Geometría Algebraica

Clase 28

Pedro Montero

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

15 de Noviembre de 2023

§5.2 Teorema de Riemann-Roch para curvas algebraicas

Recordemos que si C es una curva proyectiva suave e irreducible definida sobre $k = \mathbb{C}$, entonces Riemann (1857) y Roch (1865) prueban que

$$\ell(D) - \ell(K_C - D) = \deg(D) - g(C) + 1$$

para todo $L \cong \mathscr{O}_C(D) \in \mathrm{Pic}(C)$, donde $\ell(D) \overset{\text{def}}{=} h^0(C, \mathscr{O}_C(D))$.

Usando dualidad de Serre, probaremos esto para k algebraicamente cerrado.

Dualidad de Serre: En una **curva** proyectiva suave irreducible C tenemos

1. $h^1(C, \mathscr{O}_C(D)) = h^0(C, \mathscr{O}_C(K_C - D)) \overset{\text{def}}{=} \ell(K_C - D)$.
2. $g(C) \overset{\text{def}}{=} h^0(C, \omega_C) = h^1(C, \mathscr{O}_C)$.

Así, $\ell(D) - \ell(K_C - D)$ se reescribe como $h^0(C, \mathscr{O}_C(D)) - h^1(C, \mathscr{O}_C(D))$.

De manera similar, el término $1 - g(C)$ se reescribe como

$$1 - g(C) = 1 - h^1(C, \mathscr{O}_C) = h^0(C, \mathscr{O}_C) - h^1(C, \mathscr{O}_C)$$

pues C es una curva proyectiva irreducible.

Reformulando Riemann-Roch

Cultura general (género aritmético)

Si C curva proyectiva irreducible (*no necesariamente suave*), se define su **género aritmético** como $p_a(C) := h^1(C, \mathscr{O}_C)$.

Recuerdo: Si X variedad proyectiva de $\dim(X) = n$ y $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}(X)$, se define $\chi(X, \mathscr{F}) := \sum_{i \geq 0} (-1)^i h^i(X, \mathscr{F})$. Además, si $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{H} \to 0$ es una sucesión exacta de haces coherentes entonces

$$\chi(X, \mathscr{G}) = \chi(X, \mathscr{F}) + \chi(X, \mathscr{H}).$$

Con la notación anterior, el Teorema de Riemann-Roch se reduce a probar que para todo $L \cong \mathscr{O}_C(D) \in \operatorname{Pic}(C)$ se tiene que

$$\chi(C, \mathscr{O}_C(D)) = \chi(C, \mathscr{O}_C) + \deg(D).$$

Estrategia: Relacionar $\mathscr{O}_C(D)$ y $\mathscr{O}_C$, e interpretar $\deg(D)$ como la característica de Euler-Poincaré de algún haz.

Relacionando $\mathscr{O}_C(D)$ y $\mathscr{O}_C$

Recuerdo: Sea X variedad proyectiva suave irreducible y $j : D \hookrightarrow X$ hipersuperficie **irreducible** (i.e., un divisor primo). Entonces, $\mathcal{I}_D \cong \mathscr{O}_X(-D)$ y hay una sucesión exacta de $\mathscr{O}_X$-módulos

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_X(-D) \longrightarrow \mathscr{O}_X \longrightarrow j_*\mathscr{O}_D \longrightarrow 0$$

donde $\mathrm{H}^i(X, j_*\mathscr{O}_D) \cong \mathrm{H}^i(D, \mathscr{O}_D)$ para todo $i \geq 0$.

Si $D = \sum_{i=1}^r n_i \cdot Y_i$ **divisor efectivo** (i.e., $n_i \geq 0$ para todo i) entonces se tiene la misma sucesión exacta, pero $j_*\mathscr{O}_D$ es el cociente de $\mathscr{O}_X$ por el ideal de funciones regulares que se anulan en Y_i con multiplicidad $\geq n_i$.

