Geometría Algebraica

Clase 27

Pedro Montero

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

13 de Noviembre de 2023

§5.1 Dualidad de Grothendieck y Dualidad de Serre

Teorema (Grothendieck, 1957)

Sea X variedad proyectiva suave irreducible de $\dim(X) = n$. Entonces:

1. $\dim_k \mathrm{H}^n(X, \omega_X) = 1$. En particular, toda aplicación k-lineal no-nula
$$t : \mathrm{H}^n(X, \omega_X) \xrightarrow{\sim} k \text{ es un isomorfismo.}$$
Decimos que t es un **morfismo de traza**, o símplemente *una traza*.

2. Sea $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}(X)$. Para toda traza $t : \mathrm{H}^n(X, \omega_X) \xrightarrow{\sim} k$ asociamos un morfismo de functores **contravariantes** en $\mathscr{F}$
$$D : \mathrm{Hom}_X(\mathscr{F}, \omega_X) \longrightarrow \mathrm{H}^n(X, \mathscr{F})^\vee, \ f \longmapsto D(f) := t \circ \mathrm{H}^n(f),$$
donde $\mathrm{H}^n(f) : \mathrm{H}^n(X, \mathscr{F}) \to \mathrm{H}^n(X, \omega_X)$ inducido por $f : \mathscr{F} \to \omega_X$. Entonces, la transformación natural
$$D : \mathrm{Hom}_X(\,\cdot\,, \omega_X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n(X, \,\cdot\,)^\vee \text{ es un isomorfismo.}$$

3. El isomorfismo D se extiende a un isomorfismo functorial en $\mathscr{F}$
$$D : \mathrm{Ext}^i(\mathscr{F}, \omega_X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{n-i}(X, \mathscr{F})^\vee \text{ para todo } i \geq 0.$$

Paso 1. Caso $X = \mathbb{P}^n$, donde $\omega_{\mathbb{P}^n} \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)$.

Ya calculamos $\mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \omega_{\mathbb{P}^n}) \cong k$, i.e., (1). Así, escogiendo una traza $t : \mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \omega_{\mathbb{P}^n}) \xrightarrow{\sim} k$ obtenemos (de manera functorial) un morfismo

$$D : \mathrm{Hom}(\mathscr{F}, \omega_{\mathbb{P}^n}) \longrightarrow \mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \mathscr{F})^\vee$$

para todo haz coherente $\mathscr{F}$ en $\mathbb{P}^n$. $\square$

Paso 2. En el caso $X = \mathbb{P}^n$, D es un isomorfismo.

Notar que $\mathrm{Hom}(\,\cdot\,, \omega_{\mathbb{P}^n})$ y $\mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \,\cdot\,)^\vee$ definen functores **contravariantes** exactos por la izquierda, i.e., si $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{H} \to 0$ es una sucesión exacta de haces coherentes en $\mathbb{P}^n$, entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathscr{H}, \omega_{\mathbb{P}^n}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathscr{G}, \omega_{\mathbb{P}^n}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathscr{F}, \omega_{\mathbb{P}^n}) \text{ es exacta.}$$

De manera similar, por Anulación de Grothendieck, la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \mathscr{H})^\vee \longrightarrow \mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \mathscr{G})^\vee \longrightarrow \mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \mathscr{F})^\vee \text{ es exacta.}$$

Estrategia de Prueba (4 pasos)

El Lema de Serre implica que para todo $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}(\mathbb{P}^n)$ existen $r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ y $m \gg 0$ tales que $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-m)^{\oplus r} \twoheadrightarrow \mathscr{F}$ sobreyectivo. Así, las dos sucesiones anteriores permiten escribir[1]

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\mathscr{F}, \omega_{\mathbb{P}^n}) \arrow[r] \arrow[d, "D"] & \mathrm{Hom}(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-m), \omega_{\mathbb{P}^n})^{\oplus r} \arrow[d, "D"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \mathscr{F})^\vee \arrow[r] & (\mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-m))^\vee)^{\oplus r}
\end{tikzcd}$$

y reducirnos a verificar que el morfismo siguiente es un isomorfismo

$$D : \mathrm{Hom}(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-m), \omega_{\mathbb{P}^n}) \cong \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(m) \otimes \omega_{\mathbb{P}^n}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-m))^\vee$$

i.e., que para todo m existe un emparejamiento perfecto

$$\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(m) \otimes \omega_{\mathbb{P}^n}) \times \mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-m)) \longrightarrow \mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \omega_{\mathbb{P}_n}) \cong k.$$

Esto ya fue probado vía cohomología de Čech. Así, (2) se cumple en $\mathbb{P}^n$. □

[1] Más aún, el kernel de $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-m)^{\oplus r} \twoheadrightarrow \mathscr{F}$ es suma directa de fibrados en recta.

Estrategia de Prueba (4 pasos)

Paso 3. Extender $D : \mathrm{Hom}(\mathscr{F}, \omega_{\mathbb{P}^n}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \mathscr{F})^\vee$ a un isomorfismo
$$D : \mathrm{Ext}^i(\mathscr{F}, \omega_{\mathbb{P}^n}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{n-i}(\mathbb{P}^n, \mathscr{F})^\vee \text{ para todo } i \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Para esto necesitaremos hablar de δ-functores, probando así (3) para $\mathbb{P}^n$.

Paso 4. Caso general $j : X \hookrightarrow Y$, donde $Y = \mathbb{P}^{n+r}$ (i.e., $\mathrm{codim}_Y(X) = r$).

