre Dolbeault demuestra resultados análogos para variedades complejas.]

Inspirados por la discusión anterior, consideremos en lo que sigue un espacio topológico X y sea $\underline{Sh}(X)$ la categoría de haces de grupos abelianos en X. Así, los functores derivados del functor de secciones globales $\Gamma : \underline{Sh}(X) \to \underline{Ab}$, $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$ son los $H^i(X, \mathcal{F})$.

[Df: Decimos que un haz de grupos abelianos $\mathcal{F}$ en X es flasque (o "blando", o "flabby") si para todo abierto $\mathcal{U} \subseteq X$, el morfismo de restricción $\mathcal{F}(X) \twoheadrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{U})$ es sobreyectivo.]

[Lema: Sea $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H} \to 0$ sucesión exacta de haces de grupos abelianos en X, y supongamos que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son flasques. Entonces:

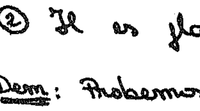
① $\Gamma(g) : \Gamma(X, \mathcal{G}) \twoheadrightarrow \Gamma(X, \mathcal{H})$ es sobreyectivo.

② $\mathcal{H}$ es flasque.]

Dem: Probemos más generalmente que si $\mathcal{F}$ flasque (con $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ arbitrarios!) entonces $\forall \mathcal{U} \subseteq X$ abierto se tiene que $\mathcal{G}(\mathcal{U}) \twoheadrightarrow \mathcal{H}(\mathcal{U})$ es sobreyectivo: Sea $\sigma \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ y consideremos el conjunto (parcialmente ordenado $\neq \emptyset$) de pares (V, s) con $V \subseteq \mathcal{U}$ abierto y $s \in \mathcal{G}(V)$ tq $g(s) = \sigma|_V$.

$\underset{\text{Lema de Zorn}}{\Rightarrow}$ $\exists\, (V, s)$ elemento maximal. Veamos que necesariamente $V = \mathcal{U}$:

Sino, $\exists\, x \in \mathcal{U}$ tq $x \notin V$. Como $\mathcal{G} \twoheadrightarrow \mathcal{H}$ morfismo sobreyectivo de haces (!), $\exists\, \mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{U}$ vecindad abierta de x y $t \in \mathcal{G}(\mathcal{U}_x)$ tq $g(t) = \sigma|_{\mathcal{U}_x}$. Sea $W := V \cap \mathcal{U}_x$:



$\Rightarrow g(s) = g(t)$ en $\mathcal{H}(W)$, ie, $s - t \in \ker(g)(W)$

$\underset{\text{Exactitud}}{\Rightarrow}$ $\exists\, \tilde{s} \in \mathcal{F}(W)$ tal que $f(\tilde{s}) = s - t$ en $\mathcal{G}(W)$ (*)

Construyamos $\tau \in \mathcal{G}(V \cup \mathcal{U}_x)$ tq $g(\tau) = \sigma|_{V \cup \mathcal{U}_x}$ (contradiciendo la maximalidad de (V, s)):

Como $\mathcal{F}$ flasque, $\tilde{s} \in \mathcal{F}(W)$ es restricción de cierta sección en $\mathcal{F}(V)$, que también llamaremos $\tilde{s} \in \mathcal{F}(V)$. Sea $\tilde{t} := s - f(\tilde{s}) \in \mathcal{G}(V)$. Entonces, $\tilde{t}|_W \overset{(*)}{=} t \in \mathcal{G}(W)$. Así, $t \in \mathcal{G}(\mathcal{U}_x)$ y $\tilde{t} \in \mathcal{G}(V)$ cumplen $t|_{\mathcal{U}_x \cap V} = \tilde{t}|_{\mathcal{U}_x \cap V}$ $\Rightarrow$ se pegan en $\tau \in \mathcal{G}(V \cup \mathcal{U}_x)$, donde $g(\tau) \in \mathcal{H}(V \cup \mathcal{U}_x)$ cumple $g(\tau)|_{\mathcal{U}_x} = g(\tau|_{\mathcal{U}_x}) = g(t) = \sigma|_{\mathcal{U}_x}$ y $g(\tau)|_V = g(\tau|_V) = g(\tilde{t}) \overset{\text{Df}}{=} g(s) - \overset{0}{\cancel{g(f(\tilde{s}))}} = \sigma|_V$

$\Rightarrow g(\tau) = \sigma|_{V \cup \mathcal{U}_x}$, contradicción! $\rightsquigarrow$ ① ✓ Para ② consideramos el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(X) & \twoheadrightarrow & \mathcal{H}(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{G}(\mathcal{U}) & \twoheadrightarrow & \mathcal{H}(\mathcal{U}) \end{array}$$

Para todo $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto, las flechas horizontales son sobreyectivas por la prueba de ①. Además, la primera flecha vertical es sobreyectiva pues $\mathcal{G}$ flasque $\Rightarrow$ La segunda también, ie, $\mathcal{H}$ es flasque ✓ ■

<u>Construcción</u> (extensión por cero): Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado y $\mathcal{U} \overset{j}{\hookrightarrow} X$ abierto no-vacío. Dado $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$-módulo, definimos el haz <u>extensión por cero</u> $j_!\mathcal{F}$ en X como el haz asociado al prehaz $j_!^{pre}\mathcal{F}$ dado por

$$(j_!^{pre}\mathcal{F})(V) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } V \not\subseteq \mathcal{U} \\ \mathcal{F}(V) & \text{si } V \subseteq \mathcal{U} \end{cases}$$

Así, $j_!\mathcal{F}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo y más aún la correspondencia $\mathcal{F}(X) \overset{def}{=} \Gamma(X, \mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}_X(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})$ (ver §29, p.100) se generaliza a $\mathcal{F}(\mathcal{U}) \cong \mathrm{Hom}_X(j_!\mathcal{O}_{\mathcal{U}}, \mathcal{F})$ $\boxed{\text{Ejercicio}}$.

<u>Prop</u>: Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ espacio anillado y sea $\mathcal{I}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo <u>inyectivo</u>. Entonces, $\mathcal{I}$ es <u>flasque</u>.

<u>Dem</u>: Sea $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto con inclusión $j: \mathcal{U} \hookrightarrow X$, entonces $0 \to j_!\mathcal{O}_{\mathcal{U}} \hookrightarrow \mathcal{O}_X$ es exacta. Por otro lado, por definición (ver §31, p.105) $\mathcal{I}$ es inyectivo si y sólo si el functor contravariante $\mathrm{Hom}_X(\cdot, \mathcal{I})$ es exacto. En part, $\mathcal{I}(X) \cong \mathrm{Hom}_X(\mathcal{O}_X, \mathcal{I}) \twoheadrightarrow \mathcal{I}(\mathcal{U}) \cong \mathrm{Hom}_X(j_!\mathcal{O}_{\mathcal{U}}, \mathcal{I}) \to 0$ exacta ✓ ■

<u>Obs importante</u>: En nuestra definición de espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ pedimos originalmente que $\mathcal{O}_X$ fuese un haz de $\Bbbk$-álgebras (ver §4, p.15). Sin embargo, se puede considerar sin problemas $\mathcal{O}_X$ como un haz de <u>anillos</u> abelianos sin problema! En part, si $\mathcal{O}_X = \underline{\mathbb{Z}}$ entonces $\mathcal{O}_X$-<u>Mod</u> $=$ <u>Sh</u>(X) y así la Proposición dice que "Todo haz de grupos abelianos en un esp. top. X es flasque"!

<u>Teorema</u>: Sea X un espacio topológico y $\mathcal{F}$ un haz de grupos abelianos en X. Supongamos que $\mathcal{F}$ es <u>flasque</u>, entonces $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ para todo $i > 0$ (ie, $\mathcal{F}$ es Γ-acíclico).

<u>Dem</u>: Consideremos $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}$ con $\mathcal{I}$ inyectivo en <u>Sh</u>(X) (y en particular $H^i(X, \mathcal{I}) = 0 \ \forall i > 0$). Sea $\mathcal{G} := \mathcal{I}/\mathcal{F}$ y consideremos la sucesión exacta $0 \to \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I} \twoheadrightarrow \mathcal{G} \to 0$, donde $\mathcal{F}$ e $\mathcal{I}$ son flasques (por la Proposición) $\overset{\text{Lema}}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{G}$ es flasque y $0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{I}) \twoheadrightarrow \Gamma(X, \mathcal{G}) \to 0$ es <u>exacta</u>. Así, la sucesión exacta larga en cohomología se reduce a:

$0 \to H^1(X, \mathcal{F}) \to \cancel{H^1(X, \mathcal{I})}^{0} \to H^1(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} H^2(X, \mathcal{F}) \to \cancel{H^2(X, \mathcal{I})}^{0} \to \dots$, ie, $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$ y además $H^i(X, \mathcal{F}) \cong H^{i-1}(X, \mathcal{G}) \ \forall i \geq 2$. Luego, por inducción en $i \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, tenemos $H^i(X, \mathcal{F}) = 0 \ \forall i > 0$ ■

<u>Conclusión</u>: En un espacio topológico X, para calcular los grupos de cohomología $H^i(X, \mathcal{F})$ basta considerar resoluciones <u>flasques</u> de $\mathcal{F}$ en lugar de resoluciones inyectivas!

Esto último implica que en una variedad algebraica X, los functores derivados (grupos de cohomología) de $\Gamma: \mathcal{O}_X$-<u>Mod</u> $\to A$-<u>Mod</u> (con $A = \mathcal{O}(X)$) y $\Gamma:$ <u>Sh</u>$(X) \to$ <u>Ab</u> coinciden. Más precisamente:

<u>Corolario</u>: Sea X una variedad algebraica y sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo. Entonces, si denotamos por $\mathcal{F}_{ab}$ el haz de grupos abelianos subyacente a $\mathcal{F}$, tenemos que:

$$H^i(X, \mathcal{F}) \cong H^i(X, \mathcal{F}_{ab}) \quad \text{para todo } i \geq 0.$$

<u>Dem</u>: Sea $\mathcal{F} \to \mathcal{I}^\circ$ una resolución inyectiva en la categoría $\mathcal{O}_X$-<u>Mod</u>. Entonces, gracias a la proposición anterior, $\mathcal{F}_{ab} \to \mathcal{I}^\circ_{ab}$ es una resolución flasque en <u>Sh</u>(X). Así, el Teorema anterior implica que los objetos de $\mathcal{I}^\circ_{ab}$ son Γ-acíclicos ✓ Finalmente, el Teorema de de Rham implica que la resolución $\mathcal{F}_{ab} \to \mathcal{I}^\circ_{ab}$ permite calcular

$$H^i(X, \mathcal{F}) \overset{def}{=} H^i(\Gamma(\mathcal{I}^\circ)) = H^i(\Gamma(\mathcal{I}^\circ_{ab})) \underset{dR}{\cong} H^i(X, \mathcal{F}_{ab}) \quad ✓ \ ■$$

§34. Cohomología de variedades afines y Teorema de Leray

En esta sección probaremos los Teoremas de Serre y Leray que fueron usados en §28 y §29 para obtener importantes resultados y calcular cohomología de variedades algebraicas (ver §28, pág 97).

Recuerdo (cf. §28, p.96): Sea A un anillo conmutativo con unidad y M un A-módulo. Para $f \in A$ definimos $M_f := M \otimes_A A_f = \{ \frac{m}{f^p} \text{ con } m \in M \text{ y } p \in \mathbb{N} \}/\sim$, donde $\frac{m}{f^p} \sim \frac{m'}{f^q}$ si $\exists r \in \mathbb{N}$ tq $f^r(m f^q - m' f^p) = 0$ en M.

Además, si X es una variedad algebraica afín con $A = \mathcal{O}(X)$, entonces hay una correspondencia entre haces quasi-coherentes (resp. coherentes) y A-módulos (resp. A-módulos fin. generados) vía:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \longmapsto & \Gamma(X, \mathcal{F}) \\ \widetilde{M} & \longleftarrow & M \end{array}$$

donde $\widetilde{M}$ es el haz definido en $\mathcal{U}_f = \{x \in X \text{ tq } f(x) \neq 0\}$ por $\widetilde{M}(\mathcal{U}_f) := M_f$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$* Sea X variedad alg. afín con $A = \mathcal{O}(X)$. Probar que si I es un A-módulo inyectivo y $f \in A$ no-nulo, entonces:

a) La proyección natural $I \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} I_f$, $m \mapsto \frac{m}{1}$ es sobreyectiva.

b) El kernel $K = \ker(I \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} I_f)$ es un A-módulo inyectivo.

Geométricamente, el punto a) se reescribe como:

Lema: Sea X var. alg. afín con $A = \mathcal{O}(X)$ y sea I un A-módulo inyectivo, con $\mathcal{I} = \widetilde{I}$ el haz quasi-coherente asociado. Entonces, $\mathcal{I}(X) \twoheadrightarrow \mathcal{I}(\mathcal{U}_f)$ es sobreyectivo $\forall f \in A$ no-nulo.

Prop: Sea X var. alg. afín con $A = \mathcal{O}(X)$ y sea I un A-módulo inyectivo, con $\mathcal{I} = \widetilde{I}$ el haz quasi-coherente asociado. Entonces, $\mathcal{I}$ es flasque (ie, $\mathcal{I}(X) \twoheadrightarrow \mathcal{I}(\mathcal{U})$ sobreyectivo $\forall\, \mathcal{U} \subseteq X$ abierto).

Dem: Consideremos el soporte de $\mathcal{I}$ definido por $\mathrm{Supp}(\mathcal{I}) := \{x \in X \text{ tq } \mathcal{I}_x \neq 0\}$, y sea $Y = \mathrm{Supp}(\mathcal{I}) \subseteq X$ cerrado Zariski. Si $Y = \emptyset$ entonces $\mathcal{I}(X) = \mathcal{I}(\mathcal{U}) = 0$ ✓ Luego, podemos sup. $Y \neq \emptyset$ y que el resultado se cumple para todo A-módulo inyectivo K tal que $\mathcal{K} = \widetilde{K}$ cumple $\mathrm{Supp}(\mathcal{K}) \subsetneq Y$ (inducción noetheriana).

Sea $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto y sea $s \in \mathcal{I}(\mathcal{U})$. Queremos hallar $\sigma \in \mathcal{I}(X)$ tq $\sigma|_{\mathcal{U}} = s$. Si $\mathcal{U} \cap Y = \emptyset$ $\Rightarrow s = 0$ y basta tomar $\sigma = 0$ ✓ Si $\mathcal{U} \cap Y \neq \emptyset$, dado que los $\mathcal{U}_f$ son una base de la top. de Zariski, existe $f \in A$ no-nulo tq $\mathcal{U}_f \subseteq \mathcal{U}$ y $\mathcal{U}_f \cap \mathrm{Supp}(\mathcal{I}) \neq \emptyset$.

$\overset{\text{Lema}}{\Rightarrow} \exists\, \sigma' \in \mathcal{I}(X)$ tq $\sigma'|_{\mathcal{U}_f} = s|_{\mathcal{U}_f}$. Sea $t := s - \sigma'|_{\mathcal{U}} \in \mathcal{I}(\mathcal{U})$ (*) $\Rightarrow t|_{\mathcal{U}_f} = 0$, y luego t está definida por una sección de $\mathcal{K} = \widetilde{K}$, donde $K := \ker(I \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} I_f)$, y con K inyectivo! Dado que $\mathrm{Supp}(\mathcal{K}) \subsetneq Y$, tenemos (por inducción noetheriana) que t se extiende a $\tau \in \mathcal{I}(X)$, que cumple $\tau|_{\mathcal{U}} = t$ y luego $\sigma := \sigma' + \tau \in \mathcal{I}(X)$ cumple $\sigma|_{\mathcal{U}} = \sigma'|_{\mathcal{U}} + t \overset{(*)}{=} s$ ✓ ■

Teorema (Serre): Sea $\mathcal{F}$ un haz quasi-coherente en una variedad alg. afín X. Entonces,

$$H^i(X, \mathcal{F}) = 0 \quad \text{para todo } i \geq 1.$$

Dem: Sea $A = \mathcal{O}(X)$ y consideremos el A-módulo $M := \Gamma(X, \mathcal{F})$. Sea $\varepsilon: M \to I^\bullet$ resolución inyectiva de M en A-$\underline{\mathrm{Mod}}$, y sea $\mathcal{I}^p := \widetilde{I^p}$ el haz quasi-coherente asociado al A-módulo inyectivo $I^p \overset{\text{Prop}}{\Longrightarrow} \mathcal{I}^p$ es flasque y luego Γ-acíclico (ver §33, p.113). Así, obtenemos una resolución Γ-acíclica $\varepsilon: \widetilde{M} \cong \mathcal{F} \to \widetilde{I^\bullet} = \mathcal{I}^\bullet$ del haz $\mathcal{F}$ en $\mathcal{O}_X$-$\underline{\mathrm{Mod}}$. Finalmente, el Teorema de de Rham y el hecho que $\Gamma(X, \widetilde{I^p}) \cong I^p$ implican que:

$$H^i(X, \mathcal{F}) \underset{dR}{\cong} H^i(\Gamma(X, \mathcal{I}^\bullet)) = H^i(I^\bullet) = 0 \quad \text{para todo } i \geq 1. \;■$$

Para cerrar el círculo de ideas, nos queda sólo probar el Teorema de Leray (ver §28, pág 95), que nos asegura (junto al Teorema de Serre) que podemos usar cohomología de Čech para calcular!