Caso particular importante: Sea C curva proyectiva suave irreducible y $D = \sum_{i=1}^r n_i \cdot p_i$ divisor efectivo, donde sólo escribimos los $n_i \geq 1$. Entonces,

$$\mathrm{H}^0(D, \mathscr{O}_D) \cong \bigoplus_{i=1}^r \mathscr{O}_{C,p_i}/\mathfrak{m}_{p_i}^{n_i}.$$

Luego, dado que $\dim(D) = 0$, tenemos que

$$\chi(D, \mathscr{O}_D) = h^0(D, \mathscr{O}_D) = n_1 + \ldots + n_r \overset{\text{def}}{=} \deg(D).$$

Más aún, notar que si $L \in \mathrm{Pic}(C)$ y $D = p$ es un único punto, entonces (escogiendo una vecindad $p \in U \subseteq C$ tal que $L|_U \cong \mathscr{O}_U$) la **fórmula de proyección** implica

$$L \otimes \mathscr{O}_D := L \otimes j_*\mathscr{O}_D \cong j_*(j^*L \otimes \mathscr{O}_D) \cong j_*\mathscr{O}_D \overset{\text{def}}{=} \mathscr{O}_D,$$

i.e., todo fibrado en rectas en un punto es trivial. Análogamente, y denotando $j_*\mathscr{O}_D$ por $\mathscr{O}_D$, tenemos que

$L \otimes \mathscr{O}_D \cong \mathscr{O}_D$ para todo divisor efectivo D en la curva C.

Teorema de Riemann-Roch

Sea C una curva proyectiva suave irreducible, de género $g(C) \overset{\text{def}}{=} h^0(C, \omega_C)$. Entonces, para todo $L \cong \mathscr{O}_C(D) \in \mathrm{Pic}(C)$ se tiene que

$$\chi(C, \mathscr{O}_C(D)) = \chi(C, \mathscr{O}_C) + \deg(D)$$

o equivalentemente, se tiene que

$$\ell(D) - \ell(K_C - D) = \deg(D) + 1 - g(C).$$

Prueba: D es diferencia de divisores **efectivos** $D = E - F$. Obtenemos

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_C(-E) \longrightarrow \mathscr{O}_C \longrightarrow \mathscr{O}_E \longrightarrow 0$$

sucesión exacta asociada a E, y una sucesión exacta asociada a F

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_C(-F) \longrightarrow \mathscr{O}_C \longrightarrow \mathscr{O}_F \longrightarrow 0.$$

Tensorizando por $L = \mathscr{O}_C(E)$, con $L \otimes \mathscr{O}_E \cong \mathscr{O}_E$ y $L \otimes \mathscr{O}_F \cong \mathscr{O}_F$, tenemos

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_C \longrightarrow \mathscr{O}_C(E) \longrightarrow \mathscr{O}_E \longrightarrow 0, \tag{$\star$}$$

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_C(E - F) \cong \mathscr{O}_C(D) \longrightarrow \mathscr{O}_C(E) \longrightarrow \mathscr{O}_F \longrightarrow 0, \tag{$\star\star$}$$

y $(\star)$ implica $\chi(C, \mathscr{O}_C(E)) = \chi(C, \mathscr{O}_C) + \chi(E, \mathscr{O}_E) = \chi(C, \mathscr{O}_C) + \deg(E)$, pues $\chi(E, \mathscr{O}_E) = \deg(E)$. Similarmente, $(\star\star)$ implica que $\chi(C, \mathscr{O}_C(E)) = \chi(C, \mathscr{O}_C(D)) + \deg(F)$. Así, deducimos que

$$\begin{aligned} \chi(C, \mathscr{O}_C(D)) &= \chi(C, \mathscr{O}_C(E)) - \deg(F) \\ &= \chi(C, \mathscr{O}_C) + (\deg(E) - \deg(F)) \overset{\text{def}}{=} \chi(C, \mathscr{O}_C) + \deg(D) \quad \square \end{aligned}$$

Consecuencias directas de Riemann-Roch

Sea C curva proyectiva suave irreducible de género $g(C) = g$.

