Geometría Algebraica

Clase 29

Pedro Montero

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

20 de Noviembre de 2023

§5.3 Aplicaciones del Teorema de Riemann-Roch

En toda esta sección, C es una curva proyectiva suave irreducible, de género $g(C) \overset{\text{def}}{=} h^0(C, \omega_C)$. Así, para todo $L \cong \mathscr{O}_C(D) \in \operatorname{Pic}(C)$ se tiene

$$\chi(C, \mathscr{O}_C(D)) = \chi(C, \mathscr{O}_C) + \deg(D)$$

o equivalentemente, se tiene que

$$\ell(D) - \ell(K_C - D) = \deg(D) + 1 - g(C).$$

Recuerdo: El Teorema de Abel-Jacobi señala que el morfismo sobreyectivo

$$\deg : \operatorname{Pic}(C) \twoheadrightarrow \mathbb{Z},\ L \cong \mathscr{O}_C\left(\sum_{i=1}^{r} n_i \cdot p_i\right) \longmapsto \deg(L) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{r} n_i$$

es **inyectivo** (i.e., para todos $p, q \in C$, se tiene $p \sim q$) $\Leftrightarrow$ $C \cong \mathbb{P}^1$.

Si C es una curva proyectiva suave irreducible, $g(C) = 0 \Leftrightarrow C \cong \mathbb{P}^1$.

Sobre $k = \mathbb{C}$, las curvas de $g = 1$ módulo isomorfismo están en biyección con $\mathbb{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, con $\mathbb{H} \overset{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im}(z) > 0\}$. Para $g \geq 2$, Riemann notó que ellas forman una familia de $h^1(C, T_C) \overset{\text{RR}}{=} 3g - 3$ parámetros (moduli).

Prueba: Si $C \cong \mathbb{P}^1$ entonces $\omega_{\mathbb{P}^1} \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$ y luego $g(\mathbb{P}^1) \overset{\text{def}}{=} h^0(\mathbb{P}^1, \omega_{\mathbb{P}^1}) = 0$.

Si $g(C) = 0$ y $p, q \in C$ puntos distintos, entonces $D = p - q$ tiene $\deg(D) = 0$ y $\deg(K_C - D) = 2g - 2 - \deg(D) = -2 < 0$. Así,

$$\ell(D) = \ell(D) - \ell(K_C - D) \overset{\text{RR}}{=} \deg(D) + 1 - g = \deg(D) + 1 = 1.$$

Luego, $\ell(D) = 1$ y el sistema lineal

$$|D| = \{E \geq 0 \text{ divisor efectivo tal que } E \sim D\} \cong \mathbb{P}^{\ell(D)-1} \cong \{\text{pt}\}$$

tiene un **único** divisor efectivo, i.e., $E = 0$. Así, $p - q \overset{\text{def}}{=} D \sim E = 0$. $\square$

Recuerdo: Vimos que para todo $L \cong \mathscr{O}_C(D) \in \operatorname{Pic}(C)$ se tiene que

L es **amplio**[1] si y sólo si $\deg(D) > 0$.

En lo que sigue, discutiremos criterios numéricos en términos de $\deg(D)$ que permitan concluir que L es **globalmente generado** o **muy amplio**.

[1] i.e., algún **múltiplo** positivo $L^{\otimes m}$ define un incrustamiento en un espacio proyectivo.

Sea X proyectiva suave irreducible y $D = \sum_{i=1}^{r} n_i \cdot Y_i$ un divisor en X, con

$$\mathrm{Supp}(D) := \bigcup_{i=1}^{r} Y_i \subseteq X \text{ cerrado } (\textbf{soporte de } D)$$

Dada $Y \subseteq X$ hipersuperficie irreducible, definimos su multiplicidad en D por

$$\mathrm{mult}_Y(D) := \begin{cases} n_i & \text{si } Y = Y_i \text{ para cierto } i \in \{1, \dots, r\} \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