<u>Recuerdo</u> (§28, pág 94): Sea $\mathcal{F}$ un haz de grupos abelianos en un espacio topológico X, y sea $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de X, con I conjunto ordenado. Para cada $p \in \mathbb{N}$ se define el grupo de <u>p-cocadenas</u> de Čech (de $\mathcal{F}$ resp. a $\mathcal{U}$) por:

$$C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) := \prod_{i_0<\dots<i_p} \mathcal{F}(\mathcal{U}_{i_0}\cap\dots\cap\mathcal{U}_{i_p}).$$

Además, se define el <u>operador de coborde</u> $d^p : C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ mediante

$$(d^p s)_{i_0,\dots,i_{p+1}} := \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k s_{i_0,\dots,i_{k-1},i_{k+1},\dots,i_{p+1}}\big|_{\mathcal{U}_{i_0}\cap\dots\cap\mathcal{U}_{i_{p+1}}}, \text{ donde } s = \{s_{i_0,\dots,i_p}\}_{i_0<\dots<i_p} \; (\ast),$$

el cual verifica $d^{p+1}\circ d^p = 0 \; \forall p\in\mathbb{N}$, ie, $C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})$ es un <u>complejo</u> (<u>de Čech</u>) en <u>Ab</u>. Además, $\check{H}^i(\mathcal{U},\mathcal{F}) \overset{df}{=} H^i(C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}))$ es el i-ésimo grupo de cohomología de Čech, con $\check{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \cong \Gamma(X,\mathcal{F})$.

<u>Construcción</u>: Sea $V \subseteq X$ un abierto, y consideremos el cubrimiento $\mathcal{U}_V$ de V dado por los abiertos $\{\mathcal{U}_i \cap V\}_{i\in I}$. Entonces, el prehaz de grupos abelianos

$$V \longmapsto C^p(\mathcal{U}_V,\mathcal{F})$$

es un haz, denotado $\mathcal{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$, y que viene dotado de $d^p : \mathcal{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to \mathcal{C}^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ que hacen de $\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})$ un complejo en <u>Sh</u>(X). Notar que, por construcción, tenemos que:

a) Si $\mathcal{F}$ es flasque, entonces $\mathcal{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ es flasque $\forall p\in\mathbb{N}$.

b) El morfismo $\varepsilon^0 : \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$ dado por $s \in \mathcal{F}(V) \mapsto \{s|_{V\cap\mathcal{U}_i}\}_{i\in I} \in C^0(\mathcal{U}_V,\mathcal{F})$ es inyectivo (df. de haz!). En part, $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon^0} \mathcal{C}^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{d^0} \mathcal{C}^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to \dots$ es un complejo en <u>Sh</u>(X)

c) $H^0(\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})) \overset{df}{=} \ker(d^0) \cong \mathcal{F} \overset{b)}{=} \mathrm{Im}(\varepsilon^0)$ (cf. §28, p.94).

<u>Lema</u>: $\varepsilon : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})$ es una <u>resolución</u> de $\mathcal{F}$ en <u>Sh</u>(X).

<u>Dem</u>: Por la discusión anterior, resta verificar que $H^i(\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})) = 0 \; \forall i \geq 1$, ie, que $\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})$ es un complejo <u>exacto</u>. Esto se verifica en cada tallo, ie, sea $x\in X$ y veamos que $\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})_x$ es exacto: sea $\mathcal{U}_j$ abierto en el cubr. $\mathcal{U}$ tq $x \in \mathcal{U}_j$ y construyamos una homotopía $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})_x} \sim 0$ (de donde se obtiene el resultado!). Por definición, la homotopía h está dada por morfismos $h^{p+1} : \mathcal{C}^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})_x \to \mathcal{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{F})_x$ tq $\forall f \in \mathcal{C}^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})_x$ se cumple $f = d^p \circ h^{p+1}(f) + h^{p+2}\circ d^{p+1}(f)$ $(\ast\ast)$ en $\mathcal{C}^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})_x$ (ver §31, p.106). Para esto, definimos:

$$h^{p+1}(f) = (h^{p+1}(f)_{i_0,\dots,i_p})_{i_0<\dots<i_p} \quad \text{donde } h^{p+1}(f)_{i_0,\dots,i_p} := f_{j,i_0,\dots,i_p}.$$

Aquí, $f = (f_{i_0,\dots,i_{p+1}}) \in C^{p+1}(\mathcal{U}_V,\mathcal{F})$ para cierta vecindad V de $x\in X$, que podemos suponer $V \subseteq \mathcal{U}_j$. Así, $V\cap(\mathcal{U}_j\cap\mathcal{U}_{i_0}\cap\dots\cap\mathcal{U}_{i_p}) = V\cap(\mathcal{U}_{i_0}\cap\dots\cap\mathcal{U}_{i_p})$, y por ende tenemos $(f_{j,i_0,\dots,i_p})_{i_0<\dots<i_p} \in C^p(\mathcal{U}_V,\mathcal{F})$ y su germen en $x\in X$ define $h^{p+1}(f)$. Finalmente, la fórmula $(\ast\ast)$ se deduce "directamente" de $(\ast)$. ■

<u>Prop</u>: Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ un cubrimiento, con I conj. ordenado. Entonces:

① Para toda sucesión exacta $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ de haces de grupos abelianos en X tal que $H^1(\mathcal{U}_{i_0}\cap\dots\cap\mathcal{U}_{i_p},\mathcal{F}) = 0 \; \forall p\in\mathbb{N}$ y $\forall i_0,\dots,i_p \in I$, hay una sucesión <u>exacta</u> larga

$$0 \to \check{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to \check{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{G}) \to \check{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta^0} \check{H}^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to \check{H}^1(\mathcal{U},\mathcal{G}) \to \check{H}^1(\mathcal{U},\mathcal{H}) \to \dots$$

② Si $\mathcal{F}$ es un haz <u>flasque</u>, entonces $\check{H}^i(\mathcal{U},\mathcal{F}) = 0$ para todo $i \geq 1$.

<u>Dem</u>: La hipótesis de ① implica que las sucesiones de grupos abelianos (para todas las posibles intersecciones) $0 \to \mathcal{F}(\mathcal{U}_{i_0}\cap\dots\cap\mathcal{U}_{i_p}) \to \mathcal{G}(\mathcal{U}_{i_0}\cap\dots\cap\mathcal{U}_{i_p}) \to \mathcal{H}(\mathcal{U}_{i_0}\cap\dots\cap\mathcal{U}_{i_p}) \to 0$ son <u>exactas</u>, ie, la sucesión de <u>complejos</u> $0 \to C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{G}) \to C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{H}) \to 0$ es exacta, de donde se obtiene la sucesión exacta larga ✓ Para ②, tenemos que $\varepsilon : \mathcal{F} \to \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})$ es una resolución flasque (por Lema anterior) y luego Γ-acíclica (ver §33, p.113). Luego, el Teorema de de Rham implica que $0 = H^i(X,\mathcal{F}) \underset{dR}{\cong} H^i(\Gamma(\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}))) \underset{df}{=} H^i(C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})) \underset{df}{=} \check{H}^i(\mathcal{U},\mathcal{F}) \; \forall i \geq 1$ ✓ ■

Def: sea $\mathcal{F}$ un haz de grupos abelianos en un espacio topológico X. Decimos que un cubr. abierto $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$, con I conj. ordenado, es $\mathcal{F}$-acíclico si $\forall p \in \mathbb{N}$ y todos $i_0, \dots, i_p \in I$ se tiene que $H^i(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}, \mathcal{F}) = 0$ para todo $i \geq 1$.

Teorema de Leray: sea $\mathcal{F}$ un haz de grupos abelianos en un espacio topológico X, y sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de X. Entonces:
① Existe un morfismo canónico $\check{H}^i(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to H^i(X,\mathcal{F})$ para todo $i \geq 0$, functorial en $\mathcal{F}$.
② Si el cubrimiento $\mathcal{U}$ es $\mathcal{F}$-acíclico, entonces $\check{H}^i(\mathcal{U},\mathcal{F}) \cong H^i(X,\mathcal{F})$ es un isomorfismo $\forall i \geq 0$.

Dem: Para ① consideramos la resolución $\varepsilon: \mathcal{F} \to \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})$ del Lema anterior y $\mathcal{F} \to \mathcal{I}^\bullet$ una resolución inyectiva (y que permite calcular $H^i(X,\mathcal{F}) \overset{\text{def}}{=} R^i\Gamma(\mathcal{F}) = H^i(\Gamma(\mathcal{I}^\bullet))$!). Así, tenemos un diagrama conmutativo (ver §31, p. 107):

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}) \\ & \searrow & \downarrow \varphi \\ & & \mathcal{I}^\bullet \end{array}$$

con φ único módulo homotopía.

Luego, $\Gamma(\varphi): \Gamma(\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})) \overset{\text{def}}{=} C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to \Gamma(\mathcal{I}^\bullet)$ induce $H^i(C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})) \overset{\text{def}}{=} \check{H}^i(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to H^i(X,\mathcal{F})$ en cohomología, y que (tal como en §31) se prueba ser functorial en $\mathcal{F}$ ✓

Para ② procedemos por inducción en $i \in \mathbb{N}$: Para $i=0$ tenemos $\check{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \cong H^0(X,\mathcal{F}) \cong \Gamma(X,\mathcal{F})$ ✓
Además, ① y la Prop. anterior implican que si $0 \to \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I} \twoheadrightarrow \mathcal{G} \to 0$ es una sucesión exacta corta en $\underline{Sh}(X)$ con $\mathcal{F}$ tq $\mathcal{U}$ es $\mathcal{F}$-acíclico, entonces hay un diagrama conmutativo de sucesiones exactas largas de cohomología:

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots \to & \check{H}^i(\mathcal{U},\mathcal{F}) & \to & \check{H}^i(\mathcal{U},\mathcal{I}) & \to & \check{H}^i(\mathcal{U},\mathcal{G}) & \xrightarrow{\delta^i} & \check{H}^{i+1}(\mathcal{U},\mathcal{F}) & \to \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \cdots \to & H^i(X,\mathcal{F}) & \to & H^i(X,\mathcal{I}) & \to & H^i(X,\mathcal{G}) & \to & H^{i+1}(X,\mathcal{F}) & \to \cdots \end{array} \qquad (*)$$

Por otro lado, considerando $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}$ con $\mathcal{I}$ objeto inyectivo en $\underline{Sh}(X)$ y definiendo $\mathcal{G} := \mathcal{I}/\mathcal{F}$, tenemos que como el cubr. abierto $\mathcal{U}$ es $\mathcal{F}$-acíclico y $\mathcal{I}$ es Γ-acíclico (pues $\mathcal{I}$ inyectivo) entonces para cada $U_{i_0\cdots i_p} := U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}$ tanto $\mathcal{F}$ como $\mathcal{I}$ son Γ-acíclicos (ie, por definición: $H^i(U_{i_0\cdots i_p},\mathcal{F}) = H^i(U_{i_0\cdots i_p},\mathcal{I}) = 0$ $\forall i \geq 1$), y luego $\mathcal{G}$ también! (por la suc. exacta larga en cohomología), ie, el cubr. abierto $\mathcal{U}$ es $\mathcal{G}$-acíclico también. Finalmente, dado que $\mathcal{I}$ es flasque (y luego $\check{H}^i(\mathcal{U},\mathcal{I}) = 0$ $\forall i \geq 1$ por la Prop. anterior), $(*)$ se reduce a:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & \Gamma(X,\mathcal{F}) & \to & \Gamma(X,\mathcal{I}) & \to & \Gamma(X,\mathcal{G}) & \to & \check{H}^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) & \to 0 \\ & \| & & \| & & \| & & \downarrow & \\ 0 \to & \Gamma(X,\mathcal{F}) & \to & \Gamma(X,\mathcal{I}) & \to & \Gamma(X,\mathcal{G}) & \to & \underbrace{H^1(X,\mathcal{F})}_{\text{isomorfismo!}} & \to 0 \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccccc} 0 \to & \check{H}^i(\mathcal{U},\mathcal{G}) & \xrightarrow{\sim} & \check{H}^{i+1}(\mathcal{U},\mathcal{F}) & \to 0 \\ & \wr\downarrow & & \downarrow & \\ 0 \to & \underbrace{H^i(X,\mathcal{G})}_{\text{isom. (inducción)!}} & \xrightarrow{\sim} & H^{i+1}(X,\mathcal{F}) & \to 0 \end{array} \qquad \forall i \geq 1$$

$\Rightarrow \check{H}^i(\mathcal{U},\mathcal{F}) \cong H^i(X,\mathcal{F})$ para todo $i \geq 0$ ✓ ■

Consecuencia: Tal como adelantamos en §28, pág 97, el Teorema de Leray y el Teorema de Serre implican que si X es una variedad algebraica y $\mathcal{F}$ un haz quasi-coherente en X, entonces para todo cubr. finito $\mathcal{U}$ de X formado por abiertos afines se tiene $\check{H}^i(\mathcal{U},\mathcal{F}) \cong H^i(X,\mathcal{F})$ para todo $i \geq 0$! Así, todos los cálculos y resultados de §28 y §29 están justificados ✓

Importante: El Teorema de Leray tiene aplicaciones prácticas fuera de la geometría algebraica! Por ejemplo, permite calcular la cohomología singular de espacios topológicos "comunes y corrientes" usando cubrimientos abiertos $\mathbb{Z}$-acíclicos.

Ejercicio* Sean X e Y variedades algebraicas, y sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ haces quasi-coherentes (eg. fibrados vectoriales) en X e Y, resp. Probar la fórmula de Künneth:

$$H^i(X \times Y, \mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}) \cong \bigoplus_{p+q=i} H^p(X,\mathcal{F}) \otimes_k H^q(Y,\mathcal{G}) \quad \forall i \geq 0,$$

donde $\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G} := (pr_X^*\mathcal{F}) \otimes (pr_Y^*\mathcal{G}) \in \underline{Qcoh}(X \times Y)$. (cf. §21, pág 72).
[Indicación: Usar cohomología de Čech!]

§35. Imágenes directas superiores

Durante esta sección, denotamos por $f: X \to Y$ un morfismo regular entre variedades algebraicas y por $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo. Nuestro objetivo será probar (una versión de) el Teorema de coherencia de imágenes directas de Grauert-Grothendieck y aplicarlo al estudio de morfismos finitos.

<u>Recuerdo</u> (ver §32, p. 110): El functor imagen directa $f_*: \underline{\mathrm{Qcoh}}(X) \to \underline{\mathrm{Qcoh}}(Y)$, $\mathcal{F} \mapsto f_*\mathcal{F}$ es exacto a la izquierda, donde $f_*\mathcal{F}(V) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ para todo abierto $V \subseteq Y$. Sus functores derivados se llaman <u>imágenes directas superiores</u> y se denotan $R^i f_*(\mathcal{F})$. En part, $R^0 f_*(\mathcal{F}) \cong f_*\mathcal{F}$ y toda sucesión exacta corta $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ en $\underline{\mathrm{Qcoh}}(X)$ induce una sucesión exacta $0 \to f_*\mathcal{F} \to f_*\mathcal{G} \to f_*\mathcal{H} \to R^1 f_*\mathcal{F} \to R^1 f_*\mathcal{G} \to R^1 f_*\mathcal{H} \to R^2 f_*\mathcal{F} \to \dots$ en $\underline{\mathrm{Qcoh}}(Y)$.

<u>Lema</u>: $R^i f_*(\mathcal{F})$ es el haz asociado al prehaz $V \mapsto H^i(f^{-1}(V), \mathcal{F})$, con $V \subseteq Y$ abierto.

<u>Dem</u>: Sea $\mathcal{F} \to \mathcal{I}^\bullet$ resolución inyectiva, de donde calculamos $R^i f_*(\mathcal{F}) \overset{\text{def}}{=} H^i(f_*(\mathcal{I}^\bullet))$. Por otro lado, por def. de f_*, $H^i(f_*(\mathcal{I}^\bullet))$ es el haz asociado al prehaz $V \mapsto H^i(\Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{I}^\bullet))$, y donde este último es exactamente el prehaz $V \mapsto H^i(f^{-1}(V), \mathcal{F})$. ■

<u>Obs</u>: En particular, si $\mathcal{I}$ es un haz <u>flasque</u> en X (eg. $\mathcal{I}$ inyectivo), entonces $R^i f_*(\mathcal{I}) = 0$ para todo $i \geq 1$ (ver §33, pág 113), gracias al Lema anterior.