1. Si $D = K_C$, entonces el Teorema de Riemann-Roch se reduce a
$$\ell(K_C) - \ell(0) \overset{\text{def}}{=} h^0(C, \omega_C) - h^0(C, \mathscr{O}_C) = g - 1 \overset{\text{RR}}{=} \deg(K_C) - g + 1.$$
Así, tenemos que $\deg(\omega_C) \overset{\text{def}}{=} \deg(K_C) = 2g - 2$. En particular,
$$\deg(T_C) = \deg(-K_C) = 2 - 2g \text{ (**Teorema de Gauss-Bonnet**)}$$
2. Notar que $\ell(D) = h^0(C, \mathscr{O}_C(D)) = 0$ si $\deg(D) < 0$: si existiera $E \geq 0$ tal que $E \sim D$ entonces $\deg(D) = \deg(E) \geq 0$, una contradicción. Así, como $\deg(K_C - D) = 2g - 2 - \deg(D)$, tenemos que:
$$\text{Si } \deg(D) \geq 2g - 1 \text{ entonces } \ell(K_C - D) = h^1(C, \mathscr{O}_C(D)) = 0$$
y en tal caso $\ell(D) = \deg(D) - g + 1 \geq g$ (**Riemann-Roch**).

Decimos que D es un **divisor especial** si
$$\ell(K_C - D) > 0 \text{ o, equivalentemente, } h^1(C, \mathscr{O}_C(D)) > 0.$$
En caso contrario, se tiene $\ell(D) \overset{\text{RR}}{=} \deg(D) + 1 - g(C)$.

3. Supongamos que $\deg(D) = 2g - 2$ pero $D \not\sim K_C$ (i.e., no existe $f \in k(C)^*$ con $D - K_C = \mathrm{div}(f)$). Entonces, $\ell(D) = g - 1$.

   En efecto, tenemos que

$$\ell(D) \overset{\text{RR}}{=} 2g - 2 - g + 1 + \ell(K_C - D) = g - 1 + \ell(K_C - D).$$

   Luego, si $\ell(K_C - D) \geq 1$ existiría $E \geq 0$ **efectivo** tal que $E \sim K_C - D$, y tendríamos que $\deg(E) = \deg(K_C - D) = 0$, i.e, $E = 0$ y así $D \sim K_C$.

   En otras palabras, todo divisor D con $\deg(D) = \deg(K_C)$ cumple

$$D \sim K_C \text{ si y sólo si } \ell(K_C - D) = h^1(C, \mathscr{O}_C(D)) \neq 0,$$

   i.e., D es especial.

Riemann-Roch para curvas elípticas

Supongamos $\omega_C \cong \mathscr{O}_C$ trivial (i.e., $K_C = 0$), entonces $g \stackrel{\text{def}}{=} h^0(C, \omega_C) = 1$.

Recíprocamente, si $g = 1$ entonces $\deg(K_C) = \deg(-K_C) = 0$ gracias a (1). Así, el Teorema de Riemann-Roch se reduce a

$$\ell(D) - \ell(K_C - D) = \deg(D).$$

En particular, si $D = -K_C$ obtenemos $\ell(-K_C) = \ell(2K_C) \geq 1$ pues si $s \in \mathrm{H}^0(C, \omega_C) \setminus \{0\}$ es no-nula, entonces $s^{\otimes 2} \in \mathrm{H}^0(C, \omega_C^{\otimes 2})$ es no-nula.
En otras palabras, el ω_C verifica $h^0(C, \omega_C) \neq 0$ y $h^0(C, \omega_C^\vee) \neq 0$, y por ende $\omega_C \cong \mathscr{O}_C$ es trivial. De este modo:

$$g(C) = 1 \text{ si y sólo si } \omega_C \cong \mathscr{O}_C$$

y decimos que C es una **curva elíptica**. Para $g = 1$, Riemann-Roch nos dice:

$$\ell(D) = \ell(-D) + \deg(D).$$

Así, $\ell(D) = \deg(D)$ si $\deg(D) \geq 1$ y $\ell(D) = 0$ si $\deg(D) = 0$ y $D \not\sim 0$.

Sea C curva proyectiva suave irreducible y $L \cong \mathscr{O}_C(D) \in \mathrm{Pic}(C)$. Entonces,

L es amplio si y sólo si $\deg(L) \overset{\text{def}}{=} \deg(D) > 0$.