Finalmente, recordemos que el **sistema lineal** asociado a D está dado por

$$|D| := \mathbb{P}\,\mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(D)) \cong \{E \geq 0 \text{ divisor efectivo tal que } E \sim D\}$$

y que el **lugar de base** del divisor D está dado por

$$\begin{aligned} \mathrm{Bs}(D) &:= \{x \in X,\ s(x) = 0 \text{ para toda } s \in \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(D))\} \\ &\overset{\text{def}}{=} \{x \in X,\ x \in \mathrm{Supp}(E) \text{ para todo } E \geq 0 \text{ efectivo tal que } E \sim D\} \\ &\overset{\text{def}}{=} \bigcap_{E \in |D|} \mathrm{Supp}(E). \end{aligned}$$

Luego, el fibrado en rectas $L \cong \mathscr{O}_X(D)$ es **globalmente generado**, i.e.,

$$\varphi_L : X \longrightarrow |D| \cong \mathbb{P}^{h^0(D)-1} \text{ es un morfismo regular,}$$

si y sólo si $\mathrm{Bs}(D) = \varnothing$. Más aún, L es **muy amplio**[2] si y sólo si

(a) L **separa puntos**, i.e., para todo par de puntos distintos $x, y \in X$, existe una sección $s \in \mathrm{H}^0(X, L)$ tal que $s(x) = 0$ y $s(y) \neq 0$.

(b) L **separa tangentes**, i.e., para todo $x \in X$ y todo $v \in T_x X$ existe una sección $s \in \mathrm{H}^0(X, L)$ tal que $s(x) = 0$ y $(d_x s)(v) \neq 0$.

Sea C curva proyectiva suave irreducible y sea $L \cong \mathscr{O}_C(D)$. Entonces:

1. L es globalmente generado $\Leftrightarrow$ $\ell(D-p) = \ell(D) - 1$ para todo $p \in C$.
2. L es muy amplio $\Leftrightarrow$ $\ell(D-p-q) = \ell(D) - 2$ para todo par de puntos $p, q \in C$ **(no necesariamente distintos)**.

[2] i.e., φ_L define un incrustamiento cerrado.

Prueba: Para (1), sea $p \in C$ y consideramos $0 \to \mathscr{O}_C(-p) \to \mathscr{O}_C \to \mathscr{O}_p \to 0$. Tensorizando por $\mathscr{O}_C(D)$ se tiene $0 \to \mathscr{O}_C(D-p) \to \mathscr{O}_C(D) \to \mathscr{O}_p \to 0$ y

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^0(C, \mathscr{O}_C(D-p)) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{H}^0(C, \mathscr{O}_C(D)) \xrightarrow{\beta} k.$$

Así, $\ell(D) \overset{\text{def}}{=} h^0(C, \mathscr{O}_C(D)) = \dim_k \ker(\beta) + \mathrm{rg}(\beta) = \ell(D-p) + b$, con $b = \mathrm{rg}(\beta) \in \{0,1\}$. Luego, $\ell(D-p) = \ell(D)$ o bien $\ell(D) - 1$ $(\star)$.

Por otro lado, la aplicación siguiente es inyectiva para todo $p \in C$:

$$\psi_p : |D-p| \cong \mathbb{P}^{\ell(D-p)-1} \hookrightarrow |D| \cong \mathbb{P}^{\ell(D)-1}, \; E \longmapsto E + p$$

Así, $\ell(D-p) = \ell(D)$ si y sólo si ψ_p es sobreyectiva, y esto último equivale (¡por definición!) a que para todo divisor efectivo $E \geq 0$ tal que $E \sim D$ se tiene que $p \in \mathrm{Supp}(E)$, i.e., $p \in \mathrm{Bs}(D)$.

Luego, D es globalmente generado $\Leftrightarrow \ell(D-p) = \ell(D) - 1$ para todo $p \in C$.