<u>Teorema de imágenes directas de Leray</u>: Sea $f: X \to Y$ un morfismo regular entre var. alg y sea $\mathcal{F}$ un haz quasi-coherente en X tal que $R^p f_*(\mathcal{F}) = 0$ para todo $p \geq 1$. Entonces,
$$H^i(Y, f_*\mathcal{F}) \cong H^i(X, \mathcal{F}) \quad \text{para todo } i \geq 0.$$

<u>Dem</u>: Sea $\mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{I}^\bullet$ resolución inyectiva dada por $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon^0} \mathcal{I}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{I}^1 \xrightarrow{d^1} \mathcal{I}^2 \to \dots$ complejo <u>exacto</u>. Entonces, $R^p f_*(\mathcal{F}) \overset{\text{def}}{=} H^p(f_*(\mathcal{I}^\bullet)) \overset{\text{Hip.}}{=} 0$ $\forall p \geq 1$, ie, $0 \to f_*\mathcal{F} \hookrightarrow f_*\mathcal{I}^0 \to f_*\mathcal{I}^1 \to \dots$ es un complejo <u>exacto</u> y por ende $f_*\mathcal{F} \to f_*\mathcal{I}^\bullet$ es una resolución de $f_*\mathcal{F}$ en $\underline{\mathrm{Qcoh}}(Y)$. Por otro lado, cada $\mathcal{I}^i$ es flasque y luego (por definición de f_*) cada $f_*\mathcal{I}^i$ también! Así, $f_*\mathcal{F} \to f_*\mathcal{I}^\bullet$ es una resolución <u>flasque</u> y el Teorema de de Rham (ver §33, p. 113) implica que:
$$H^i(Y, f_*\mathcal{F}) \underset{\text{dR}}{\cong} H^i(\Gamma(Y, f_*\mathcal{I}^\bullet)) \underset{\text{def de } f_*}{\cong} H^i(\Gamma(X, \mathcal{I}^\bullet)) \underset{\text{def de } H^i}{=} H^i(X, \mathcal{F}) \quad \text{para todo } i \geq 0 \checkmark \blacksquare$$

<u>Ejemplo</u>: Sup. que $f: X \to Y$ es un morfismo <u>finito</u>. Entonces, si $V \subseteq Y$ abierto <u>afín</u> se tiene que $f^{-1}(V)$ también! (ver §15, p. 50). Luego, el Teorema de Serre (ver §34, p. 114) implica que $H^p(f^{-1}(V), \mathcal{F}) = 0$ $\forall p \geq 1 \overset{\text{Lema}}{\Rightarrow} R^p f_*(\mathcal{F}) = 0$ $\forall p \geq 1$ y luego $H^i(Y, f_*\mathcal{F}) \cong H^i(X, \mathcal{F})$ $\forall i \geq 0$.
Esto último generaliza la Aplicación discutida en §29, pág 102 (donde X e Y eran proyectivos).

<u>Cultura general</u>: El Teorema anterior se generaliza usando la "sucesión espectral de Leray" (1943), que a su vez se generaliza a la "sucesión espectral de Grothendieck" ("Tôhoku paper", 1957).

<u>Recuerdo</u> (ver §28, p. 97): Si $f: X \to Y$ es un morfismo regular <u>arbitrario</u> entre variedades alg. y $\mathcal{F}$ es un haz quasi-coherente en X, entonces $f_*\mathcal{F}$ es quasi-coherente en Y pero <u>no</u> necesariamente coherente, incluso si $\mathcal{F}$ es coherente! (eg. $\mathbb{A}^n \xrightarrow{f} Y = \{pt\}$ y $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}$). Sin embargo, si f es un <u>morfismo finito</u> y $\mathcal{F}$ es <u>coherente</u>, entonces $f_*\mathcal{F}$ es <u>coherente</u> también ✓
Esto último es la versión geométrica del hecho que si $\varphi: B \to A$ es un morfismo de anillos noetherianos y M un A-módulo, entonces M es un B-módulo vía $b \cdot m := \varphi(b) \cdot m$, pero <u>no</u> es necesariamente finitamente generado! Sin embargo, si A es un B-módulo fin. gen. vía φ, entonces M lo es también (cf. §19, pág 65).

Veamos a continuación qué sucede para las imágenes directas superiores $R^i f_*(\mathcal{F})$:

<u>Lema</u>: Sea $f : X \to Y$ morfismo regular entre var. alg y $\mathcal{F}$ un haz quasi-coherente en X. Entonces:
① Si Y es <u>afín</u> con $B = \mathcal{O}(Y)$, entonces $R^i f_*(\mathcal{F})$ es el haz asociado al B-módulo $H^i(X, \mathcal{F})$.
② Las imágenes directas superiores $R^i f_*(\mathcal{F})$ son haces quasi-coherentes.

<u>Dem</u>: Para ①, recordamos que $\Gamma : \underline{\mathrm{Qcoh}}(Y) \to B\text{-}\underline{\mathrm{Mod}}$, $\mathcal{G} \mapsto \Gamma(Y, \mathcal{G})$ es <u>exacto</u> pues Y es afín (ver §28, pág 97). En part (ver Lema en §30, p. 104), para todo complejo $\mathcal{K}^\bullet$ en $\underline{\mathrm{Qcoh}}(Y)$ se tiene que $H^i(\Gamma(\mathcal{K}^\bullet)) \cong \Gamma(H^i(\mathcal{K}^\bullet))$ $\forall i$. Luego, si $\mathcal{F} \to \mathcal{I}^\bullet$ es una resolución inyectiva en $\underline{\mathrm{Qcoh}}(X)$ y consideramos el complejo $\mathcal{K}^\bullet = f_* \mathcal{I}^\bullet$ que calcula $R^i f_*(\mathcal{F}) \overset{\mathrm{def}}{\cong} H^i(f_* \mathcal{I}^\bullet) = H^i(\mathcal{K}^\bullet)$
$\Rightarrow \Gamma(H^i(\mathcal{K}^\bullet)) \overset{\mathrm{def}}{\cong} \Gamma(Y, R^i f_*(\mathcal{F})) \underset{\text{Lema}}{\cong} H^i(\Gamma(Y, f_* \mathcal{I}^\bullet)) \underset{\text{def de } f_*}{=} H^i(\Gamma(X, \mathcal{I}^\bullet)) = H^i(X, \mathcal{F})$, ie, $R^i f_*(\mathcal{F}) = \widetilde{M}$ con $M = H^i(X, \mathcal{F})$ ✓ Finalmente, ② es una afirmación local en Y que se deduce de ① ✓ (o del hecho que para $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ se tiene $R^i F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ también!). ■

Para estudiar el problema de coherencia de imágenes directas superiores, necesitaremos:

<u>Def</u>: Un morfismo regular $f : X \to Y$ entre var. alg. es un <u>morfismo proyectivo</u> si se factoriza como:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & Y \times \mathbb{P}^n \arrow[d, "pr_Y"] \\ & Y \end{tikzcd} \qquad \text{para cierto } n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$$

y donde $i : X \hookrightarrow Y \times \mathbb{P}^n$ encajamiento cerrado.

<u>Ejemplo</u>: ① Si X es una var. alg. <u>proyectiva</u> y $f : X \to Y$ regular (con Y arbitraria) $\Rightarrow f$ es <u>proyectivo</u>. En efecto, basta considerar $X \overset{i}{\hookrightarrow} \Gamma(f) \xrightarrow{pr_Y} Y$ con $\Gamma(f) \subseteq X \times Y \subseteq \mathbb{P}^n \times Y$ el grafo de f (cf. §11, pág 37) ✓
② $\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $f : X \to Y$ morfismo proyectivo y $g : Z \to Y$ morfismo regular arbitrario. Sea $X \times_Y Z := \{(x,z) \in X \times Z \text{ tq } f(x) = g(z) \text{ en } Y\}$ y sea $f_Z : X \times_Y Z \to Z$, $(x,z) \mapsto z$ (<u>producto fibrado</u>). Probar que f_Z es un morfismo proyectivo.
③ Si $f : X \to Y$ morfismo proyectivo y $Z \subseteq X$ cerrado, entonces $f(Z) \subseteq Y$ es cerrado ✓

<u>Teorema de Grauert-Grothendieck</u>: Sea $f : X \to Y$ un morfismo <u>proyectivo</u> y $\mathcal{F}$ un haz <u>coherente</u> en X. Entonces, los $R^i f_*(\mathcal{F})$ son haces coherentes en Y para todo $i \geq 0$.

<u>Dem</u>: Consideramos la factorización $f : X \overset{i}{\hookrightarrow} Y \times \mathbb{P}^n \xrightarrow{pr_Y} Y$ y recordamos que $R^i f_*(\mathcal{F})$ es el haz asociado al prehaz $V \mapsto H^i(f^{-1}(V), \mathcal{F}) \cong H^i(pr_Y^{-1}(V), i_* \mathcal{F})$. Luego, podemos suponer $X = Y \times \mathbb{P}^n$ y $f = pr_Y$. Además, ser coherente es una propiedad local y por ende basta considerar Y var. alg. <u>afín</u> con $B = \mathcal{O}(Y)$. En part, el Lema anterior nos dice que $R^i f_*(\mathcal{F}) = \widetilde{M}$ con $M = H^i(X, \mathcal{F})$, por lo que basta verificar que $H^i(X, \mathcal{F})$ es finitamente generado como B-módulo:
La misma prueba del Lema en §29, pág 100 (usado para probar el Teo. de anulación de Serre) nos dice que $\exists r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ y $m \gg 0$ tq $\mathcal{O}_X(-m)^{\oplus r} \twoheadrightarrow \mathcal{F}$ sobreyectivo, y así $0 \to \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{O}_X(-m)^{\oplus r} \twoheadrightarrow \mathcal{F} \to 0$ sucesión exacta en $X = Y \times \mathbb{P}^n$. La conclusión se obtiene por inducción descendente en $i \in \mathbb{N}$:

$$\cdots \to H^i(X, \mathcal{G}) \to H^i(X, \mathcal{O}_X(-m))^{\oplus r} \to H^i(X, \mathcal{F}) \to H^{i+1}(X, \mathcal{G}) \cong \underbrace{\Gamma(Y, R^{i+1} f_* \mathcal{G})}_{\text{fin. gen (inducción!)}} \to \cdots$$

y donde $H^i(X, \mathcal{O}_X(-m))$ es finitamente generado! En efecto, para todo $d \in \mathbb{Z}$ calculamos $H^i(X, \mathcal{O}_X(d))$ usando cohomología de Čech resp. al cubr. <u>afín</u> $V_i := Y \times \mathcal{U}_i \simeq Y \times \mathbb{A}^n$ $(i = 0, .., n)$ de $X = Y \times \mathbb{P}^n$, de donde obtenemos (notando que $C^\bullet(\mathcal{V}, \mathcal{O}_X(d)) \cong B \otimes_k C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$!):

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(d)) \underset{\text{Leray}}{\cong} \check{H}^i(\mathcal{V}, \mathcal{O}_X(d)) \cong B \otimes_k \check{H}^i(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \underset{\text{Leray}}{\cong} B \otimes \underbrace{H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))}_{\text{dim. finita!}}$$

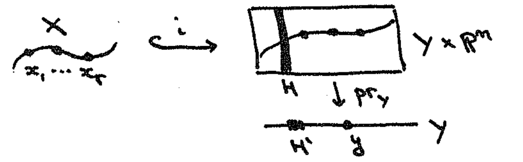
$\Rightarrow H^i(X, \mathcal{F})$ fin. gen, ie, $R^i f_*(\mathcal{F})$ es coherente ✓ ■

Una aplicación de lo anterior, son los siguientes criterios (muy prácticos) para verificar si un morfismo es finito:

Teorema: Sea $f : X \to Y$ un morfismo <u>proyectivo</u> tal que para todo $y \in Y$ la fibra $f^{-1}(y)$ es un <u>conjunto finito</u> (eg. f inyectivo). Entonces, f es un morfismo finito.

Dem: El resultado es local en Y, que por ende podemos suponer <u>afín</u>. Notar que a priori <u>no</u> sabemos si X es afín (a posteriori lo es): Por Grauert-Grothendieck, $f_* \mathcal{O}_X$ es un haz <u>coherente</u> en Y, y $f_* \mathcal{O}_X = \widetilde{M}$ con $M = H^0(X, \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}(X)$. Luego, $\mathcal{O}(X)$ es un $\mathcal{O}(Y)$-módulo finitamente generado vía $f^* : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ (y esto implicaría que f es un morfismo finito si X fuese afín!).

La idea será cubrir Y por abiertos afines $V \subseteq Y$ tal que $f^{-1}(V)$ sea afín (y donde el argumento anterior nos permite concluir ✓): sea $y \in Y$ en la imagen de f, con fibra $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_r\}$, y sea $f : X \overset{i}{\hookrightarrow} Y \times \mathbb{P}^n \xrightarrow{pr_Y} Y$ factorización del morfismo proyectivo f.



Sea $H \subseteq Y \times \mathbb{P}^n$ un hiperplano tal que $i(x_1), \dots, i(x_r) \notin H$. Notamos que $H \cap i(X)$ es cerrado en $Y \times \mathbb{P}^n$ (pues i es un encajamiento cerrado) y que $H' = pr_Y(H \cap i(X))$ es cerrado en Y (pues f morfismo proyectivo!).

Sea $V := Y \setminus H'$ vecindad abierta afín de $y \in Y$, con $f^{-1}(V) \cong pr_Y^{-1}(V) \cap i(X)$ cerrado en $(Y \times \mathbb{P}^n) \setminus H \cong Y \times \mathbb{A}^n$ variedad afín y por ende $f^{-1}(V)$ afín ✓ ■

Corolario: Sea C una curva algebraica proyectiva irreducible y $f : C \to X$ un morfismo regular no-constante, entonces f es un morfismo <u>finito</u>. En part, todo morfismo regular no-constante entre curvas alg. proyectivas irreducibles es finito.

Dem: Dado que C es proyectiva, f es un morfismo proyectivo. Luego, basta notar que las fibras son conjuntos finitos: de lo contrario $\exists x_0 \in X$ tal que $\dim(f^{-1}(x_0)) \geq 1$ y luego (dado que C es una <u>curva</u> irreducible) $f^{-1}(x_0) = C$, ie, $f(C) = \{x_0\}$ y f constante ↯ ■

Importante (y extremadamente útil!): Sea $f : X \to Y$ un morfismo regular entre variedades alg. <u>proyectivas irreducibles</u> y sea $C \subseteq X$ curva irreducible. Definimos

$$d = d(C, f) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(C) = \{pt\} \\ \deg(f|_C : C \to f(C)) & \text{si } f(C) \subseteq Y \text{ curva irred.} \end{cases}$$

donde $\deg(f|_C) := [k(C) : k(f(C))]$ cuenta las fibras de $f|_C$ con multiplicidad (ver §23, p. 83). La <u>fórmula de proyección</u> (cf. §29, p. 102), que se prueba usando métodos cohomológicos (ver eg. O. Debarre "Higher dimensional Alg. Geom.", pág 9), afirma que para todo $D \in \mathrm{Div}(Y)$ divisor de Cartier en Y, se tiene:

$$f^* D \cdot C = d\,(D \cdot \pi(C)).$$

Corolario: Sea X una variedad alg. <u>proyectiva</u> irreducible y sea $L \in \mathrm{Pic}(X)$ fibrado en rectas sin puntos de base, ie, $\varphi_L : X \to \mathbb{P}(H^0(X, L)^\vee) \cong \mathbb{P}^n$ es un morfismo regular. Entonces, L es amplio si y sólo si las fibras $\varphi_L^{-1}(y)$ de φ_L son conjuntos finitos.

Dem: En este caso, φ_L es un morfismo proyectivo (pues X proyectiva) y luego si las fibras son conj. finitos, entonces φ_L es un morfismo finito. Ya vimos en §29 (pág 102) que si φ_L finito y $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ amplio, entonces $\varphi_L^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \cong L$ es amplio ✓ Por otro lado, si $L \cong \mathcal{O}_X(D)$ es amplio entonces $D \cdot C > 0$ para toda curva irred. $C \subseteq X$ (ver §29, p. 102 y §23, p. 84). Luego, si por contradicción $\exists y_0 \in \mathbb{P}^n$ tq $\dim(\varphi_L^{-1}(y_0)) \geq 1$, basta considerar $C \subseteq \varphi_L^{-1}(y_0)$ curva irreducible que cumple $\varphi_L(C) = \{y_0\}$ y luego, por la fórmula de proyección se tendría:

$$D \cdot C = \varphi_L^* H \cdot C = d\,(H \cdot \varphi_L(C)) = 0,$$ donde $H \subseteq \mathbb{P}^n$ hiperplano: contradicción! ■

§36. Dualidad de Grothendieck y dualidad de Serre

En 1955, J.-P. Serre publica su artículo "Un teorema de dualidad" donde, usando técnicas L^2 para estudiar formas diferenciales armónicas (teoría de Hodge), prueba que si E es un fibrado vectorial (holomorfo) en una variedad compacta compleja, entonces:

$$H^i(X,E) \cong H^{n-i}(X, E^\vee \otimes \omega_X)^\vee \quad , \text{ donde } n = \dim(X) \text{ y } \omega_X = \det(\Omega^1_X).$$

El 15 de diciembre de 1955, Grothendieck envía una carta a Serre:

"Pensando un poco sobre tu teorema de dualidad, me di cuenta que su generalización es más o menos evidente y que se encuentra implícitamente en tu artículo (...). Estoy muy convencido, bastardo, que las secciones §3 y §4 del Cap.3 se pueden hacer sin ningún cálculo".

En 1957, Grothendieck da un seminario Bourbaki titulado "Teoremas de dualidad para haces algebraicos coherentes", donde demuestra (una versión más general de):

Teorema de dualidad de Grothendieck: sea X una variedad alg. proyectiva suave e irreducible de $\dim(X)=n$, y sea $\omega_X = \det(\Omega^1_X)$ su fibrado en rectas canónico. Entonces:

① $\dim_k H^n(X,\omega_X) = 1$. En part, toda aplicación k-lineal no-nula $t: H^n(X,\omega_X) \xrightarrow{\sim} k$ es un isomorfismo. Decimos que dicho t es un morfismo de traza (o simplemente, una traza).