Prueba: Ya hemos vimos que si L amplio, $\deg(L) > 0$. Supongamos $\deg(D) > 0$, y notemos que por Riemann-Roch se tiene que para $m \gg 0$

$$\ell(mD) - \underbrace{\ell(K_C - mD)}_{=0} = h^0(C, \mathscr{O}_C(mD)) \overset{\text{RR}}{=} m\deg(D) + 1 - g > 0.$$

Así, reemplazando L por $L^{\otimes m}$, podemos suponer D **efectivo**. Luego,

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_C(-D) \longrightarrow \mathscr{O}_C \longrightarrow \mathscr{O}_D \longrightarrow 0$$

que al tensorizar por $\mathscr{O}_C(mD)$, nos da una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_C((m-1)D) \longrightarrow \mathscr{O}_C(mD) \longrightarrow \mathscr{O}_D \longrightarrow 0.$$

En cohomología, obtenemos una sucesión exacta larga

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^0(C, \mathscr{O}_C((m-1)D)) \longrightarrow \mathrm{H}^0(C, \mathscr{O}_C(mD)) \to \mathrm{H}^0(D, \mathscr{O}_D)$$
$$\longrightarrow \mathrm{H}^1(C, \mathscr{O}_C((m-1)D)) \twoheadrightarrow \mathrm{H}^1(C, \mathscr{O}_C(mD)) \longrightarrow 0$$

por anulación de Grothendieck, pues $\dim(D) = 0$.

Si $h_m := h^1(C, \mathscr{O}_C(mD))$ entonces $h_{m-1} \geq h_m \geq h_{m+1} \geq h_{m+2} \geq \cdots$ y así, dado que $h_m < +\infty$, obtenemos que

$\mathrm{H}^1(C, \mathscr{O}_C((m-1)D)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(C, \mathscr{O}_C(mD))$ isomorfismo para todo $m \gg 0$.

Así, la aplicación siguiente es sobreyectiva para todo $m \gg 0$

$$\mathrm{H}^0(C, \mathscr{O}_C(mD)) \twoheadrightarrow \mathrm{H}^0(D, \mathscr{O}_D) \cong \bigoplus_{i=1}^{r} \mathscr{O}_{C,p_i}/\mathfrak{m}_{p_i}^{n_i}$$

donde el divisor $D = \sum_{i=1}^{r} n_i \cdot p_i$ está dado por $n_i > 0$ y $p_i \in C$. En particular,

$$\mathrm{ev}_x : \mathrm{H}^0(C, \mathscr{O}_C(mD)) \twoheadrightarrow \mathscr{O}_C(mD)_x$$

es sobreyectivo para todo $x = p_i$ que aparece en $D = \sum_{i=1}^{r} n_i \cdot p_i$ con $n_i > 0$.

Por otra parte, $s \in \mathrm{H}^0(C, \mathscr{O}_C(mD))$ con $\mathrm{div}(s) = mD$ es tal que $s(x) \neq 0$ para $x \neq p_1, \ldots, p_r$. Así, $M := \mathscr{O}_C(mD)$ es **globalmente generado**, i.e.,

$$\varphi_M : C \longrightarrow \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(C, M)^\vee) \cong \mathbb{P}^n \text{ es un morfismo regular.}$$

Como $M \not\cong \mathscr{O}_C$ (para $m \gg 0$ se tiene $\ell(mD) \geq 2$ por Riemann-Roch) tenemos que φ_M es un morfismo no-constante. Más aún, dado que C es una curva proyectiva, se tiene que φ_M es un morfismo **finito** y por ende

$$\varphi_M^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \cong M \overset{\text{def}}{=} \mathscr{O}_C(mD) \text{ es amplio.}$$

Luego, $L = \mathscr{O}_C(D)$ es amplio también. $\square$

Ejemplo: Sea C una curva proyectiva suave irreducible de género $g(C) = g$. El resultado anterior y $\deg(\omega_C) = 2g - 2$ implican que C es:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Fano} \\ \text{Calabi-Yau} \\ \text{Can. polarizada} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \omega_C^\vee \text{ amplio} \\ \omega_C \cong \mathscr{O}_C \\ \omega_C \text{ amplio} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} g = 0 \\ g = 1 \\ g \geq 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \kappa(C) = -\infty \\ \kappa(C) = 0 \\ \kappa(C) = 1 \end{array} \right\}$$