Para (2), podemos asumir (1): L muy amplio es globalmente generado, y si $\ell(D-p-q)=\ell(D)-2$ para todos $p,q\in C$ entonces como en $(\star)$ tenemos

$$\ell(D)-2=\ell(D-p-q)=\ell(D-p) \text{ o bien } \ell(D-p)-1,$$

por lo que necesariamente $\ell(D-p)=\ell(D)-1$ para todo $p\in C$. Así,

$$\varphi_L : C \longrightarrow |D| \cong \mathbb{P}^{\ell(D)-1} \text{ es } \textbf{regular}, \text{ donde } \ell(D)=\ell(D-p-q)+2\geq 2,$$

y no-constante (pues $\ell(D)\geq 2$). Sólo resta verificar que φ_L:

(a) L separa puntos: $\forall p\neq q\in C$ existe $E\geq 0$ con $E\sim D$, $p\in \mathrm{Supp}(E)$ y $q\notin \mathrm{Supp}(E)$. Esto equivale a que q **no** es un punto de base de $|D-p|$ y, por (1), equivale a $\ell((D-p)-q)=(\ell(D)-1)-1=\ell(D)-2$.

(b) L separa tangentes: $\forall p\in C$ existe $E\geq 0$ con $E\sim D$, $p\in \mathrm{Supp}(E)$ pero $\mathrm{mult}_p(E)=1$. Esto equivale a que p **no** es un punto de base de $|D-p|$ y, por (1), equivale a su vez a que $\ell(D-2p)=\ell(D)-2$.

Así, (a) y (b) están aseguradas por la condición $\ell(D-p-q)=\ell(D)-2$. $\square$

Recuerdo: Un divisor D en una curva C es **especial** si $\ell(K_C - D) > 0$ (i.e., $h^1(C, \mathscr{O}_C(D)) > 0$). En caso contrario, $\ell(D) \overset{RR}{=} \deg(D) + 1 - g(C)$.

Por ejemplo, todo divisor D con $\deg(D) \geq 2g(C) - 1$ es **no-especial**.

Sea C curva proyectiva suave irreducible de género $g(C) = g$ y $L \cong \mathscr{O}_C(D)$.

1. Si $\deg(D) \geq 2g$, entonces L es globalmente generado.
2. Si $\deg(D) \geq 2g + 1$, entonces L es muy amplio.

Prueba: Sean $p, q \in C$. En (1), tanto D como $D - p$ son no-especiales, y así

$\ell(D) \overset{RR}{=} \deg(D) + 1 - g$ y $\ell(D - p) \overset{RR}{=} \deg(D - p) + 1 - g = (\deg(D) + 1 - g) - 1$, i.e., $\ell(D - p) = \ell(D) - 1$ para todo $p \in C$, i.e., L es globalmente generado.

En (2), los divisores D, $D - p$ y $D - p - q$ son no-especiales, y el mismo cálculo da $\ell(D - p - q) = \ell(D) - 2$ $\forall p, q \in C$, y por ende L es muy amplio. $\square$

Ejemplo: Si $C \cong \mathbb{P}^1$ entonces $L \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(d)$ es amplio $\Leftrightarrow \deg(L) \overset{\text{def}}{=} d > 0$. Más aún, en $\mathbb{P}^1$ todo divisor amplio es muy amplio (pues $\varphi_L \overset{\text{def}}{=} \nu_d$ Veronese).

Antes de poder dar más ejemplos en curvas de género ≥ 1, necesitamos definir la noción de **grado** de una variedad proyectiva $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$.

Sea $j : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ variedad proyectiva y $m \in \mathbb{Z}$. Para todo $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}(X)$ definimos $\mathscr{F}(m) := \mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_X(m)$ donde $\mathscr{O}_X(m) := j^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(m) \overset{\text{def}}{=} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(m)|_X$.

En particular, el Teorema de anulación de Serre implica que la función

$$h_{\mathscr{F}} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},\ m \longmapsto \chi(X, \mathscr{F}(m)) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i \geq 0} (-1)^i h^i(X, \mathscr{F}(m))$$

verifica que $h_{\mathscr{F}}(m) = h^0(X, \mathscr{F}(m))$ para todo $m \gg 0$. Decimos que $h_{\mathscr{F}}$ es la **función de Hilbert** de $\mathscr{F}$ respecto al incrustamiento $j : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$.

Sea $j : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ una variedad proyectiva y sea $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}(X)$. Entonces, $h_{\mathscr{F}}(m) \in \mathbb{Q}[m]$ es una función **polinomial** con coeficientes racionales.