② Sea $\mathcal{F}$ un haz coherente en X. Para toda traza $t: H^n(X,\omega_X) \xrightarrow{\sim} k$ asociamos un morfismo de funtores contravariantes (!) en $\mathcal{F}$ (transf. natural):

$$D: \mathrm{Hom}_X(\mathcal{F},\omega_X) \longrightarrow H^n(X,\mathcal{F})^\vee \ , \ f \longmapsto D(f) := t\circ H^n(f),$$

donde $H^n(f): H^n(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^n(X,\omega_X)$ es el morfismo en cohomología inducido por $f:\mathcal{F}\to\omega_X$. Entonces, $D: \mathrm{Hom}_X(\cdot,\omega_X) \xrightarrow{\sim} H^n(X,\cdot)^\vee$ es un isomorfismo.

③ El isomorfismo D se extiende a un isomorfismo functorial en $\mathcal{F}$ (transf. natural):

$$D: \mathrm{Ext}^i(\mathcal{F},\omega_X) \xrightarrow{\sim} H^{n-i}(X,\mathcal{F})^\vee \quad \text{para todo } i \geq 0.$$

En particular, la elección de una traza $t: H^n(X,\omega_X) \xrightarrow{\sim} k$ determina un emparejamiento perfecto $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F},\omega_X) \times H^{n-i}(X,\mathcal{F}) \longrightarrow k$.

Recuerdo (Ext y $\mathcal{E}xt$): Sea X una variedad algebraica y $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo. Entonces, el funtor $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F},\cdot): \mathcal{O}_X\text{-}\underline{\mathrm{Mod}} \to \underline{\mathrm{Ab}}$ (resp. $\mathcal{H}om(\mathcal{F},\cdot): \mathcal{O}_X\text{-}\underline{\mathrm{Mod}} \to \mathcal{O}_X\text{-}\underline{\mathrm{Mod}}$) dado por $\mathcal{G} \mapsto \mathrm{Hom}_X(\mathcal{F},\mathcal{G})$ (resp. $\mathcal{G}\mapsto \mathcal{H}om(\mathcal{F},\mathcal{G})$) es exacto por la izquierda. Los funtores derivados se denotan $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F},\mathcal{G})$ y $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F},\mathcal{G})$, respectivamente (ver §32, pág 109).

Además, si $\mathcal{E}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo localmente libre de rango r (ie, el haz de secciones de un fibrado vectorial $E\to X$ de rango r), entonces $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{E},\mathcal{F}) \cong H^i(X,\mathcal{E}^\vee\otimes\mathcal{F})$ $\forall i\geq 0$ (ver §32, p.110).

De este modo, la dualidad de Grothendieck implica:

Teorema de dualidad de Serre: sea X una variedad alg. proyectiva suave e irreducible de $\dim(X)=n$, y sea $\omega_X=\det(\Omega^1_X)$. Entonces para todo fibrado vectorial $E\to X$, la elección de una traza $t: H^n(X,\omega_X)\xrightarrow{\sim} k$ determina un emparejamiento perfecto

$$H^i(X,E)\times H^{n-i}(X,E^\vee\otimes\omega_X) \longrightarrow k \quad \text{para todo } i\geq 0.$$

En particular, $H^i(X,E)\cong H^{n-i}(X,E^\vee\otimes\omega_X)^\vee$.

Dem: Aplicar dualidad de Grothendieck y usar que $H^{n-i}(X,E^\vee\otimes\omega_X) \cong \mathrm{Ext}^{n-i}(\mathcal{E},\omega_X)$ ✓ ■

Así, "basta" probar la dualidad de Grothendieck! En esta sección, nos contentaremos con dar las ideas generales de la demostración. Más detalles pueden encontrarse en el apunte de R. Vakil (Ch. 30) y en el libro de Hartshorne (Ch. III.7).

Comenzamos por describir la estrategia de la prueba. Esto nos permitirá identificar los pasos "simples" de aquellos que requieren más trabajo y/o nuevas herramientas:

Estrategia de demostración

$\boxed{\text{Paso 1}}$ Caso $X=\mathbb{P}^n$, donde $\omega_{\mathbb{P}^n}\cong\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)$: ya calculamos (ver §29, p.99) que $H^n(\mathbb{P}^n,\omega_{\mathbb{P}^n})\cong k$, ie, ① OK para $\mathbb{P}^n$ ✓ En part, escogiendo una traza $t: H^n(\mathbb{P}^n,\omega_{\mathbb{P}^n})\xrightarrow{\sim}k$, obtenemos (de manera functorial) un morfismo $D:\mathrm{Hom}(\mathcal{F},\omega_{\mathbb{P}^n})\to H^n(\mathbb{P}^n,\mathcal{F})^\vee$ para todo haz coherente $\mathcal{F}$ en $\mathbb{P}^n$. ∎

$\boxed{\text{Paso 2}}$ D es un isomorfismo: Lo más importante es notar que $\mathrm{Hom}(\cdot,\omega_{\mathbb{P}^n})$ y $H^n(\mathbb{P}^n,\cdot)^\vee$ son functores contravariantes (!) exactos por la izquierda, ie, si $(0\to)\mathcal{F}\to\mathcal{G}\to\mathcal{H}\to 0$ sucesión exacta de haces coherentes en $\mathbb{P}^n$, entonces las sucesiones

$$0\to\mathrm{Hom}(\mathcal{H},\omega_{\mathbb{P}^n})\to\mathrm{Hom}(\mathcal{G},\omega_{\mathbb{P}^n})\to\mathrm{Hom}(\mathcal{F},\omega_{\mathbb{P}^n}) \quad \text{y} \quad \underset{\uparrow}{0}\to H^n(\mathbb{P}^n,\mathcal{H})^\vee\to H^n(\mathbb{P}^n,\mathcal{G})^\vee\to H^n(\mathbb{P}^n,\mathcal{F})^\vee \qquad (*)$$

son exactas. anulación de Grothendieck!

Por otro lado, sabemos (ver §29, p.100) que para todo haz coherente $\mathcal{F}$ en $\mathbb{P}^n$ existe $r\in\mathbb{N}^{\geq 1}$ y $m\gg 0$ tq $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m)^{\oplus r}\twoheadrightarrow\mathcal{F}$ sobreyectivo. Así, (*) nos permite escribir

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m),\omega_{\mathbb{P}^n})^{\oplus r} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathcal{F},\omega_{\mathbb{P}^n}) \\ \| & & \downarrow D & & D\downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^n(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m))^{\vee\oplus r} & \longrightarrow & H^n(\mathbb{P}^n,\mathcal{F})^\vee \end{array}$$

y reducimos a verificar que $D:\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m),\omega_{\mathbb{P}^n})\cong H^0(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)\otimes\omega_{\mathbb{P}^n})\xrightarrow{\sim}H^n(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m))^\vee$ es un isomorfismo, ie, $\exists$ emparejamiento perfecto para todo m

$$H^0(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)\otimes\omega_{\mathbb{P}^n})\times H^n(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m))\to H^n(\mathbb{P}^n,\omega_{\mathbb{P}^n})\cong k$$

Esto último ya lo verificamos usando cohomología de Čech (ver §29, p.99)! Así, ② OK para $\mathbb{P}^n$ ✓ ∎

$\boxed{\text{Paso 3}}$ Extender $D:\mathrm{Hom}(\mathcal{F},\omega_{\mathbb{P}^n})\xrightarrow{\sim}H^n(\mathbb{P}^n,\mathcal{F})^\vee$ a un isomorfismo $D:\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F},\omega_{\mathbb{P}^n})\xrightarrow{\sim}H^{n-i}(\mathbb{P}^n,\mathcal{F})^\vee$ para todo $i\in\{0,1,\dots,n\}$: Aquí necesitamos nuevas herramientas! Los "δ-functores" (también llamados "functores cohomológicos") permiten probar ③ para $\mathbb{P}^n$.

$\boxed{\text{Paso 4}}$ Caso general $X\overset{j}{\hookrightarrow}Y$, donde $Y=\mathbb{P}^{n+r}$ (ie, $\mathrm{codim}_Y(X)=r$): La primera observación es que para todo haz coherente $\mathcal{F}$ en X tenemos (ver §28, p.98) que $H^{n-i}(X,\mathcal{F})\cong H^{n-i}(Y,j_*\mathcal{F})$. Así, ya probada la dualidad de Grothendieck en $Y=\mathbb{P}^{n+r}$, tenemos que:

$$H^{n-i}(X,\mathcal{F})^\vee\cong H^{n-i}(Y,j_*\mathcal{F})^\vee\underset{\text{dualidad}}{\cong}\mathrm{Ext}^{n+r-(n-i)}(j_*\mathcal{F},\omega_Y)=\mathrm{Ext}^{i+r}(j_*\mathcal{F},\omega_Y)$$

Así, nos reducimos a probar el isomorfismo $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F},\omega_X)\cong\mathrm{Ext}^{i+r}(j_*\mathcal{F},\omega_Y)$!
Esto último es la parte más delicada de la demostración, y requiere relacionar los haces Ext con los grupos Ext: daremos las ideas generales de cómo probarlo.

Obs: una vez probado que $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F},\omega_X)\cong H^{n-i}(X,\mathcal{F})^\vee$ para todo $i\geq 0$ notamos que:
a) $i=0$ implica que $\mathrm{Hom}(\mathcal{F},\omega_X)\cong H^n(X,\mathcal{F})^\vee$, ie, ② OK ✓
b) $i=n$ y $\mathcal{F}=\omega_X$ implica que $H^n(X,\omega_X)\cong\mathrm{Hom}(\omega_X,\omega_X)^\vee\cong H^0(X,\omega_X^\vee\otimes\omega_X)^\vee\cong H^0(X,\mathcal{O}_X)^\vee\cong k$, ie, ① OK ✓

Comencemos por completar el Paso 3 de la demostración:

Def: Un δ-functor entre dos categorías abelianas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ consiste una colección $\{T^i:\mathcal{C}\to\mathcal{D}\}_{i\in\mathbb{N}}$ de functores contravariantes junto con morfismos de conexión $\delta^i:T^i(A)\to T^{i+1}(C)$ para toda sucesión exacta corta $0\to A\to B\to C\to 0$ en $\mathcal{C}$, verificando que:

① Para toda sucesión exacta corta $0\to A\to B\to C\to 0$ en $\mathcal{C}$, la sucesión en $\mathcal{D}$ dada por

$$\cdots\to T^i(C)\to T^i(B)\to T^i(A)\xrightarrow{\delta^i}T^{i+1}(C)\to T^{i+1}(B)\to T^{i+1}(A)\to\cdots \text{ es exacta.}$$

② Para todo morfismo de sucesiones exactas cortas en $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \to & B & \to & C & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & A' & \to & B' & \to & C' & \to & 0 \end{array}$$

el diagrama
$$\begin{array}{ccc} T^i(A') & \xrightarrow{\delta^i} & T^{i+1}(C') \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^i(A) & \xrightarrow{\delta^i} & T^{i+1}(C) \end{array}$$
es conmutativo.

<u>Ejemplo principal</u>: Sea X variedad alg. proyectiva suave e irreducible de $\dim(X) = n$, y sea $\omega_X = \det(\Omega^1_X)$ fibrado en rectas canónico. Entonces, los functores contravariantes

$$\{\mathcal{F} \longmapsto \operatorname{Ext}^i(\mathcal{F}, \omega_X)\}_{i\in\mathbb{N}} \quad \text{y} \quad \{\mathcal{F} \longmapsto H^{n-i}(X,\mathcal{F})^\vee\}_{i\in\mathbb{N}}$$

desde la categoría de $\mathcal{O}_X$-módulos a la categoría de k-ev, son δ-functores.

<u>Def</u>: Sea $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un functor <u>contravariante</u> entre dos categorías abelianas. Decimos que F es <u>borrable</u> ("effaçable") si para todo objeto A de $\mathcal{C}$ existe un morfismo sobreyectivo $P \overset{u}{\twoheadrightarrow} A$ tal que $F(u): F(A) \to F(P)$ sea nulo.

<u>Ejemplo principal</u>: En $\mathbb{P}^n$, los functores $\mathcal{F} \mapsto \operatorname{Ext}^i(\mathcal{F}, \omega_{\mathbb{P}^n})$ y $\mathcal{F} \mapsto H^{n-i}(X, \mathcal{F})^\vee$ son borrables para todo $i \geqslant 1$ y todo haz <u>coherente</u> $\mathcal{F}$ en $\mathbb{P}^n$. En efecto, escribiendo $\mathcal{P} := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m)^{\oplus r} \overset{u}{\twoheadrightarrow} \mathcal{F}$ para $r \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$ y $m \gg 0$, tenemos que basta probar que

$$\operatorname{Ext}^i(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m), \omega_{\mathbb{P}^n}) \cong H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m) \otimes \omega_{\mathbb{P}^n}) = 0 \quad \text{y} \quad H^{n-i}(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m)) = 0 \quad \text{para } i \geqslant 1.$$

Esto se deduce directamente del cálculo de $h^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ en §29, pág 99. ✓

<u>Teorema</u>: Sean S y T dos δ-functores entre categorías abelianas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$. Supongamos que para todo $i \geqslant 1$ el functor $S^i: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es <u>borrable</u>. Entonces, todo morfismo functorial $f^0: S^0 \to T^0$ se extiende en un único morfismo functorial $f^i: S^i \to T^i$ compatible con los morfismos de conexión.

<u>Dem</u>: Se construye $f^i: S^i \to T^i$ por inducción en $i \in \mathbb{N}$: sea A un objeto de $\mathcal{C}$ y $P \overset{u}{\twoheadrightarrow} A$ sobreyectivo tal que $S^{i+1}(u) = 0$. Sea $K = \ker(u)$ y consideramos $0 \to K \overset{j}{\hookrightarrow} P \overset{u}{\twoheadrightarrow} A \to 0$ sucesión exacta corta en $\mathcal{C}$. Ella induce

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} S^i(A) \arrow[r, "S^i(u)"] \arrow[d, "f^i_A"'] & S^i(P) \arrow[r, "S^i(j)"] \arrow[d, "f^i_P"'] & S^i(K) \arrow[r, two heads, "\delta^i_S"] \arrow[d, "f^i_K"'] & S^{i+1}(A) \arrow[r, "\text{pues } S^{i+1}(u)=0"] \arrow[d, dashed, "\exists ?\, f^{i+1}_A"] & 0 \\ T^i(A) \arrow[r, "T^i(u)"] & T^i(P) \arrow[r, "T^i(j)"] & T^i(K) \arrow[r, "\delta^i_T"] & T^{i+1}(A) \end{tikzcd}$$

donde las filas son <u>exactas</u>. Gracias al Teorema de Freyd-Mitchell (ver §31, p. 106) podemos construir $f^{i+1}_A: S^{i+1}(A) \to T^{i+1}(A)$ de manera única usando "cacería de diagramas": si $x \in S^{i+1}(A)$ consideramos $y \in S^i(K)$ tq $\delta^i_S(y) = x$ y definimos $f^{i+1}_A(x) := (\delta^i_T \circ f^i_K)(y) \in T^{i+1}(A)$. Para ver que está bien definido consideramos $y' \in S^i(K)$ tq $\delta^i_S(y') = x$ (y luego $y - y' \in \ker(\delta^i_S)$) para luego verificar que $(\delta^i_T \circ f^i_K)(y) = (\delta^i_T \circ f^i_K)(y')$ (y luego $y - y' \in \ker(\delta^i_T \circ f^i_K)$). La inclusión $\ker(\delta^i_S) \subseteq \ker(\delta^i_T \circ f^i_K)$, así como el hecho que f^{i+1} no depende de P y que es functorial en A, se deducen de (*) por cacería de diagramas (cf. Lang "Algebra", pág 801). ■

<u>Corolario</u>: Sean S y T dos δ-functores entre categorías abelianas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$. Supongamos que los functores S^i y T^i son <u>borrables</u> $\forall i \geqslant 1$. Entonces, todo isomorfismo functorial $D^0: S^0 \xrightarrow{\sim} T^0$ se extiende a un único isomorfismo functorial $D^i: S^i \xrightarrow{\sim} T^i$ $\forall i \geqslant 0$ compatible con los morfismos de conexión. ■

<u>Consecuencia</u>: El isomorfismo $D: \operatorname{Hom}(\cdot, \omega_{\mathbb{P}^n}) \xrightarrow{\sim} H^n(\mathbb{P}^n, \cdot)^\vee$ del Paso 2 se extiende de manera única a isomorfismos functoriales $D: \operatorname{Ext}^i(\cdot, \omega_{\mathbb{P}^n}) \xrightarrow{\sim} H^{n-i}(\mathbb{P}^n, \cdot)^\vee$ $\forall i \geqslant 0$.
Así, ③ OK para $\mathbb{P}^n$ y con ello concluimos el Paso 3. ■

Para probar el Paso 4 (y concluir la demostración) nos resta probar que si X e Y son var. alg. proyectivas suaves e irreducibles con $\dim(X) = n$, $\dim(Y) = n+r$ y $j: X \hookrightarrow Y$ es un encajamiento cerrado, entonces:

$$\operatorname{Ext}^i(\mathcal{F}, \omega_X) \cong \operatorname{Ext}^{i+r}(j_*\mathcal{F}, \omega_Y) \quad \text{para todo } i \geqslant 0 \qquad \text{(DG)}$$

y para todo haz coherente $\mathcal{F}$ en X.