Hecho (Ejercicio de Lectura, ver Lema 5.2.12)

Sea C curva proyectiva suave irreducible y $E \to C$ fibrado de $\mathrm{rg}(E) = r$. Entonces, E admite una **filtración** decreciente

$$E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots \subseteq E_{r-1} \subseteq E_r := E$$

por sub-fibrados vectoriales $E_i \to C$ de $\mathrm{rg}(E_i) = i$.

Sea C una curva algebraica proyectiva suave e irreducible, y sea $E \longrightarrow C$ un fibrado vectorial de $\mathrm{rg}(E) = r$. Definimos el **grado** de E como el entero

$$\deg(E) := \deg(\det(E)) \stackrel{\text{def}}{=} \deg(\Lambda^r E)$$

donde $\det(E) \cong \Lambda^r E \in \mathrm{Pic}(C)$ es el fibrado en rectas determinante.

Veamos el caso 1-dimensional del **Teorema de Hirzebruch-Riemann-Roch**, probado por F. Hirzebruch (1954) y generalizado por Grothendieck (1957).

Teorema de Hirzebruch-Riemann-Roch (HRR)

Sea C curva proyectiva suave irreducible de género $g(C) = g$. Entonces, para todo fibrado vectorial $E \to C$ de $\mathrm{rg}(E) = r$ y $\deg(E) = d$, se tiene

$$\chi(C,E) = \mathrm{rg}(E)\chi(C,\mathscr{O}_C) + \deg(E) = r(1-g) + d.$$

Prueba (inducción en r): Podemos asumir $r \geq 2$ y considerar la filtración $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots \subseteq E_{r-1} \subseteq E_r := E$ por sub-fibrados $E_i \to C$ de $\mathrm{rg}(E_i) = i$ con

$$0 \longrightarrow E_i \longrightarrow E_{i+1} \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow L_i \overset{\text{def}}{=} E_{i+1}/E_i \longrightarrow 0 \text{ sucesión exacta de fibrados}$$

con $L_i \in \mathrm{Pic}(C)$. Así, nos reducimos a probar que para toda

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow Q \longrightarrow 0 \text{ sucesión exacta de fibrados en } C$$

se tiene HRR para E y Q implican HRR para F. Para ello, observamos que:

(a) $\mathrm{rg}(F) = \mathrm{rg}(E) + \mathrm{rg}(Q)$.

(b) $\det(F) \cong \det(E) \otimes \det(Q)$ y luego $\deg(F) = \deg(E) + \deg(Q)$.

(c) $\chi(C,F) = \chi(C,E) + \chi(C,Q)$. □

Hirzebruch y Grothendieck

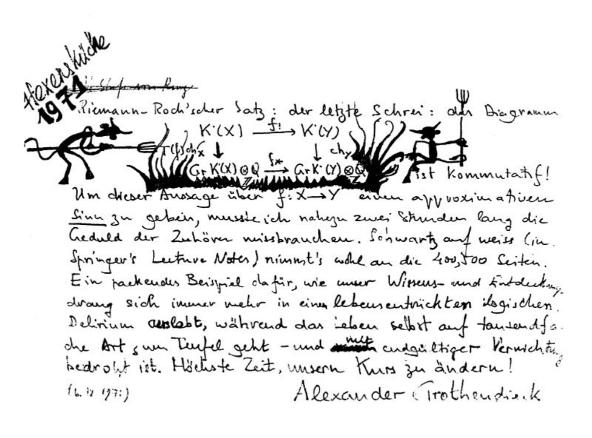
Figure: Alexander Grothendieck y Friedrich Hirzebruch.

La versión general del **Teorema de Hirzebruch-Riemann-Roch** establece

$$\chi(X, E) = \int_X \mathrm{ch}(E)\,\mathrm{td}(X).$$

Para más detalles, recomiendo las notas de Andreas Gathmann (2002-2003).