Idea de Prueba: Como $\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F}(m)) \cong \mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, (j_* \mathscr{F}) \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(m))$ para todo $i \geq 0$, basta suponer que $X = \mathbb{P}^n$ y probar el resultado por inducción en $n \in \mathbb{N}$:

Si $n = 0$, entonces $\mathscr{F}(m) = \mathscr{F}$ para todo $m \in \mathbb{Z}$ y $h_{\mathscr{F}}(m)$ es constante. Para simplificar los cálculos, supongamos que $\mathscr{F}$ es localmente libre: el hiperplano $\iota : H \cong \mathbb{P}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ induce $0 \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n} \to \mathscr{O}_H \to 0$ y así

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}(m-1) \longrightarrow \mathscr{F}(m) \longrightarrow \mathscr{F}_H(m) \longrightarrow 0,$$

donde $\mathscr{F}_H := \mathscr{F}|_H$ haz coherente en $H \cong \mathbb{P}^{n-1}$. Luego,

$$\chi(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}(m)) = \chi(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}(m-1)) + \chi(H, \mathscr{F}_H(m)),$$

i.e., $h_{\mathscr{F}}(m) - h_{\mathscr{F}}(m-1) = h_{\mathscr{F}_H}(m)$. Por inducción, $h_{\mathscr{F}_H}(m) \in \mathbb{Q}[m]$.

Limpiando denominadores, basta probar que si $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ función tal que $g(m) := f(m) - f(m-1)$ es un polinomio en $\mathbb{Q}[m]$, entonces f también.

Dejamos esto como Ejercicio (ver Hartshorne, Ch. I, Proposition 7.3). $\square$

Grado de $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$

Sea $j : X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ variedad proyectiva irreducible de $\dim(X) = n$. Definimos

$h_X(m) := h_{\mathscr{O}_X(1)}(m) \overset{\text{def}}{=} \chi(X, \mathscr{O}_X(m))$ polinomio de Hilbert de $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$

El **grado** $\deg(X)$ de X es $n!$ veces el coeficiente principal de $h_X(m)$.

Ejemplo: Sea $X = V(f) \subseteq \mathbb{P}^n$ una hipersuperficie definida por un polinomio homogéneo no-nulo de grado d. Entonces, se prueba (Ejercicio)

$$h_X(m) = \binom{n+m}{n} - \binom{n+m-d}{n} = \frac{dm^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots \text{ y así } \deg(X) = d.$$

Ejemplo: Sea C curva de género g y sea $L = \mathscr{O}_C(D)$ muy amplio, i.e., $\varphi_L : C \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ incrustamiento cerrado, con $n \overset{\text{def}}{=} \ell(D) - 1$. Entonces, dado que $\mathscr{O}_C(1) \overset{\text{def}}{=} \varphi_L^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \cong L$ calculamos el polinomio de Hilbert de (C, L) como

$$h_C(m) \overset{\text{def}}{=} \chi(C, \mathscr{O}_C(m)) = \chi(C, L^{\otimes m}) = \chi(C, \mathscr{O}_C(mD))$$
$$\overset{\text{RR}}{=} \deg(mD) + 1 - g = \deg(D) \cdot m + 1 - g$$

En particular, $\deg_L(C) := \deg(\varphi_L(C)) = \deg(D)$.

El Teorema de Bertini implica que $\deg(\varphi_L(C))$ coincide con la cantidad de puntos en $\varphi_L(C) \cap H$, donde $H \cong \mathbb{P}^{n-1}$ hiperplano general en $\mathbb{P}^n$.

Sea C una **curva elíptica**, i.e., $g(C) = 1 \Leftrightarrow \omega_C \cong \mathscr{O}_C$. Si $L \cong \mathscr{O}_C(D)$ es un fibrado en rectas con $\deg(D) = 3$ (e.g. $D = p + q + r$) entonces L es muy amplio, pues $\deg(D) = 3 \geq 2g + 1$, y además $\ell(D) \overset{\mathsf{RR}}{=} \deg(D) = 3$. Así,

$$\varphi_L : C \hookrightarrow \mathbb{P}^2 \text{ incrustamiento cerrado.}$$

donde la curva imagen tiene grado $\deg(\varphi_L(C)) = \deg(D) = 3$. Luego,

Toda curva elíptica es isomorfa a una cúbica suave en $\mathbb{P}^2$.