Recordemos que ω_X y ω_Y están relacionados mediante la <u>fórmula de adjunción</u> (ver §26, p. 90):

$$\omega_X \cong \omega_Y|_X \otimes \det(\mathcal{N}_{X/Y}) \overset{\text{def}}{=} j^*\omega_Y \otimes \det(\mathcal{N}_{X/Y}),$$

donde $N_{X/Y}$ es el fibrado normal de X en Y, de $\mathrm{rg}(N_{X/Y}) = r$. Más aún, si $X = V(s)$ para cierta sección $s \in H^0(Y,E)\setminus\{0\}$ de $E \to Y$ fibrado vectorial de $\mathrm{rg}(E) = r$, entonces $N_{X/Y} \cong E|_X$ (ver §25, pág 89) y luego $\omega_X \cong (\omega_Y \otimes \det(E))|_X \overset{\text{def}}{=} j^*(\omega_Y \otimes \det(E))$ en este caso.

Por otro lado, la <u>fórmula de proyección</u> (ver §29, p.100) afirma que si $\mathcal{E}$ es localmente libre en Y y si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo, entonces $\mathcal{E} \otimes j_*\mathcal{F} \cong j_*(j^*\mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$ en Y. Al combinarlas nos da: $j_*\omega_X \cong j_*(j^*\omega_Y \otimes \det(N_{X/Y})) \cong \omega_Y \otimes j_*\det(N_{X/Y})$ o bien $j_*\omega_X \cong \omega_Y \otimes \det(E)$ si $X = V(s)$.

Ejercicio útil Sea $\mathcal{E}$ loc. libre en Y y sean $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ dos $\mathcal{O}_Y$-módulos. Probar que $\forall i \geq 0$:

$$\mathcal{E}xt^i(\mathcal{G} \otimes \mathcal{E}^\vee, \mathcal{H}) \cong \mathcal{E}xt^i(\mathcal{G}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{H}) \cong \mathcal{E}xt^i(\mathcal{G}, \mathcal{H}) \otimes \mathcal{E}.$$

[<u>Indicación</u>: Las ideas de §32, p.110 (usando las propiedades de $\mathcal{H}om$ y $\otimes$) permiten concluir ✓]

En part, el Ejercicio asegura que $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{G}, \mathcal{O}_Y) \otimes \omega_Y \cong \mathcal{E}xt^i(\mathcal{G}, \omega_Y)$ $\forall i \geq 0$.

[<u>Hecho clave</u> (!):

$$\mathcal{E}xt^i(j_*\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y) \cong \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq r \\ j_*\det(N_{X/Y}) & \text{si } i = r \end{cases} \underset{\text{Adjunción}}{\overset{\text{Ejercicio}}{\Longrightarrow}} \mathcal{E}xt^i(j_*\mathcal{O}_X, \omega_Y) \cong \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq r \\ j_*\omega_X & \text{si } i = r \end{cases}$$]

¿Cómo el <u>Hecho clave</u> permite probar que $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \omega_X) \cong \mathrm{Ext}^{i+r}(j_*\mathcal{F}, \omega_Y)$ y así concluir?

Recordemos que (por definición!) para calcular Ext necesitamos de resoluciones inyectivas $\omega_X \to \mathcal{I}^\bullet$ en $\mathcal{O}_X$-<u>Mod</u> y $\omega_Y \to \mathcal{R}^\bullet$ en $\mathcal{O}_Y$-<u>Mod</u>, de donde se calcula:

$$\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \omega_X) \overset{\text{def}}{=} H^i(\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{I}^\bullet)) \quad \text{y} \quad \mathrm{Ext}^{i+r}(j_*\mathcal{F}, \omega_Y) \overset{\text{def}}{=} H^{i+r}(\mathrm{Hom}_Y(j_*\mathcal{F}, \mathcal{R}^\bullet))$$

La idea será construir $\mathcal{I}^\bullet$ usando $\mathcal{R}^\bullet$ y poder relacionarlas mediante el <u>Hecho clave</u>.

<u>Recuerdo</u>: El incrustamiento cerrado $j: X \hookrightarrow Y$ induce una sucesión exacta de $\mathcal{O}_Y$-módulos

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_X \hookrightarrow \mathcal{O}_Y \twoheadrightarrow j_*\mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

que permite pensar $j_*\mathcal{O}_X$ como secciones locales de $\mathcal{O}_Y$ que son anuladas por $\mathcal{I}_X$. De manera más general, j_* identifica $\mathcal{O}_X$-módulos con $\mathcal{O}_Y$-módulos que se anulan por $\mathcal{I}_X$.

<u>Prop</u>: Sea $\omega_Y \to \mathcal{R}^\bullet$ una resolución inyectiva en $\mathcal{O}_Y$-<u>Mod</u> y sea $\mathcal{R}^\bullet_X \hookrightarrow \mathcal{R}^\bullet$ el subcomplejo dado por los subhaces $\mathcal{R}^i_X \subseteq \mathcal{R}^i$ de secciones locales de $\mathcal{R}^i$ que se anulan por $\mathcal{I}_X$. Entonces, $\mathcal{I}^\bullet := j^*\mathcal{R}^\bullet_X$ es un complejo <u>inyectivo</u> en $\mathcal{O}_X$-<u>Mod</u>, que cumple:

$$H^i(\mathcal{I}^\bullet) \cong \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq r \\ \omega_X & \text{si } i = r \end{cases}$$

<u>Dem</u>: Por definición de $\mathcal{I}^\bullet$ y de j_*, tenemos que $\mathrm{Hom}_Y(j_*\mathcal{F}, \mathcal{R}^i) \cong \mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{I}^i)$ para todo $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathcal{F}$. Notamos por un lado que $\mathcal{F} \mapsto j_*\mathcal{F}$ es un functor <u>exacto</u> (pues $j: X \hookrightarrow Y$ es un morfismo finito y luego $R^p j_* = 0$ $\forall p \geq 1$: ver §35, p.117). Por otro lado, tenemos (por definición!) que $\mathcal{R}^i$ es inyectivo si y sólo si el functor $\mathrm{Hom}_Y(\cdot, \mathcal{R}^i)$ es <u>exacto</u>.

$\Rightarrow$ La composición $\mathrm{Hom}_Y(j_*(\cdot), \mathcal{R}^i) \cong \mathrm{Hom}_X(\cdot, \mathcal{I}^i)$ es <u>exacto</u>, i.e., $\mathcal{I}^i$ es inyectivo en $\mathcal{O}_X$-<u>Mod</u> ✓

Finalmente, notamos que $\mathcal{I}^i = \mathcal{H}om(\mathcal{O}_X, \mathcal{I}^i)$ y que (de nuevo, por def. de $\mathcal{I}^\bullet$ y de j_*) tenemos $\mathcal{H}om(\mathcal{O}_X, \mathcal{I}^i) \cong j^*\mathcal{H}om(j_*\mathcal{O}_X, \mathcal{R}^i)$, de donde obtenemos:

Fórmula proyección

$$H^i(\mathcal{I}^\bullet) \cong j^* H^i(\mathcal{H}om(j_*\mathcal{O}_X, \mathcal{R}^\bullet)) \overset{\text{def}}{=} j^*\mathcal{E}xt^i(j_*\mathcal{O}_X, \omega_Y) \underset{\text{Hecho}}{\cong} \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq r \\ j^*(j_*\omega_X) \cong \omega_X & \text{si } i = r \end{cases}$$ ■

<u>Consecuencia</u>: A partir de $\mathcal{I}^\bullet$, usando que $H^i(\mathcal{I}^\bullet) = 0$ si $i \neq r$ y $H^r(\mathcal{I}^\bullet) \cong \omega_X$, obtenemos una resolución inyectiva $\omega_X \longrightarrow \mathcal{J}^\bullet$ con $d^i_{\mathcal{J}} = d^{i+r}_{\mathcal{I}}$ (traslación en r) y luego:

$$\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \omega_X) \overset{\text{def}}{=} H^i(\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{J}^\bullet)) \overset{\text{Prop}}{=} H^{i+r}(\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{I}^\bullet)) \cong H^{i+r}(\mathrm{Hom}_Y(j_*\mathcal{F}, \mathcal{R}^\bullet)) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Ext}^{i+r}(j_*\mathcal{F}, \omega_Y)$$

Así, el <u>Hecho clave</u> permite probar (DG) y concluir la demostración. ■

<u>Observación final</u>: La demostración del Hecho clave es puramente algebraica y se realiza utilizando el llamado "<u>complejo de Koszul</u>" asociado a $j: X \hookrightarrow Y$. Recomiendo el libro de Fulton y Lang "Riemann-Roch Algebra" (Ch IV, §2) para leer sobre las versiones algebraicas y geométricas del complejo de Koszul. La prueba detallada del Hecho clave se puede encontrar en el apunte de Joseph Le Potier (Ch. III, §6.1).

§37. Teorema de Riemann-Roch para curvas algebraicas

Recuerdo: Sea X una variedad alg. proyectiva suave e irreducible. Entonces (ver §23, p. 81), todo fibrado en rectas $L \in \mathrm{Pic}(X)$ es de la forma $L \cong \mathcal{O}_X(D)$ para cierto divisor de Cartier $D \in \mathrm{Div}(X)$ que es único módulo equivalencia lineal, i.e., si $L \cong \mathcal{O}_X(D')$ entonces $D \sim D'$ ($\overset{\text{def}}{\iff} \exists f \in k(X)^*$ tq $D - D' = \mathrm{div}(f)$). Más aún, dado que X es suave podemos identificar divisores de Cartier y divisores de Weil en X, i.e., podemos pensar a D como una suma finita formal

$$D = \sum_{\text{finita}} n_i \cdot Y_i \quad , \text{ con } n_i \in \mathbb{Z} \text{ e } Y_i \subseteq X \text{ hipersuperficie irreducible.}$$

En part, si $n_i \geq 0 \ \forall i$ decimos que D es un divisor efectivo, y escribimos $D \geq 0$ en tal caso.
El k-ev $H^0(X,L) \cong H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ es llamado el espacio de Riemann-Roch de D el cual, por el Teorema de finitud (ver §29, p. 100), es de dimensión finita. Usualmente, la dimensión de $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ se denota $h^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ o $h^0(X,D)$ (o simplemente $h^0(D)$), o más clásicamente $\ell(D)$. Explícitamente (ver §23, p. 82), tenemos que:

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \cong \{f \in k(X)^* \text{ tq } \mathrm{div}(f) + D \geq 0\} \cup \{0\} \quad \text{y} \quad |D| := \mathbb{P} H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \cong \{E \geq 0 \text{ efectivo tq } E \sim D\}.$$

En 1857, Riemann estudia sistemas lineales de divisores en curvas algebraicas proyectivas suaves e irreducibles (en realidad, en "superficies de Riemann compactas"). En tal caso, un divisor en una curva C es una suma formal de la forma $D = \sum_{i=1}^{r} n_i \cdot p_i$ con $n_i \in \mathbb{Z}$ y $p_i \in C$ punto, y así podemos considerar la función grado (ver §23, p. 89) dada por:

$$\deg : \mathrm{Pic}(C) \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \quad , \quad L \cong \mathcal{O}_C\left(\sum_{i=1}^{r} n_i \cdot p_i\right) \longmapsto \deg(L) := \sum_{i=1}^{n} n_i \quad \text{(bien definido)}.$$

En este contexto, Riemann prueba (para $k = \mathbb{C}$) que para todo $L \cong \mathcal{O}_C(D) \in \mathrm{Pic}(C)$:

$$\ell(D) \geq \deg(D) - g(C) + 1 \quad \text{("desigualdad de Riemann")},$$

donde $g(C) = \dim_k H^0(C, \omega_C)$ es el género de C (ver §26, p. 91), con $\Omega_C^1 \cong \omega_C \cong \mathcal{O}_C(K_C)$ el fibrado en rectas canónico ($\dim(C) = 1$!). En 1865, Gustav Roch (estudiante de Riemann) prueba que la igualdad se alcanza al considerar un "término de corrección":

$$\ell(D) - \ell(K_C - D) = \deg(D) - g(C) + 1$$

obteniendo así el "Teorema de Riemann-Roch" (para $k = \mathbb{C}$).

Objetivo: En esta sección probaremos el Teorema de Riemann-Roch para todo $k = \bar{k}$ alg. cerrado. Para ello, usaremos métodos cohomológicos que además servirán para generalizar el resultado a fibrados vectoriales de rango ≥ 2 (un caso particular de Teo. de Hirzebruch-Riemann-Roch !).

Comencemos por reinterpretar el enunciado del Teorema de Riemann-Roch usando dualidad de Serre:

Recuerdo (ver §36, p. 120): Sea X var. alg. proyectiva suave e irreducible de $\dim(X) = n$. Entonces, para todo fibrado vectorial $E \to X$ tenemos que:

$$H^i(X,E) \cong H^{n-i}(X, E^\vee \otimes \omega_X)^\vee \text{ para todo } i \in \{0,1,\ldots,n\}.$$

donde $\omega_X = \det(\Omega_X^1) \cong \mathcal{O}_X(K_X) \cong \Lambda^n \Omega_X^1$.

En particular, tenemos las siguientes consecuencias:

① Fibrados en rectas: Si $L \cong \mathcal{O}_X(D)$ es un fibrado en rectas en X, entonces $L^\vee \cong \mathcal{O}_X(-D)$ y la dualidad de Serre se reduce a $H^i(X,L) \cong H^{n-i}(X, L^\vee \otimes \omega_X)^\vee \Leftrightarrow H^i(X, \mathcal{O}_X(D)) \cong H^{n-i}(X, \mathcal{O}_X(K_X - D))^\vee$ y en particular $h^i(X, \mathcal{O}_X(D)) = h^{n-i}(X, \mathcal{O}_X(K_X - D))$.

② Números de Hodge: Si $E = \mathcal{O}_X$, entonces $H^i(X, \mathcal{O}_X) \cong H^{n-i}(X, \omega_X)^\vee$. Más generalmente, dado que $\omega_X \otimes (\Omega_X^{n-p})^\vee \cong \Omega_X^p$ (ver §4, p. 17), con $\Omega_X^p := \Lambda^p \Omega_X^1$, tenemos que para $p + q = n$:

$$H^q(X, \Omega_X^p) \cong H^q(X, (\Omega_X^q)^\vee \otimes \omega_X) \cong H^p(X, \Omega_X^q)^\vee.$$

Así, si definimos el número de Hodge $h^{p,q}(X) := \dim_k H^q(X, \Omega_X^p)$, entonces $h^{p,q}(X) = h^{q,p}(X)$ para todos $p, q \geq 0$ tales que $p + q = n$.

<u>Caso particular importante</u>: En el caso de una <u>curva</u> (proy. suave var.) C, tenemos:

① $h^1(C,\mathcal{O}_C(D)) \overset{\text{Serre}}{=} h^0(C,\mathcal{O}_C(K_C-D)) \overset{\text{def}}{=} \ell(K_C-D)$.

② $g(C) \overset{\text{def}}{=} h^0(C,\omega_C) \overset{\text{Serre}}{=} h^1(C,\mathcal{O}_C)$.

<u>Obs</u>: si C es una curva proy. irreducible (no necesariamente suave!), se define su <u>género aritmético</u> de C como $p_a(C) := h^1(C,\mathcal{O}_C)$, que está bien definido y coincide con $g(C)$ si C es suave.

Así, $\ell(D)-\ell(K_C-D)$ se reescribe como $h^0(C,\mathcal{O}_C(D))-h^1(C,\mathcal{O}_C(D))$ y de manera similar $1-g(C) = 1-h^1(C,\mathcal{O}_C) = h^0(C,\mathcal{O}_C)-h^1(C,\mathcal{O}_C)$, pues C es proy. irreducible!

<u>Def</u>: sea X una variedad alg. proyectiva de $\dim(X)=n$, y sea $\mathcal{F}$ un haz coherente en X. Definimos la <u>característica de Euler-Poincaré</u> de $\mathcal{F}$ como:

$$\chi(X,\mathcal{F}) := \sum_{i\geq 0}(-1)^i h^i(X,\mathcal{F}) = h^0(X,\mathcal{F})-h^1(X,\mathcal{F})+\ldots+(-1)^n h^n(X,\mathcal{F}),$$

donde $h^i(X,\mathcal{F})<+\infty$ $\forall i\geq 0$ y $h^i(X,\mathcal{F})=0$ $\forall i>\dim(X)$ gracias a los teoremas de finitud y anulación de Grothendieck, respectivamente.

<u>Importante</u>: con esta notación, el Teorema de Riemann-Roch se reduce a probar que para todo $L\cong\mathcal{O}_C(D)\in\mathrm{Pic}(C)$ se tiene que $\chi(C,\mathcal{O}_C(D)) = \chi(C,\mathcal{O}_C)+\deg(D)$.

<u>Lema</u>: sea $0\to\mathcal{F}\to\mathcal{G}\to\mathcal{H}\to 0$ una sucesión exacta de haces coherentes en una variedad alg. proyectiva X. Entonces, $\chi(X,\mathcal{G}) = \chi(X,\mathcal{F})+\chi(X,\mathcal{H})$.