El **Teorema de Grothendieck-Hirzebruch-Riemann-Roch**, que afima que para $f : X \to Y$ se cumple $\mathrm{ch}(f_! \mathscr{F}^\bullet)\mathrm{td}(Y) = f_*(\mathrm{ch}(\mathscr{F}^\bullet)\mathrm{td}(X))$.



Hexenküche 1971

~~Riemann-Roch'scher Satz~~
Riemann-Roch'scher Satz: der letzte Schrei: das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K^\cdot(X) & \xrightarrow{f_!} & K^\cdot(Y) \\ \downarrow {\scriptstyle T(f)ch_X} & & \downarrow {\scriptstyle ch_Y} \\ Gr\,K^\cdot(X)\otimes\mathbb{Q} & \xrightarrow{f_*} & Gr\,K^\cdot(Y)\otimes\mathbb{Q} \end{array}$$

ist kommutativ!

Um dieser Aussage über $f : X \to Y$ einen approximativen Sinn zu geben, musste ich nahezu zwei Stunden lang die Geduld der Zuhörer missbrauchen. Schwarz auf weiss (in Springer's Lecture Notes) nimmt's wohl an die 400, 500 Seiten. Ein packendes Beispiel dafür, wie unser Wissens- und Entdeckungsdrang sich immer mehr in einem lebensentrückten logischen Delirium auslebt, während das Leben selbst auf tausendfache Art zum Teufel geht – und mit endgültiger Vernichtung bedroht ist. Höchste Zeit, unsern Kurs zu ändern!

(6.12.1971)

Alexander Grothendieck

Figure: Teorema de GHRR.

Construcción: Sea X una variedad algebraica proyectiva suave e irreducible, y sean E y Q fibrados vectoriales en X. Una **extensión** de Q por E es una sucesión exacta corta de fibrados vectoriales

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} Q \longrightarrow 0. \qquad (S)$$

Decimos que la extensión (S) **escinde**[1] (o que es trivial) si $F \cong E \oplus Q$. Es un Ejercicio clásico de álgebra probar que

(S) es trivial $\Leftrightarrow$ Existe una **sección** $s : Q \to F$ verificando $\beta \circ s = \mathrm{Id}_Q$.

Si $Q = L \in \mathrm{Pic}(X)$ tenemos la sucesión exacta tensorizada siguiente

$$0 \longrightarrow E \otimes L^\vee \xrightarrow{\iota} F \otimes L^\vee \xrightarrow{\pi} \mathscr{O}_X \longrightarrow 0. \qquad (S) \otimes L^\vee$$

Luego, (S) es trivial si y sólo si existe una sección $s : \mathscr{O}_X \to F \otimes L^\vee$ tal que $\pi \circ s = \mathrm{Id}_{\mathscr{O}_X}$. Sabemos (ver Clase 22) que esto equivale a la existencia de

$$s \in \mathrm{H}^0(X, F \otimes L^\vee) \text{ tal que } \Gamma(\pi)(s) = 1 \in \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X). \qquad (\star)$$

[1] En inglés, *split*.

Al considerar la sucesión exacta larga en cohomología

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}^0(X, F \otimes L^\vee) \xrightarrow{\Gamma(\pi)} \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X) \cong k \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^1(X, E \otimes L^\vee) \longrightarrow \cdots$$

y como $\mathrm{Im}(\Gamma(\pi)) = \ker(\delta)$, $(\star)$ equivale a que la clase de cohomología

$$\delta_{(S)} := \delta(1) \text{ sea nula en } \mathrm{H}^1(X, E \otimes L^\vee) \cong \mathrm{Ext}^1(L, E).$$

En conclusión, (S) es trivial $\Leftrightarrow$ $\delta_{(S)} = 0$ en $\mathrm{H}^1(X, E \otimes L^\vee)$.

Lo anterior, junto con HRR, permite clasificar los fibrados vectoriales en $\mathbb{P}^1$.

Teorema de Birkhoff-Grothendieck (1957)

Sea $E \to \mathbb{P}^1$ un fibrado vectorial de $\mathrm{rg}(E) = r$ en $\mathbb{P}^1$. Entonces,

$$E \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(d_1) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(d_2) \oplus \cdots \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(d_r)$$

para únicos enteros $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_r$.