De manera similar, si C es una curva de género 2 entonces todo fibrado en rectas $L \cong \mathscr{O}_C(D)$ con $\deg(D) \geq 5 = 2g + 1$ es muy amplio. Además, si $\deg(D) = 5$ entonces $\ell(D) \overset{\mathsf{RR}}{=} 5 + 1 - 2 = 4$. Así,

Toda curva de género 2 es isomorfa a una curva suave de grado 5 en $\mathbb{P}^3$.

Sea C una curva proyectiva suave irreducible de género g. Notar que si $g = 0$ (resp. $g = 1$) entonces $C \cong \mathbb{P}^1$ y $|K_C| = \varnothing$ (resp. $|K_C|$ es un punto).

Si $g \geq 2$, entonces $\omega_C \cong \mathscr{O}_C(K_C)$ es **globalmente generado**.

Prueba: Basta verificar que $\ell(K_C - p) = \ell(K_C) - 1$ para todo $p \in C$, donde ya vimos que $\ell(K_C - p) = \ell(K_C)$ o bien $\ell(K_C) - 1$.

Si $\ell(K_C - p_0) = \ell(K_C) \overset{\text{def}}{=} g$ para cierto $p_0 \in C$, consideramos el divisor $D = p_0$

$$\ell(D) - \ell(K_C - p_0) = \ell(D) - g \overset{\text{RR}}{=} \deg(D) + 1 - g = 2 - g, \text{ i.e., } \ell(D) = 2.$$

Por otro lado, para todos $q, r \in C$ tenemos que $\deg(D - q - r) = -1 < 0$ y luego $\ell(D - q - r) = 0 = \ell(D) - 2$, por lo que $L \cong \mathscr{O}_C(D)$ es muy amplio:

$$\varphi_L : C \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1 \text{ sería un isomorfismo, contradicción pues } g \geq 2. \quad \square$$

Terminología clásica (Max Noether, 1883)

Un g^r_d en C es un par (L, M) donde $L \cong \mathscr{O}_C(D) \in \mathrm{Pic}(C)$ con $\deg(L) = d$, y $M \subseteq \mathrm{H}^0(C, L)$ globalmente generado de $\dim_k(M) = r + 1$, que define

$$\varphi_M : C \longrightarrow |M| \cong \mathbb{P}^r.$$

En particular, si $r \geq 1$ entonces $\deg(\varphi_M) = d$ (ver Clase 18).

Una curva proyectiva suave irreducible C es **hiperelíptica** si posee un g^1_2, i.e., existe $f : C \to \mathbb{P}^1$ regular de $\deg(f) = 2$.

Ejemplo importante: Si $g(C) = 2$, entonces $\deg(\omega_C) = 2g - 2 = 2$ y $\dim_k \mathrm{H}^0(C, \omega_C) \overset{\text{def}}{=} 2 = 1 + 1$, i.e., **toda** curva de género 2 es hiperelíptica y la aplicación canónica $\varphi_{\omega_C} : C \longrightarrow \mathbb{P}^1$ es de $\deg(\varphi) = \deg(\omega_C) = 2$.

Sea C curva proyectiva suave irreducible de género $g \geq 2$. Entonces,

$$\omega_C \cong \mathscr{O}_C(K_C) \text{ es } \textbf{muy amplio} \Leftrightarrow C \textbf{ no es } \text{hiperelíptica}.$$

Prueba: ω_C es muy amplio $\Leftrightarrow \ell(K_C - p - q) = \ell(K_C) - 2 \overset{\text{def}}{=} g - 2$ para todos $p, q \in C$, y sabemos que $\ell(K_C - p - q) = g - 2$ o $g - 1$. Si $D := p + q$,

$$\ell(D) - \ell(K_C - p - q) \overset{\text{RR}}{=} \deg(D) + 1 - g = 3 - g,$$

y luego $\ell(D) = 1$ o $\ell(D) = 2$. Basta analizar si existe $D = p + q$ con $\ell(D) = 2$:

Si C posee un g_2^1 (i.e., C hiperelíptica) dado por $M \subseteq \mathrm{H}^0(C, L)$, entonces cualquier $s \in M \setminus \{0\}$ determina $E = \operatorname{div}(s) \geq 0$ con $\deg(E) = \deg(L) \overset{\text{def}}{=} 2$, i.e., $E = p_0 + q_0$ para ciertos $p_0, q_0 \in C$. Además, por definición de g_2^1 se tiene $\ell(E) \geq 2$ en tal caso, y por ende ω_C **no es** muy amplio.