<u>Dem</u>: La sucesión exacta larga en cohomología $0\to H^0(X,\mathcal{F})\to H^0(X,\mathcal{G})\to H^0(X,\mathcal{H})\to H^1(X,\mathcal{F})\to\ldots$ nos da una sucesión exacta $0\to V_1\overset{f_1}{\hookrightarrow}V_2\xrightarrow{f_2}V_3\to\ldots\to V_m\xrightarrow{f_m}0\xrightarrow{f_{m+1}}0$ de k-ev de dimensión finita. Si denotamos $d_i := \dim_k(V_i)$ y $k_i := \dim_k\ker(f_i)$, entonces la exactitud y el Teorema del rango implican que $d_i = k_i+\mathrm{rg}(f_i) = k_i+k_{i+1}$. Luego,

$$\sum_{i=1}^m(-1)^i d_i = \sum_{i=1}^m(-1)^i(k_i+k_{i+1}) = \sum_{i=1}^m\left[(-1)^i k_i-(-1)^{i+1}k_{i+1}\right] = -k_1-(-1)^{m+1}k_{m+1} = 0.$$

Así, $0 = h^0(X,\mathcal{F})-h^0(X,\mathcal{G})+h^0(X,\mathcal{H})-h^1(X,\mathcal{F})+\ldots$, i.e., $\chi(X,\mathcal{F})-\chi(X,\mathcal{G})+\chi(X,\mathcal{H})=0$ ■

En virtud del Lema anterior, necesitamos relacionar $\mathcal{O}_C(D)$ y $\mathcal{O}_C$.

<u>Recuerdo</u> (ver §23, p.82): Si $D=Y$ es una hipersuperficie irreducible en X var. alg. proyectiva suave e irreducible, entonces $\mathcal{I}_D\cong\mathcal{O}_X(-D)$ y luego tenemos una sucesión exacta de $\mathcal{O}_X$-módulos

$$0\to\mathcal{O}_X(-D)\to\mathcal{O}_X\to\mathcal{O}_D\to 0,$$

donde $j: D\hookrightarrow X$ encajamiento cerrado y $\mathcal{O}_D := j_*\mathcal{O}_D$ en X (que cumple $H^i(X,j_*\mathcal{O}_D)\cong H^i(D,\mathcal{O}_D)$ $\forall i\geq 0$). Más generalmente, si $D=\sum_{i=1}^r n_iY_i$ es un divisor <u>efectivo</u> (i.e, $n_i\geq 0$) entonces se tiene la <u>misma</u> sucesión exacta, pero $\mathcal{O}_D$ es el cociente de $\mathcal{O}_X$ por el ideal de funciones regulares que se anulan en Y_i con multiplicidad $\geq n_i$.

<u>Caso particular importante</u>: En el caso de una <u>curva</u> (proy. suave var.) C, si $D=\sum_{i=1}^r n_i\cdot p_i$ es un divisor efectivo, donde <u>sólo</u> escribimos los términos con $n_i\geq 1$, entonces

$$H^0(D,\mathcal{O}_D)\cong\bigoplus_{i=1}^r\mathcal{O}_{C,p_i}/\mathfrak{m}_{p_i}^{n_i}$$

y luego, dado que $\dim(D)=0$, tenemos $\chi(D,\mathcal{O}_D) = h^0(D,\mathcal{O}_D) = n_1+\ldots+n_r \overset{\text{def}}{=} \deg(D)$.

Además, notamos que si $L\in\mathrm{Pic}(C)$ fibrado en rectas y $D=p$ es un punto, entonces (escogiendo una vecindad $\mathcal{U}$ de $p\in C$ tq $L|_{\mathcal{U}}\cong\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ trivial) tenemos por la fórmula de proyección (ver §29, p.100) que $L\otimes\mathcal{O}_D \overset{\text{def}}{=} L\otimes j_*\mathcal{O}_D\cong j_*(j^*L\otimes\mathcal{O}_D)\cong j_*\mathcal{O}_D \overset{\text{def}}{=} \mathcal{O}_D$: todo fibrado en rectas en un punto es trivial! Del mismo modo, $L\otimes\mathcal{O}_D\cong\mathcal{O}_D$ para todo D divisor <u>efectivo</u> en C.

Teorema de Riemann-Roch: Sea C una curva alg. projectiva suave e irreducible, de género $g(C) = h^0(C,\omega_C) = h^1(C,\mathcal{O}_C)$. Entonces, para todo $L \cong \mathcal{O}_C(D) \in \mathrm{Pic}(C)$ se tiene que:
$$\chi(C,\mathcal{O}_C(D)) = \chi(C,\mathcal{O}_C) + \deg(D) \quad, \text{ie} \ , \quad \ell(D) - \ell(K_C - D) = \deg(D) - g(C) + 1 .$$

Dem: Escribimos el divisor D como diferencia de divisores efectivos $D = E - F$. Considerando E y F como subvariedades de dimensión 0 (en realidad, subesquemas) obtenemos las sucesiones exactas
$$0 \to \mathcal{O}_C(-E) \to \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_E \to 0 \quad \text{y} \quad 0 \to \mathcal{O}_C(-F) \to \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_F \to 0 \quad \text{en } C.$$
Tensorizando ambas por el fibrado en rectas $L = \mathcal{O}_C(E)$ y recordando que $L \otimes \mathcal{O}_E \cong \mathcal{O}_E$ y $L \otimes \mathcal{O}_F \cong \mathcal{O}_F$ (pues $\dim(E) = \dim(F) = 0$), obtenemos:
$$0 \to \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_C(E) \to \mathcal{O}_E \to 0 \quad \text{y} \quad 0 \to \mathcal{O}_C(E-F) \cong \mathcal{O}_C(D) \to \mathcal{O}_C(E) \to \mathcal{O}_F \to 0 .$$
De la primera sucesión exacta obtenemos $\chi(C,\mathcal{O}_C(E)) = \chi(C,\mathcal{O}_C) + \chi(E,\mathcal{O}_E)$ que, recordando que $\chi(E,\mathcal{O}_E) = \deg(E)$, se reduce a $\chi(C,\mathcal{O}_C(E)) = \chi(C,\mathcal{O}_C) + \deg(E)$. Por otro lado, de la segunda sucesión exacta obtenemos $\chi(C,\mathcal{O}_C(E)) = \chi(C,\mathcal{O}_C(D)) + \deg(F)$. Así:
$$\chi(C,\mathcal{O}_C(D)) = \chi(C,\mathcal{O}_C(E)) - \deg(F) = \chi(C,\mathcal{O}_C) + (\deg(E) - \deg(F)) = \chi(C,\mathcal{O}_C) + \deg(D) \ ✓ \ ■$$

Algunas consecuencias directas: Sea C una curva alg (proy. suave irred) de $g(C) = g$.

① $D = K_C$ en $\ell(D) - \ell(K_C - D) = \deg(D) - g + 1$ se reduce a:
$$\ell(K_C) - \ell(0) \overset{\text{def}}{=} h^0(C,\omega_C) - h^0(C,\mathcal{O}_C) = g - 1 \overset{RR}{=} \deg(K_C) - g + 1 \ , \text{ ie},$$
$\deg(\omega_C) = \deg(K_C) = 2g - 2$. En part, $\deg(T_C) = \deg(-K_C) = 2 - 2g$.

② Recordemos que $\ell(D) = h^0(C,\mathcal{O}_C(D)) = 0$ si $\deg(D) < 0$ (sino, $\exists E \geq 0$ efectivo tq $E \sim D$ y luego $\deg(D) = \deg(E) \geq 0$ ↯). En particular, dado que
$$\deg(K_C - D) = 2g - 2 - \deg(D),$$
tenemos que si $\deg(D) \geq 2g - 1$, entonces $\ell(K_C - D) = 0$ (ie, $h^1(C,\mathcal{O}_C(D)) = 0$ por dualidad de Serre) y en tal caso $\ell(D) = \deg(D) - g + 1$. ($\Rightarrow \ell(D) \geq g$).

③ Si $\deg(D) = 2g - 2$ y $D \not\sim K_C$ (ie, $\nexists f \in k(C)^*$ tq $D - K_C = \mathrm{div}(f)$), entonces
$$\ell(D) = g - 1 .$$
En efecto, $\ell(D) \overset{RR}{=} 2g - 2 - g + 1 + \ell(K_C - D) = g - 1 + \ell(K_C - D)$. Si $\ell(K_C - D) \geq 1$ entonces existe $E \geq 0$ efectivo tq $E \sim K_C - D$ y luego $\deg(E) = \deg(K_C - D) = 0 \underset{E \geq 0}{\Rightarrow} E = 0$, ie, $D \sim K_C$.
En otras palabras, si $\deg(D) = \deg(K_C)$ entonces $D \sim K_C \iff \ell(K_C - D) = h^1(C,\mathcal{O}_C(D)) \neq 0$.

④ Curvas elípticas: Si $\omega_C \cong \mathcal{O}_C$ es trivial (ie, $K_C = 0$) entonces $g = h^0(C,\omega_C) = 1$.
Recíprocamente, si $g = 1$ entonces $\deg(K_C) = \deg(-K_C) = 0$ (por ①) y Riemann-Roch se reduce a $\ell(D) - \ell(K_C - D) = \deg(D)$. En part, si $D = -K_C$ obtenemos
$$\ell(-K_C) = \ell(2K_C) \geq 1 \quad (\text{pues } s \in H^0(C,\omega_C)\setminus\{0\} \text{ induce } s^{\otimes 2} \in H^0(C,\omega_C^{\otimes 2}) \text{ no-nula!})$$
Así, $h^0(C,\omega_C) \neq 0$ y $h^0(C,\omega_C^\vee) \neq 0 \Rightarrow \omega_C \cong \mathcal{O}_C$ (ver §21, p.73).
De este modo, $g(C) = 1 \iff \omega_C \cong \mathcal{O}_C$, y en tal caso decimos que C es una curva elíptica.
El Teorema de Riemann-Roch toma una forma particularmente sencilla para curvas elípticas: $\ell(D) = \ell(-D) + \deg(D)$. Así, $\ell(D) = \deg(D)$ si $\deg(D) \geq 1$ y $\ell(D) = 0$ si $\deg(D) = 0$ y $D \not\sim 0$ (ie, si $\mathcal{O}_C(D) \not\cong \mathcal{O}_C$).

Corolario: Sea C una curva alg. projectiva suave e irreducible, y sea $L \cong \mathcal{O}_C(D) \in \mathrm{Pic}(C)$. Entonces, L es amplio si y sólo si $\deg(L) \overset{\text{def}}{=} \deg(D) > 0$.

Dem: Ya vimos (ver §23, pág 84) que si L es amplio entonces $\deg(L) > 0$. Supongamos que $\deg(D) > 0$, y notemos que por Riemann-Roch se tiene que para $m \gg 0$:

$\ell(mD) - \ell(\cancel{K_C^{\circ}} - mD) = h^0(C, \mathcal{O}_C(mD)) = m\deg(D) - g + 1 > 0$. Así, reemplazando L por $L^{\otimes m}$ si fuese necesario, podemos suponer que D es un divisor efectivo. Luego, tenemos:

$$0 \to \mathcal{O}_C(-D) \to \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_D \to 0 \;\underset{\otimes\, \mathcal{O}_C(mD)}{\rightsquigarrow}\; 0 \to \mathcal{O}_C((m-1)D) \to \mathcal{O}_C(mD) \to \mathcal{O}_D \to 0$$

sucesiones exactas. En cohomología, obtenemos la sucesión exacta larga:

$$0 \to H^0(C, \mathcal{O}_C((m-1)D)) \to H^0(C, \mathcal{O}_C(mD)) \to H^0(D, \mathcal{O}_D) \to H^1(C, \mathcal{O}_C((m-1)D)) \twoheadrightarrow H^1(C, \mathcal{O}_C(mD)) \to \overset{\dim(D)=0}{\overset{\downarrow}{0}}$$

sea $h_m = h^1(C, \mathcal{O}_C(mD))$, entonces $h_{m-1} \geq h_m \geq h_{m+1} \geq h_{m+2} \geq \dots$. Dado que $h_m < +\infty$, obtenemos que $H^1(C, \mathcal{O}_C((m-1)D)) \xrightarrow{\sim} H^1(C, \mathcal{O}_C(mD))$ es un isomorfismo para todo $m \gg 0$, i.e., $H^0(C, \mathcal{O}_C(mD)) \twoheadrightarrow H^0(D, \mathcal{O}_D) \cong \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{C,p_i}/\mathfrak{m}_{p_i}^{n_i} \to 0$ sobreyectiva $\forall m \gg 0$, donde $D = \sum_{i=1}^{r} n_i \cdot p_i$ con $n_i > 0$ y $p_i \in C$. En part, el morfismo de evaluación $ev_x : H^0(C, \mathcal{O}_C(mD)) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_C(mD)_x$ (cf. §29, p.100 y §24, p.86) es sobreyectivo para todo $x = p_i$ tq $D = \sum_{i=1}^{r} n_i \cdot p_i$ con $n_i > 0$. Por otro lado, $\exists\, s \in H^0(C, \mathcal{O}_C(mD))$ tq $\operatorname{div}(s) = mD$, y luego $s(x) \neq 0$ para $x \neq p_1, \dots, p_r$.

$\Rightarrow M = \mathcal{O}_C(mD)$ es un fibrado en rectas globalmente generado, i.e., $\varphi_M : C \to \mathbb{P}(H^0(C,M)^\vee) \cong \mathbb{P}^n$ es un morfismo regular. Dado que $M \not\cong \mathcal{O}_C$ (pues para $m \gg 0$ podemos suponer $\ell(mD) \geq 2$) tenemos que $\varphi_M : C \to \mathbb{P}^n$ es no-constante y finito (ver §35, p.119), de donde concluimos que $\varphi_M^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \cong M = \mathcal{O}_C(mD)$ es amplio, y luego $L = \mathcal{O}_C(D)$ es amplio también. ■

Consecuencia (cf. §26, p.90 y 91): sea C una curva alg. (proyectiva suave irred) con $g(C) = g$. Entonces, dado que $\deg(\omega_C) = 2g-2$, el Corolario anterior implica que C es:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Fano}\\ \text{Calabi-Yau}\\ \text{Can. Polarizada}\end{array}\right\} \overset{\text{dy}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{c}\omega_C^\vee \text{ amplio}\\ \omega_C \cong \mathcal{O}_C\\ \omega_C \text{ amplio}\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} g = 0\\ g = 1\\ g \geq 2\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\kappa(C) = -\infty\\ \kappa(C) = 0\\ \kappa(C) = 1\end{array}\right\}.$$

La ventaja del uso de métodos cohomológicos es que podemos generalizar el Teorema de Riemann-Roch a fibrados vectoriales de rango ≥ 2.

Lema: sea C una curva alg. proyectiva suave e irreducible, sea $E \to C$ un fibrado vectorial de $\operatorname{rg}(E) = r$. Entonces, E admite una "filtración" decreciente

$$E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots \subseteq E_{r-1} \subseteq E_r = E,$$

por subfibrados vectoriales $E_i \to C$ de $\operatorname{rg}(E_i) = i$.

Dem: Argumentamos por inducción en $r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$: OK si $r = 1$ ✓ sup. que $r \geq 2$ y sea $C \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ encajamiento cerrado. Recordemos que para $m \in \mathbb{Z}$ definimos $\mathcal{O}_C(m) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)|_C$ y, más generalmente, definimos $E(m) := E \otimes \mathcal{O}_C(m)$.

Luego, el "Lema" de Serre (ver §29, p.100) afirma que $E(m)$ es globalmente generado para $m \gg 0$. Por otro lado, dado que $\operatorname{rg}(E(m)) = r \geq 2 > \dim(C) = 1$, tenemos en tal caso (ver §24, p.86 y §25, p.89) que $\exists\, s \in H^0(C, E(m)) \setminus \{0\}$ tal que $s(x) \neq 0$ $\forall x \in C$. Dicha sección determina, gracias a la "Obs. importante" en §29, p.100, un morfismo $\varphi_s : \mathcal{O}_C \hookrightarrow E(m)$ entre fibrados vectoriales que es inyectivo! Luego, tensorizando por $\mathcal{O}_C(-m)$ obtenemos

$$0 \to \mathcal{O}_C(-m) \hookrightarrow E \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} Q \to 0$$

sucesión exacta de fibrados vectoriales (!). Sea $E_1 := \mathcal{O}_C(-m)$ de $\operatorname{rg}(E_1) = 1$, y notamos que $Q = E/E_1$ es de $\operatorname{rg}(Q) = r-1$. Por ende, la hipótesis de inducción implica que existe

$$Q_2 \subseteq Q_3 \subseteq \dots \subseteq Q_{r-1} \subseteq Q_r = Q$$

filtración con $\operatorname{rg}(Q_i) = i-1$. Considerando los subfibrados $E_i := \pi^{-1}(Q_i)$ de $\operatorname{rg}(E_i) = i$, obtenemos la filtración $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots \subseteq E_{r-1} \subseteq E_r = E$ deseada. ■

<u>Def</u>: Sea C una curva alg. proyectiva suave e irreducible, y sea $E \to C$ un fibrado vectorial de $rg(E) = r$. Definimos el <u>grado de E</u> como el entero
$$\deg(E) := \deg(\det(E)) = \deg(\Lambda^r E),$$
donde $\det(E) \cong \Lambda^r E \in \mathrm{Pic}(C)$ es un fibrado en rectas.