Conjetura (Hartshorne)

Si $n \geq 7$, todo fibrado E de rango 2 en $\mathbb{P}^n$ escinde $E \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(a) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(b)$.

Teorema de Birkhoff-Grothendieck

Prueba: Si $m \gg 0$, entonces $\mathrm{H}^1(\mathbb{P}^1, E^\vee(m) \otimes \omega_{\mathbb{P}^1}) = 0$ por anulación de Serre aplicado al haz coherente $\mathscr{F} = E^\vee \otimes \omega_{\mathbb{P}^1}$. Luego, por dualidad de Serre tenemos $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^1, E(-m)) = 0$ para $m \gg 0$.

Por otra parte HRR en $\mathbb{P}^1$ (con $g \overset{\text{def}}{=} h^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)) = 0$) implica

$$h^0(\mathbb{P}^1, E) = r(1-g) + d + h^1(C, E) \geq d + r.$$

Reemplazando E por $E(\ell) \overset{\text{def}}{=} E \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\ell)$, y notando que $\det(E(\ell)) \cong \det(E) \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(r\ell)$, tenemos que $\deg(E(\ell)) = d + r\ell$. Así, podemos asumir que $d = \deg(E) \in \{0, -1, \ldots, -(r-1)\}$ y con ello $h^0(\mathbb{P}^1, E) \geq 1$.

Así, fijamos $m \in \mathbb{N}$ **maximal** tal que $h^0(\mathbb{P}^1, E(-m)) \neq 0$.

Sea $s \in \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^1, E(m)) \smallsetminus \{0\}$ correspondiendo a un morfismo de $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}$-módulos $s : \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1} \to E(m)$, i.e., $s^\vee : (E(m))^\vee \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}$. La imagen $\mathrm{Im}(s^\vee) \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-D) \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-k)$ es el haz de ideales de cierto $D \geq 0$ de grado $k \geq 0$.

Dualizando, $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(k) \hookrightarrow E(-m)$ y luego obtenemos $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1} \hookrightarrow E(-m-k)$ que corresponde a una sección no-nula de $E(-m-k)$. Como m maximal, $k = 0$.

De lo anterior, obtenemos $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1} \hookrightarrow E(-m)$ y así una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \longrightarrow E \longrightarrow Q \longrightarrow 0, \qquad (S)$$

donde $Q \cong \bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(d_i)$ por hipótesis de inducción.

Debemos demostrar que la extensión (S) es trivial:

Observemos que $d_i \leq m$ para todo i: si e.g. $\ell := d_1 - m - 1 \geq 0$ entonces, tensorizando (S) por el fibrado en rectas $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-m-1)$ obtenemos

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \longrightarrow E(-m-1) \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\ell) \oplus Q' \longrightarrow 0,$$

y con ello obtendríamos una sucesión exacta en cohomología

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^1, E(-m-1)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\ell)) \oplus \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^1, Q') \longrightarrow 0$$

con $h^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) = h^1(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) = 0$. Así, $h^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\ell)) \geq 1$ implicaría $h^0(\mathbb{P}^1, E(-m-1)) \neq 0$, contradiciendo la maximalidad de m.

Teorema de Birkhoff-Grothendieck

Considerando la sucesión exacta dual de (S), obtenemos una extensión

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-d_i) \longrightarrow E^\vee \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-m) \longrightarrow 0, \qquad (S)^\vee$$

cuya clase asociada $\delta_{(S)^\vee}$ pertenece al grupo de cohomología

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \otimes Q^\vee) \cong \bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathrm{H}^1(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(m - d_i)) = 0,$$

donde la última anulación se obtiene pues $m - d_i \geq 0$ (Ver Clase 22).

Luego, $E \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \oplus Q$ es una suma directa de fibrados en rectas.

La unicidad de los $d_1 \leq \cdots \leq d_r$ se deduce del hecho (Ejercicio) que podemos recuperar d_i a partir de $h^j(\mathbb{P}^1, E(m))$ para ciertos $j \in \{0,1\}$ y $m \in \mathbb{Z}$. $\square$