Si ω_C no es muy amplio, existe $D = p + q$ tal que $\ell(D) = 2$, entonces el par $(\mathscr{O}_C(D), \mathrm{H}^0(C, \mathscr{O}_C(D)))$ es un g_2^1 en C pues $\deg(D) = 2$ y $|D| \cong \mathbb{P}^1$. $\square$

Si C es una curva proyectiva suave irreducible de género $g \geq 2$, entonces $\deg(3K_C) = 6g - 6 \geq 2g + 1$ y luego $L = \omega_C^{\otimes 3}$ es **muy amplio**, donde se calcula $\ell(3K_C) \overset{\text{RR}}{=} (6g - 6) + 1 - g = 5g - 5$, i.e., siempre $\varphi_L : C \hookrightarrow \mathbb{P}^{5g-6}$.

Si $f : X \to Y$ morfismo de curvas, ¿cómo comparar $g(X)$ con $g(Y)$?

En todo lo que sigue, $f : X \to Y$ es un morfismo regular no-constante entre curvas proyectivas suaves irreducibles que lo asumiremos **separable**, i.e., la extensión de cuerpos $f^* : k(Y) \hookrightarrow k(X)$ es separable (e.g. $\mathrm{car}(k) = 0$).

Recuerdo: El fibrado cotangente relativo a f se define mediante

$$f^*\omega_Y \xrightarrow{\alpha} \omega_X \longrightarrow \Omega^1_f \longrightarrow 0,$$

donde la sucesión es exacta por la izquierda cuando f es étale.

Si tensorizamos α por $(f^*\omega_Y)^\vee$ obtenemos

$$\mathscr{O}_X \longrightarrow \omega_X \otimes (f^*\omega_Y)^\vee, \text{ i.e., } s \in \mathrm{H}^0(X, \omega_X \otimes (f^*\omega_Y)^\vee).$$

Construcción: Dado que f es **separable**, por suavidad genérica existe un abierto denso $U \subseteq X$ tal que $f|_U : U \to Y$ es étale, i.e., $\alpha|_U$ es inyectivo y luego $s|_U \neq 0$. En particular, $s \not\equiv 0$ y tiene sentido definir

$$\mathscr{O}_X(\mathrm{Ram}_f) := \mathscr{O}_X(\mathrm{div}(s)) \cong \omega_X \otimes (f^*\omega_Y)^\vee,$$

el **divisor de ramificación** de f, donde además $\Omega^1_f \cong f^*(\omega_Y) \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{Ram}_f}$.

Así, para $p \in X$ el coeficiente en Ram_f es la dimensión[3] del tallo $(\Omega^1_f)_p$:

Consideramos parámetros locales $u \in \mathscr{O}_{Y,f(p)}$ y $v \in \mathscr{O}_{X,p}$. Luego, el pullback

$$f^* : \mathscr{O}_{Y,f(p)} \longrightarrow \mathscr{O}_{X,p}$$

verifica $f^*(u) = v^e w$ para cierto elemento **invertible** $w \in \mathscr{O}^*_{X,p}$ y cierto $e := e_p(f) \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ llamado el **índice de ramificación** de f en $p \in X$.

Como dv genera el $\mathscr{O}_{X,p}$-módulo $\omega_{X,p}$ y que du genera el $\mathscr{O}_{Y,f(p)}$-módulo $\omega_{Y,f(p)}$, la sucesión exacta que define a Ω^1_f implica que la dimensión de $(\Omega^1_f)_p$ es el menor entero no-negativo m tal que $\alpha(du)$ pertene a $\langle v^m \rangle \cdot dv$.