Con esta definición en mente, podemos generalizar el Teorema de Riemann-Roch:

<u>Teorema de Hirzebruch-Riemann-Roch</u> (para curvas!): Sea C una curva alg. proyectiva suave e irreducible de género $g(C) = g$. Entonces, para todo fibrado vectorial $E \to C$ de $rg(E) = r$ y $\deg(E) = d$, se tiene que:
$$\chi(C,E) = rg(E)\,\chi(C,\mathcal{O}_C) + \deg(E) = r(1-g) + d. \qquad \text{(HRR)}$$

<u>Dem</u>: Argumentamos por inducción en $r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$: OK si $r = 1$ ✓ Sup. que $r \geq 2$ y consideremos una filtración
$$E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots \subseteq E_{r-1} \subseteq E_r = E$$
por subfibrados vectoriales de $rg(E_i) = i$. Entonces, la inclusión $E_i \subseteq E_{i+1}$ induce
$$0 \to E_i \hookrightarrow E_{i+1} \twoheadrightarrow L_i \to 0$$
sucesión exacta de fibrados vectoriales en C, con $L_i \in \mathrm{Pic}(C)$. Así, nos reducimos a probar que para toda sucesión exacta $0 \to E \hookrightarrow F \twoheadrightarrow Q \to 0$ de fibrados vectoriales en C se tiene que: HRR para E y para Q, implican HRR para F.
Esto último resulta de observar que $rg(F) = rg(E) + rg(Q)$, que $\det(F) \cong \det(E) \otimes \det(Q)$ y por ende $\deg(F) = \deg(E) + \deg(Q)$, y que $\chi(C,F) = \chi(C,E) + \chi(C,Q)$. ■

Una aplicación típica del Teorema de HRR para curvas es el estudio de "extensiones":

<u>Construcción</u> (extensión de fibrados vectoriales):
Sea X una variedad alg. proyectiva suave e irreducible, y sean E y Q fibrados vectoriales en X. Una <u>extensión de Q por E</u> es una sucesión exacta de fibrados vectoriales
$$0 \longrightarrow E \xhookrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} Q \longrightarrow 0 \qquad (S)$$
Decimos que la extensión (S) es <u>trivial</u> (o que <u>escinde</u>) si $F \cong E \oplus Q$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ (S) es trivial $\iff \exists$ una "sección" $s : Q \to F$ tal que $\beta \circ s = \mathrm{Id}_Q$.

<u>Indicación</u>: Para todo $x \in X$, cada $v \in F_x$ pertenece a $\ker(\beta)_x + \mathrm{Im}(s)_x$ puesto que tenemos $v = (v - (s\circ\beta)(v)) + (s\circ\beta)(v)$. Además, $\ker(\beta)_x \cap \mathrm{Im}(s)_x = 0$ pues $\beta(v) = 0$ y $s(w) = v$ implica $0 = (\beta\circ s)(w) = w$. Como $E \cong \mathrm{Im}(\alpha) \cong \ker(\beta)$, y como $\beta \circ s = \mathrm{Id}_Q$ implica s inyectiva y por ende $\mathrm{Im}(s) \cong Q$, se concluye que $F \cong E \oplus Q$.

En part, si $Q = L \in \mathrm{Pic}(X)$ fibrado en rectas, entonces tenemos
$$0 \to E \otimes L^\vee \xhookrightarrow{i} F \otimes L^\vee \xrightarrow{\pi} \mathcal{O}_X \to 0 \qquad (S)\otimes L^\vee.$$
Luego, (S) es trivial $\iff \exists s : \mathcal{O}_X \to F \otimes L^\vee$ tq $\pi \circ s = \mathrm{Id}_{\mathcal{O}_X}$. En virtud de la "Obs importante" en §29, p.100, esto equivale a que $\exists s \in H^0(X, F\otimes L^\vee)$ tq $\Gamma(\pi)(s) = 1 \in H^0(X,\mathcal{O}_X)$ (✱).
Al considerar la sucesión exacta larga
$$\ldots \to H^0(X, F\otimes L^\vee) \xrightarrow{\Gamma(\pi)} H^0(X,\mathcal{O}_X) \xrightarrow{\delta} H^1(X, E\otimes L^\vee) \to \ldots,$$
y usando que $\mathrm{Im}(\Gamma(\pi)) = \ker(\delta)$, tenemos que (✱) equivale a que $\delta_{(S)} := \delta(1)$ sea 0 en $H^1(X, E\otimes L^\vee)$ ($\cong \mathrm{Ext}^1(L,E)$!).

<u>Conclusión</u>: La extensión (S) es trivial $\iff \delta_{(S)} = 0$ en $H^1(X, E\otimes L^\vee)$.

[**Teorema de Birkhoff-Grothendieck**: sea $E \to \mathbb{P}^1$ un fibrado vectorial de $rg(E) = r$ en $\mathbb{P}^1$. Entonces, $E \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_2) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_r)$ para únicos enteros $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_r$.]

Dem: Comenzamos por ilustrar el caso $r=2$: Reemplazando E por $E(m) := E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)$ y notando que $\det(E(m)) \cong \det(E) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2m)$ pues $r=2$, tenemos que $\deg(E(m)) = \deg(E) + 2m$. Así, podemos sup. que $d = \deg(E) = 0$ o -1 (dependiendo de la paridad). Para $C = \mathbb{P}^1$:

$\overset{HRR}{\Rightarrow} h^0(C,E) = 2(1 - \overset{0}{g(\mathbb{P}^1)}) + d + h^1(C,E) \geq d+2 \geq 1$, y luego $\exists\, s \in H^0(\mathbb{P}^1, E) \setminus \{0\}$ que corresponde a $s: \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \to E$, ie, $s^\vee: E^\vee \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$. La imagen $Im(s^\vee)$ es un haz de ideales de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ y luego $Im(s^\vee) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-D) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-K)$ para cierto $D \geq 0$ divisor efectivo de grado $K \geq 0$. Así, $E^\vee \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-K) \to 0$ es sobreyectiva y por ende tenemos

$$(S) \qquad 0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(K) \hookrightarrow E \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \to 0 \quad, \text{con } a+K = d \text{, ie, } a = d-K.$$

La clase $\delta_{(S)}$ de la extensión es un elemento de $H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2K-d)) = 0$ (pues $2K-d \geq -1$: ver §29, p.99 !), y luego $E \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(K) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-K)$. suma directa ✓

El caso general se trata por inducción en r y sigue las mismas ideas:

Si $m \gg 0$ entonces $H^1(\mathbb{P}^1, E^\vee(m) \otimes \omega_{\mathbb{P}^1}) = 0$ por anulación de Serre, y luego por dualidad de Serre $H^0(\mathbb{P}^1, E(-m)) = 0$. Sea m el entero más grande tal que $h^0(\mathbb{P}^1, E(-m)) \neq 0$ (por HRR esto ocurre para algún m, tal como antes!) y consideramos el morfismo sobreyectivo $(E(-m))^\vee \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-K)$ dado por una sección (tal como antes), que nos da $0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(K) \hookrightarrow E(-m)$ y luego $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \hookrightarrow E(-m-K)$ sección no nula de $E(-m-K)$.

Por maximalidad de m, tenemos que $K=0$ y obtenemos la sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \hookrightarrow E \to Q \to 0 \qquad (S)$$

con $Q \cong \bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_i)$ por hipótesis de inducción.

Notamos que $d_i \leq m$ para todo i, pues si por ejemplo $l = d_1 - m - 1 \geq 0$ entonces:

$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \to E(-m-1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(l) \oplus Q' \to 0 \rightsquigarrow 0 \to H^0(\mathbb{P}^1, E(-m-1)) \xrightarrow{\sim} \underbrace{H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(l))}_{\dim \geq 1} \oplus H^0(\mathbb{P}^1, Q') \to 0$

pues $h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) = h^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) = 0$, lo que contradice la maximalidad de m!

Considerando la sucesión exacta dual de (S) obtenemos la extensión

$$0 \to \bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-d_i) \hookrightarrow E^\vee \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-m) \to 0 \qquad (S)^\vee$$

cuya clase $\delta_{(S)^\vee}$ pertenece a $H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \otimes Q^\vee) \simeq \bigoplus_{i=1}^{r-1} H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m-d_i)) = 0$ pues $m - d_i \geq 0$ (ver §29, p.99)! Luego, $E \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \oplus Q$ ✓

Finalmente, la unicidad de los $d_1 \leq \ldots \leq d_r$ se deduce del hecho que podemos recuperar cada d_i a partir de las dimensiones $h^i(\mathbb{P}^1, E(m))$ para $i = 0,1$ y $m \in \mathbb{Z}$ (Ejercicio). ■

[Cultura general: si C es una curva alg. proy. suave e irreducible tq $C \not\cong \mathbb{P}^1$, entonces es posible construir $E \to C$ fibrados vectoriales de $rg(E) = 2$ que no son suma directa de fibrados en rectas (ver, por ejemplo, el libro de A. Beauville "Complex Algebraic Surfaces" capítulo III, p. 32).

Del mismo modo, existen fibrados vectoriales en $\mathbb{P}^n$ con $n \geq 2$ que no son suma directa de fibrados en rectas. Una excelente referencia es el libro "Vector bundles on complex projective spaces" por Okonek, Schneider y Spindler.

Conjetura (Hartshorne): Todo fibrado de rango 2 en $\mathbb{P}^n$ es suma directa de fibrados en rectas si $n \geq 7$.

§38. Aplicaciones del Teorema de Riemann-Roch

En esta sección estudiaremos algunas aplicaciones geométricas del Teorema de Riemann-Roch.

Recuerdo (ver §23, p. 84): Sea C una curva alg. proyectiva suave e irreducible, entonces el morfismo de grupos $\deg : \mathrm{Pic}(C) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$, $L \cong \mathcal{O}_C(\sum_{i=1}^r n_i \cdot p_i) \mapsto \deg(L) = \sum_{i=1}^r n_i$ está bien definido y es sobreyectivo. Más aún,

$\deg$ inyectivo $\overset{\text{dy}}{\iff} \forall p,q \in C$ distintos, $\deg \mathcal{O}_C(p-q) = 0$ implica que $p \sim q \iff C \cong \mathbb{P}^1$.

Prop: Sea C una curva alg. proyectiva suave e irreducible, entonces $g(C) = 0 \iff C \cong \mathbb{P}^1$.

Dem: Si $C \cong \mathbb{P}^1$ entonces $\omega_{\mathbb{P}^1} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$ y luego $h^0(\mathbb{P}^1, \omega_{\mathbb{P}^1}) = h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)) = 0$ ✓

Sup. que $g(C) = h^0(C, \omega_C) = 0$, entonces RR se reduce a $\ell(D) - \ell(K_C - D) = \deg(D) + 1 - \cancel{g}^{\,0}$.

Si $p,q \in C$ son puntos distintos, entonces $D = p - q$ tiene $\deg(D) = 0$ y $\deg(K_C - D) = -2$ pues $\deg(K_C) = 2g-2$, y luego $\ell(K_C - D) = 0$. Así, $\ell(D) = 1$ y por lo tanto

$|D| = \{E \geqslant 0 \text{ efectivo tq } E \sim D\} \cong \mathbb{P}^{\ell(D)-1} = \{pt\} \Rightarrow E = 0 \sim D = p - q \iff p \sim q \Rightarrow C \cong \mathbb{P}^1$ ■

Nuestro siguiente objetivo será obtener criterios numéricos que nos aseguren que un fibrado en rectas en una curva algebraica sea globalmente generado, o mejor aún: muy amplio.

Notación y Terminología: Sea X una variedad alg. proyectiva suave e irreducible, y sea $D = \sum_{i=1}^r n_i Y_i$ un divisor (de Weil) en X. Definimos el soporte de D como

$$\mathrm{Supp}(D) = \bigcup_{i=1}^r Y_i \subseteq X.$$

Por otro lado, dada $Y \subseteq X$ hipersuperficie irreducible, definimos la multiplicidad de Y en D por

$$\mathrm{mult}_Y(D) := \begin{cases} n_i & \text{si } Y = Y_i \text{ para cierto } i = 1,\dots,r \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

Finalmente, recordemos que el sistema lineal asociado a D está dado por

$$|D| := \mathbb{P}H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \cong \{E \geqslant 0 \text{ efectivo tq } E \sim D\}$$

Así, definimos el lugar de base de D como el lugar de base de $\mathcal{O}_X(D) \in \mathrm{Pic}(X)$ (ver §22, p. 75):

$$\mathrm{Bs}(D) := \{x \in X \text{ tq } s(x) = 0 \ \forall s \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D))\} = \{x \in X \text{ tq } x \in \mathrm{Supp}(E) \ \forall E \geqslant 0 \text{ efectivo tq } E \sim D\}$$
$$= \bigcap_{E \in |D|} \mathrm{Supp}(E).$$

Luego, $L = \mathcal{O}_X(D)$ es globalmente generado (i.e., $\varphi_L : X \to |D| \cong \mathbb{P}^{h^0(D)-1}$ es un morfismo regular) si y solo si $\mathrm{Bs}(D) = \emptyset$.

Recuerdo (ver §22, p. 76): Sea X una var. alg. proyectiva irreducible y sea $L \in \mathrm{Pic}(X)$ un fibrado en rectas. Entonces L es muy amplio (i.e., $\varphi_L : X \hookrightarrow \mathbb{P}H^0(X,L)^\vee$ encajamiento cerrado) si y sólo si:

① L separa puntos, i.e., $\forall x,y \in X$ distintos existe $s \in H^0(X,L)$ tq $s(x) = 0$ y $s(y) \neq 0$.

② L separa tangentes, i.e., $\forall x \in X$ y todo $v \in T_xX$ existe $s \in H^0(X,L)$ tq $s(x) = 0$ y $(d_x s)(v) \neq 0$.

Prop: Sea C una curva alg. proyectiva suave e irreducible, y sea $L \cong \mathcal{O}_C(D)$ un fibrado en rectas. Entonces:

① L es globalmente generado (i.e., "sin puntos de base") $\iff \ell(D-p) = \ell(D) - 1 \ \forall p \in C$.

② L es muy amplio $\iff \ell(D-p-q) = \ell(D) - 2 \ \forall p,q \in C$ (incluyendo el caso $p = q$!).

Dem: Para ①, consideramos $p \in C$ y tensorizamos $0 \to \mathcal{O}_C(-p) \to \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_p \to 0$ por $\mathcal{O}_C(D)$, de donde obtenemos la sucesión exacta $0 \to \mathcal{O}_C(D-p) \to \mathcal{O}_C(D) \to k_p \to 0$ y luego

$$0 \to H^0(C, \mathcal{O}_C(D-p)) \xhookrightarrow{\alpha} H^0(C, \mathcal{O}_C(D)) \xrightarrow{\beta} k .$$

Así, $\ell(D) \overset{\text{def}}{=} h^0(C, \mathcal{O}_C(D)) = \dim_k \ker(\beta) + \operatorname{rg}(\beta) = \ell(D-p) + b$, con $b = \operatorname{rg}(\beta) \in \{0,1\}$.
$\Rightarrow \ell(D-p) = \ell(D)$ ó $\ell(D) - 1$ (✱). Por otro lado, la aplicación

$$\psi_p : |D-p| \cong \mathbb{P}^{\ell(D-p)-1} \hookrightarrow |D| \cong \mathbb{P}^{\ell(D)-1} , \quad E \mapsto E+p .$$

es inyectiva $\forall p \in C$. Así, $\ell(D-p) = \ell(D)$ si y sólo si ψ_p es sobreyectiva, y esto último (por definición) equivale a que $\forall E \geq 0$ efectivo tq $E \sim D$ se tiene $p \in \operatorname{Supp}(E)$, ie, $p \in Bs(D)$ ✓

Para probar ②, primero notamos que podemos asumir que ① se cumple. En efecto, si L es muy amplio entonces es globalmente generado, y si $\ell(D-p-q) = \ell(D) - 2$ $\forall p,q \in C$ el mismo cálculo (✱) prueba por otro lado que $\ell(D)-2 = \ell(D-p-q) = \ell(D-p)$ ó $\ell(D-p)-1$, por lo que necesariamente se tiene $\ell(D-p) = \ell(D) - 1$ $\forall p \in C$. En part, $L \cong \mathcal{O}_C(D)$ define

$$\varphi_L : C \longrightarrow |D| \cong \mathbb{P}^{\ell(D)-1} \text{ morfismo regular, con } \ell(D) = \ell(D-p-q) + 2 \geq 2 .$$

que no es constante (pues $\ell(D) \geq 2$). Para probar que φ_L es un encajamiento cerrado (ie, que L es muy amplio) basta probar que:

a) L separa puntos $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\forall p,q \in C$ distintos, $\exists E \geq 0$ efectivo tq $E \sim D$ y $p \in \operatorname{Supp}(E)$ pero $q \notin \operatorname{Supp}(E)$
$\Leftrightarrow q$ no es punto de base de $|D-p| \overset{①}{\Leftrightarrow} \ell((D-p)-q) = (\ell(D)-1) - 1 = \ell(D) - 2$ ✓

b) L separa tangentes $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\forall p \in C$, $\exists E \geq 0$ efectivo tq $E \sim D$ y $p \in \operatorname{Supp}(E)$ pero $\operatorname{mult}_p(E) = 1$
$\Leftrightarrow p$ no es punto de base de $|D-p| \overset{①}{\Leftrightarrow} \ell(D-2p) = \ell(D) - 2$ ✓ ■

Def: Sea C una curva alg. proyectiva suave e irreducible, y sea $L \cong \mathcal{O}_C(D)$ fibrado en rectas. Decimos que D (o que L) es especial si

$$\ell(K_C - D) > 0 \overset{\text{Serre}}{\Longleftrightarrow} h^1(C, \mathcal{O}_C(D)) > 0 .$$

En caso contrario, decimos que D no es especial y en particular $\ell(D) = \deg(D) + 1 - g(C)$ en este último caso.