Así, dado que $f^*(u) = v^e w$ podemos calcular

$$\alpha(du) \overset{\text{def}}{=} d(f^*(u)) = d(v^e w) = e v^{e-1} w \, dv + v^e \, dw,$$

y luego el coeficiente de p en Ram_f es $e_p(f) - 1$, a menos que $\mathrm{car}(k) > 0$ y que ella divida a $e_p(f)$. En el último caso, el coeficiente es $\geq e_p(f)$.

[3] En estricto rigor, es el *largo* como módulo.

Teorema de Riemann-Hurwitz

Sea $f : X \to Y$ es un morfismo regular **separable** no-constante entre curvas proyectivas suaves irreducibles. Decimos que f tiene

1. **ramificación salvaje (wild)** en $p \in X$ si $\operatorname{car}(k) > 0$ divide a $e_p(f)$.
2. **ramificación moderada (tame)** en $p \in X$ en caso contrario.

La construcción anterior se resume en el siguiente resultado.

Teorema de Riemann-Hurwitz (Hurwitz 1891, Hasse 1935)

Sea $f : X \to Y$ es un morfismo regular **separable** no-constante entre curvas proyectivas suaves irreducibles. Entonces,

$$\omega_X \cong f^*(\omega_Y) \otimes \mathscr{O}_X(\mathrm{Ram}_f),$$

donde $\mathrm{Ram}_f = \sum_{p\in X} n_p \cdot p$ es un divisor efectivo que verifica $n_p = e_p(f) - 1$ (resp. $n_p \geq e_p$) si f tiene ramificación moderada (resp. salvaje) en $p \in X$.

Consecuencias de Riemann-Hurwitz

Sea $f : X \to Y$ como en el Teorema de Riemann-Hurwitz:

Entonces, $2g(X) - 2 = \deg(f)(2g(Y) - 2) + \deg(\mathrm{Ram}_f)$.

En particular, si f tiene ramificación moderada en todo $p \in X$, entonces

$$2g(X) - 2 = \deg(f)(2g(Y) - 2) + \sum_{p \in X} (e_p(f) - 1).$$

Prueba: Basta tomar el grado de los divisores en el Teorema de Riemann-Hurwitz, y recordar que $\deg(f^*\omega_Y) = \deg(f)\deg(\omega_Y)$. □

Entonces, $g(X) \geq g(Y)$. Más aún, $g(X) = g(Y) \Leftrightarrow f$ es un isomorfismo, o bien $X \cong Y \cong \mathbb{P}^1$, o bien X e Y son curvas elípticas.

Prueba: Como $\mathrm{Ram}_f \geq 0$, $g(X) - 1 \geq \deg(f)(g(Y) - 1)$. Si $g(Y) = 0$ entonces claramente $g(X) \geq g(Y)$ y además $g(X) = g(Y) = 0$ implica $X \cong Y \cong \mathbb{P}^1$. Si $g(Y) \geq 1$, como $\deg(f) \geq 1$, tenemos que $g(X) \geq g(Y)$. Además, $g(X) = g(Y)$ implica $g(X) = g(Y) = 1$ o bien $\deg(f) = 1$. □

Gracias por la atención

Con el lenguaje que aprendimos, hay mucha **Geometría Algebraica** que podemos aprender de otras personas, y enseñar a los demás.

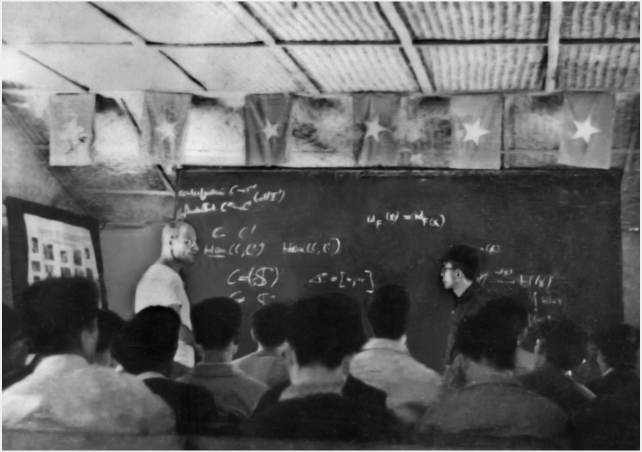

Figure: Alexander Grothendieck en Vietnam (1967).