Ejemplo (ver §37, p. 126): Si $\deg(D) \geq 2g(C) - 1$ entonces D no es especial.

Corolario: Sea C una curva alg. proyectiva suave e irreducible de género $g(C) = g$, y sea $L \cong \mathcal{O}_C(D)$ un fibrado en rectas. Entonces,
① si $\deg(D) \geq 2g$, entonces L es globalmente generado.
② si $\deg(D) \geq 2g+1$, entonces L es muy amplio.

Dem: Sean $p,q \in C$. En ①, tanto D como $D-p$ no son especiales, y luego

$$\ell(D) \overset{RR}{=} \deg(D) + 1 - g \quad \text{y} \quad \ell(D-p) \overset{RR}{=} \deg(D-p) + 1 - g = (\deg(D) + 1 - g) - 1 ,$$

ie, $\ell(D-p) = \ell(D) - 1$ $\forall p \in C$ y luego L es globalmente generado. En ②, los divisores D, $D-p$ y $D-p-q$ no son especiales, y el mismo cálculo muestra que en este caso $\ell(D-p-q) = \ell(D) - 2$ $\forall p,q \in C$ y luego L es muy amplio. ■

Ejemplo: Si $g(C) = 0$, entonces L es amplio $\Leftrightarrow$ L es muy amplio $\Leftrightarrow \deg(L) > 0$. Dado que $g(C) = 0 \Leftrightarrow C \cong \mathbb{P}^1$, esto se condice con el hecho que $L \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)$ para $d \in \mathbb{Z}$ y que este último es muy amplio si y sólo si $d > 0$ (encajamiento de Veronese !).

Antes de dar más ejemplos en curvas de género ≥ 1, necesitamos definir la noción de grado de una variedad proyectiva X, la cual depende (!) del encajamiento $X \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^n$.

Recuerdo (ver §29, p.100): sea $X \overset{j}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^n$ var. proyectiva y $m \in \mathbb{Z}$. Entonces, $\mathcal{O}_X(m)$ es el fibrado en rectas en X dado por $\mathcal{O}_X(m) := j^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)|_X$. Más generalmente, si $\mathcal{F}$ es un haz coherente en X entonces escribimos $\mathcal{F}(m) := \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(m)$. En particular, el Teorema de anulación de Serre implica que la función

$$h_{\mathcal{F}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \,,\quad m \mapsto \chi(X, \mathcal{F}(m)) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i \geq 0} (-1)^i h^i(X, \mathcal{F}(m))$$

verifica que $h_{\mathcal{F}}(m) = h^0(X, \mathcal{F}(m))$ para todo $m \gg 0$. Decimos que $h_{\mathcal{F}}$ es la función de Hilbert de $\mathcal{F}$ (respecto al encajamiento $j : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$).

Lema: Sea $X \overset{j}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^n$ var. proyectiva y $\mathcal{F}$ un haz coherente en X. Entonces, $h_{\mathcal{F}} \in \mathbb{Q}[m]$ es una función polinomial con coeficientes racionales.

Dem: Dado que $H^i(X, \mathcal{F}(m)) \cong H^i(\mathbb{P}^n, (j_*\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m))$ $\forall i \geq 0$, basta suponer $X = \mathbb{P}^n$ y probar el resultado por inducción en $n \in \mathbb{N}$: si $n = 0$ entonces $\mathcal{F}(m) = \mathcal{F}$ $\forall m \in \mathbb{Z}$ y luego $h_{\mathcal{F}}$ es constante ✓ Para simplificar cálculos, supongamos $\mathcal{F}$ localmente libre (que es el caso que nos interesará después: el caso general es similar):

La sucesión exacta asociada a un hiperplano $i : H \cong \mathbb{P}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ es:

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to \mathcal{O}_H \to 0$$

Tensorizando por el haz localmente libre $\mathcal{F}(m)$, obtenemos la sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{F}(m-1) \to \mathcal{F}(m) \to \mathcal{F}_H(m) \to 0,$$

donde $\mathcal{F}_H := \mathcal{F}|_H$ haz coherente en $H \cong \mathbb{P}^{n-1}$. Luego, $\chi(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m)) = \chi(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m-1)) + \chi(H, \mathcal{F}_H(m))$ ie, $h_{\mathcal{F}}(m) - h_{\mathcal{F}}(m-1) = h_{\mathcal{F}_H}(m)$ y el lado derecho es un polinomio en m con coef. en $\mathbb{Q}$. Luego de limpiar denominadores, nos reducimos a probar que si $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ es una función tq $g(m) := f(m) - f(m-1)$ es un polinomio, entonces f también (Ejercicio). ■

Def: Sea $X \overset{j}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^N$ una variedad proyectiva de $\dim(X) = n$. El polinomio de Hilbert de X (resp. al encajamiento $j : X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$) es $h_X(m) := h_{\mathcal{O}_X(1)}(m) = \chi(X, \mathcal{O}_X(m))$. El grado de X, denotado $\deg(X)$, es $n!$ veces el coeficiente principal de $h_X(m)$.

Ejemplos: ① Usando los cálculos de $h^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m))$ en §29 (pág 99) se verifica directamente que $h_{\mathbb{P}^n}(m) = \chi(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) = \binom{n+m}{n} = \frac{m^n}{n!} + \ldots$ y luego $\deg(\mathbb{P}^n) = 1$.

② Ejercicio: Sea $X = V(f) \subseteq \mathbb{P}^n$ hipersuperficie definida por un polinomio homogéneo no-nulo de grado d. Probar que $h_X(m) = \binom{n+m}{n} - \binom{n+m-d}{n} = \frac{d\, m^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots$ y luego $\deg(X) = d$.

[Indicación: considerar la sucesión exacta $0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-d) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to \mathcal{O}_X \to 0$ (cf. Lema anterior)]

Ejemplo principal: Sea C una curva alg. proyectiva suave e irreducible de género $g(C) = g$, y sea $L \cong \mathcal{O}_C(D)$ fibrado en rectas muy amplio, ie, $\varphi_L : C \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ encajamiento cerrado (donde $n = \ell(D) - 1$). Entonces, $\mathcal{O}_C(1) \overset{\text{def}}{=} \varphi_L^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \cong L$ y luego:

$$\begin{aligned} h_C(m) &= \chi(C, \mathcal{O}_C(m)) = \chi(C, L^{\otimes m}) = \chi(C, \mathcal{O}_C(mD)) \overset{\text{RR}}{=} \deg(mD) + 1 - g \\ &= \deg(D) \cdot m + 1 - g \quad (\text{polinomio de Hilbert de } C \text{ respecto a } L) \end{aligned}$$

En otras palabras, $\deg_L(C) := \deg(\varphi_L(C)) = \deg(D)$.

Obs: El teorema de Bertini (ver §18, p. 64) implica que $\deg(\varphi_L(C))$ coincide con la cantidad de puntos en $\varphi_L(C) \cap H$, donde $H \cong \mathbb{P}^{n-1}$ es un hiperplano general en $\mathbb{P}^n$.

Caso particular importante (curvas elípticas): Sup. que C es una curva elíptica, i.e, $g(C)=1$ ($\Leftrightarrow \omega_C \cong \mathcal{O}_C$) y sea $L \simeq \mathcal{O}_C(D)$ fibrado en rectas. Si $\deg(D)=3$ (eg. $D=p+q+r$) entonces L es muy amplio. En efecto, $\deg(D)=3 \geq 2g+1$ en este caso. Además, D no es especial y luego $\ell(D) \overset{RR}{=} \deg(D)=3$. Así, L define un encajamiento cerrado

$$\varphi_L : C \hookrightarrow \mathbb{P}^2$$

donde $\deg(\varphi_L(C)) = \deg(D) = 3$. Así, toda curva elíptica es isomorfa a una cúbica en $\mathbb{P}^2$!

Notar además que en una curva elíptica C, un fibrado en rectas $L \cong \mathcal{O}_C(D)$ es muy amplio si y sólo si $\deg(D)\geq 3$. En efecto, si $\deg(D)=1$ entonces $\ell(D)\overset{RR}{=}1$ y $\mathbb{P}^{\ell(D)-1}=\{pt\}$, y si $\deg(D)=2$ entonces $\ell(D)\overset{RR}{=}2$ y $\varphi_L : C \to \mathbb{P}^1$ no puede ser un encajamiento cerrado, pues $g(C)=1\neq 0 = g(\mathbb{P}^1)$.

Más ejemplos: ① Si $g(C)=2$, todo fibrado en rectas $L\simeq \mathcal{O}_C(D)$ de $\deg(D)\geq 5 = 2g+1$ es muy amplio. Además, si $\deg(D)=5$ entonces $\ell(D)\overset{RR}{=}5+1-2=4$ y luego, toda curva de género 2 es isomorfa a una curva de grado 5 en $\mathbb{P}^3$.

② En general, el criterio "$\deg(D)\geq 2g+1$" no es óptimo: Si $C\subseteq \mathbb{P}^2$ es una curva plana de grado 4, entonces $\mathcal{O}_C(1)$ es muy amplio de $\deg(\mathcal{O}_C(1))=4$. Sin embargo, la fórmula $g(C_d)=\frac{(d-1)(d-2)}{2}$ (ver §26, p.92) implica para $d=4$ que $g(C)=3$ (y luego $2g+1=7>4$).

Aplicación (morfismo canónico): Sea C una curva alg. proyectiva suave e irreducible de género $g(C)=g$. Si $g=0$, entonces $|K_C|=\emptyset$, y si $g=1$ entonces $|K_C|$ es un punto (y luego $\varphi_{\omega_C}: C \to \mathbb{P}H^0(C,\omega_C)^\vee$ es constante).

[Lema: Sup. que $g\geq 2$, entonces $\omega_C\cong \mathcal{O}_C(K_C)$ es globalmente generado.

Dem: Basta verificar que $\ell(K_C-p)=\ell(K_C)-1$ $\forall p\in C$. Sabemos que $\ell(K_C-p)=\ell(K_C)$ ó $\ell(K_C)-1$, por lo que si suponemos por contradicción que $\ell(K_C-p)=\ell(K_C)\overset{def}{=}g$ entonces, aplicando Riemann-Roch a $D=p$ obtenemos

$$\ell(D)-\underbrace{\ell(K_C-p)}_{=g}\overset{RR}{=}\underbrace{\deg(D)}_{=1}+1-g=2-g \Rightarrow \ell(D)=2 .$$

Por otro lado, $\forall q,r\in C$ tenemos $\deg(D-q-r)=-1$ y luego $\ell(D-q-r)=0=\ell(D)-2$ $\overset{Prop}{\Longrightarrow}$ $L=\mathcal{O}_C(D)$ es muy amplio $\Rightarrow \varphi_L: C\xrightarrow{\sim}\mathbb{P}^1$ isomorfismo, contradicción! (pues $g\geq 2$) ■

Terminología (Max Noether, 1883): Sea C una curva alg. proyectiva suave e irreducible. Un g^r_d en C es un par (L,M) donde $L\simeq\mathcal{O}_C(D)\in \mathrm{Pic}(C)$ es un fibrado en rectas de $\deg(L)=d$ y $M\subseteq H^0(C,L)$ es un sistema lineal de $\dim_{\mathbb{k}}(M)=r+1$, que define

$$\varphi_M : C \longrightarrow |M|\cong \mathbb{P}^r$$

y donde (gracias al "Hecho" en §23, p.84) si $r\geq 1$ entonces $\deg(\varphi_M)=d$. Decimos que C es una curva hiperelíptica si posee un g^1_2, i.e, si $\exists f: C\to\mathbb{P}^1$ de $\deg(f)=2$:

Ejemplo: Si $g(C)=2$ entonces $\deg(\omega_C)=2g-2=2$ y $\dim_{\mathbb{k}} H^0(C,\omega_C)\overset{def}{=}2=1+1$, i.e, toda curva de género 2 es hiperelíptica y $\varphi=\varphi_{\omega_C}: C\to\mathbb{P}^1$ es de $\deg(\varphi)=2$.

[Teorema: Sea C una curva alg. proyectiva suave e irreducible de género $g(C)=g\geq 2$. Entonces, $\omega_C\simeq\mathcal{O}_C(K_C)$ es muy amplio si y sólo si C no es hiperelíptica.]

Dem: Sabemos que ω_C es muy amplio si y sólo si $\forall p,q \in C$ se tiene que $l(K_C-p-q) = l(K_C)-2$, y sabemos que $l(K_C-p-q) = l(K_C)-2$ ó $l(K_C)-1$, donde $l(K_C)=g$ por definición. Aplicando Riemann-Roch a $D=p+q$ tenemos

$$l(D) - l(K_C-p-q) = \underbrace{\deg(D)}_{=2} + 1 - g = 3-g \quad , \text{ie}, \ l(D) = 1 \text{ ó } 2. \quad (*)$$

Luego, nos reducimos a determinar si existe o no $D=p+q$ tal que $l(D)=2$ (es el único caso donde ω_C no es muy amplio):

si C posee un g_2^1 (ie, es hiperelíptica) dado por $(L, M \subseteq H^0(C,L))$, entonces cualquier sección $s \in M \setminus \{0\}$ determina $E = \operatorname{div}(s) \geq 0$ divisor efectivo de $\deg(E) = \deg(L) \overset{\text{dy}}{=} 2$, ie, $E = p_0+q_0$ para ciertos $p_0, q_0 \in C$ y $l(E) \overset{\text{dy}}{\geq} 2 \overset{(*)}{\Rightarrow} \omega_C$ no es muy amplio.

Recíprocamente, si $\exists D = p+q$ tal que $l(D)=2$ entonces $(\mathcal{O}_C(D), H^0(C, \mathcal{O}_C(D)))$ es un g_2^1 en C (pues $\deg(D)=2$ y $|D| \simeq \mathbb{P}^1$), ie, C es hiperelíptica. ■

Def: Sea C una curva alg. proyectiva suave e irreducible de género $g(C) = g \geq 3$ tal que C no es hiperelíptica (ie, ω_C es muy amplio). Entonces, el encajamiento cerrado

$$\varphi_{\omega_C} := \varphi_C : C \hookrightarrow |K_C| \cong \mathbb{P}^{g-1}$$

es llamado el encajamiento canónico de C (único módulo $\operatorname{Aut}(\mathbb{P}^{g-1}) \simeq PGL_g(k)$), y su imagen $\varphi_C(C) \subseteq \mathbb{P}^{g-1}$, de $\deg(\varphi_C(C)) = 2g-2$, es llamada una curva canónica en $\mathbb{P}^{g-1}$.

Observación / Cultura general: Sup. que $g(C) = g \geq 2$, entonces $\deg(3K_C) = 6g-6 \geq 2g+1$ y luego $L = \omega_C^{\otimes 3}$ es muy amplio. Dado que $l(3K_C) \overset{RR}{=} (6g-6)+1-g = 5g-5$, tenemos que L determina un encajamiento cerrado $\varphi_L : C \hookrightarrow \mathbb{P}^{5g-6}$, cuya imagen $C_{\text{tri}} = \varphi_L(C)$ es una curva de grado $6g-6$ en $\mathbb{P}^{5g-6}$, llamada una curva tri-canónica. Notar que: $P(m) := h_{C_{\text{tri}}}(m) \overset{\text{dy}}{=} \chi(C_{\text{tri}}, \mathcal{O}_{C_{\text{tri}}}(m)) = \chi(C, \mathcal{O}_C(3mK_C)) \overset{RR}{=} 3m(2g-2)+1-g = (6m-1)(g-1)$.

Esto es muy importante para construir el espacio de moduli $\mathcal{M}_g$, que es una variedad singular (en realidad, un "stack") cuyos puntos parametrizan clases de isomorfismos de curvas proy. suaves irred de género g (fijo): La idea es que existe (Grothendieck, 1961) un esquema de Hilbert $H := \operatorname{Hilb}^P(X)$ que parametriza subvariedades Y de $X = \mathbb{P}^{5g-6}$ con $h_Y = P$ (fijo!), y un abierto $\mathcal{U} \subseteq H$ parametriza las curvas suaves. Finalmente, usando "Teoría Geométrica de Invariantes" (o "GIT", Mumford 1965) se construye $\mathcal{M}_g = \mathcal{U}/PGL_{5g-5}$.

Usando estas ideas, Deligne y Mumford construyen en 1969 una compactificación proyectiva e irreducible (!) $\overline{\mathcal{M}}_g$ de $\mathcal{M}_g$, y estudian sus propiedades. Por ejemplo, usando "Teoría de deformación" se prueba que $\dim_{[C]}(\mathcal{M}_g) = h^1(C, T_C) \overset{\text{Serre}}{=} h^0(C, \omega_C^{\otimes 2}) \overset{RR}{=} 3g-3$ (¡ esto último fue descubierto, con otros términos, por el mismo Riemann !).

Comentario final: Algunas referencias para leer sobre tópicos adicionales (eg. "Teorema de Riemann-Hurwitz", muy útil también!) sobre curvas algebraicas son:

① Geometría Algebraica: Hartshorne, "Algebraic Geometry", Capítulo IV.

② Geometría Analítica: Miranda, "Algebraic curves and Riemann Surfaces".

③ Geometría Aritmética: Liu, "Algebraic geometry and Arithmetic curves".