Para $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}(X)$ tenemos (e.g. Leray) que $\mathrm{H}^{n-i}(X, \mathscr{F}) \cong \mathrm{H}^{n-i}(Y, j_*\mathscr{F})$.
Luego, la dualidad de Grothendieck para $Y = \mathbb{P}^{n+r}$ induce isomorfismos

$$\mathrm{H}^{n-i}(X, \mathscr{F})^\vee \cong \mathrm{H}^{n-i}(Y, j_*\mathscr{F})^\vee \underset{\mathsf{DG}}{\cong} \mathrm{Ext}^{n+r-(n-i)}(j_*\mathscr{F}, \omega_Y) = \mathrm{Ext}^{i+r}(j_*\mathscr{F}, \omega_Y)$$

Así, nos reducimos a probar el isomorfismo

$$\mathrm{Ext}^i(\mathscr{F}, \omega_X) \cong \mathrm{Ext}^{i+r}(j_*\mathscr{F}, \omega_Y).$$

Es la parte más delicada de la prueba (requiere relacionar $\mathscr{E}xt$ con Ext).

Estrategia de Prueba (4 pasos)

Una vez probado $\mathrm{Ext}^i(\mathscr{F},\omega_X) \cong \mathrm{H}^{n-i}(X,\mathscr{F})^\vee$ para todo $i \geq 0$, notamos:

(a) El caso $i = 0$ implica $\mathrm{Hom}(\mathscr{F},\omega_X) \cong \mathrm{H}^n(X,\mathscr{F})^\vee$, i.e., (2) para X.

(b) El caso $i = 0$ y $\mathscr{F} = \omega_X$ implica

$$\mathrm{H}^n(X,\omega_X) \cong \mathrm{Hom}(\omega_X,\omega_X)^\vee \cong \mathrm{H}^0(X,\omega_X^\vee \otimes \omega_X)^\vee \cong \mathrm{H}^0(X,\mathscr{O}_X)^\vee \cong k$$

i.e., (1) para X.

Así, concluímos el Teorema de Dualidad de Grothendieck para toda variedad proyectiva suave e irreducible X.

Sea X variedad proyectiva suave irreducible, $\dim(X) = n$ y $\omega_X = \det(\Omega^1_X)$. Para probar (3) estudiaremos las familias de functores contravariantes

$$\{\mathscr{F} \longmapsto \mathrm{Ext}^i(\mathscr{F},\omega_X)\}_{i\in\mathbb{N}} \quad \text{y} \quad \{\mathscr{F} \longmapsto \mathrm{H}^{n-i}(X,\mathscr{F})^\vee\}_{i\in\mathbb{N}}$$

desde $\mathscr{O}_X$-$\mathbf{Mod}$ a la categoría de k-e.v. Veremos que son **δ-functores**.

Un δ-**functor** entre dos categorías abelianas $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ consiste en una colección de functores contravariantes $\{T^i : \mathscr{C} \to \mathscr{D}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ con morfismos de conexión $\delta^i : T^i(A) \to T^{i+1}(C)$ para toda $0 \to A \to B \to C \to 0$ exacta en $\mathscr{C}$ con:

1. La sucesión en $\mathscr{D}$ dada por

$$\cdots \to T^i(C) \to T^i(B) \to T^i(A) \xrightarrow{\delta^i} T^{i+1}(C) \to T^{i+1}(B) \to T^{i+1}(A) \to \cdots$$

   es exacta.

2. Para todo morfismo de sucesiones exactas cortas en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

   el diagrama

$$\begin{tikzcd} T^i(A') \arrow[r, "\delta^i"] \arrow[d] & T^{i+1}(C') \arrow[d] \\ T^i(A) \arrow[r, "\delta^i"] & T^{i+1}(C) \end{tikzcd}$$

   es conmutativo.

Sea $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ un functor contravariante entre dos categorías abelianas. Decimos que F es **borrable** (o *effaçable*) si para todo objeto A en $\mathscr{C}$: $\exists P \xrightarrow{u} A$ sobreyectivo tal que $F(u) : F(A) \to F(P)$ es el morfismo **nulo**.

Ejemplo principal: En $\mathbb{P}^n$, los functores

$$\mathscr{F} \longmapsto \operatorname{Ext}^i(\mathscr{F}, \omega_X) \quad \text{y} \quad \mathscr{F} \longmapsto \operatorname{H}^{n-i}(X, \mathscr{F})^\vee$$

son borrables para todo $i \geq 1$ y para todo haz coherente $\mathscr{F}$ en $\mathbb{P}^n$.

En efecto, por el Lema de Serre existen enteros $r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ y $m \gg 0$ tal que $\mathscr{P} := \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-m)^{\oplus r} \overset{u}{\twoheadrightarrow} \mathscr{F}$. Así, basta probar que para todo $i \geq 1$

$$\operatorname{Ext}^i(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-m), \omega_{\mathbb{P}^n}) \cong \operatorname{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(m) \otimes \omega_{\mathbb{P}^n}) = 0 = \operatorname{H}^{n-i}(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-m))$$

Esto se deduce de los cálculos explícitos de cohomología en $\mathbb{P}^n$.

Sean S y T dos δ-functores entre categorías abelianas $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$. Supongamos que para todo $i \geq 1$ el functor $S^i : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es **borrable**. Entonces,

Todo morfismo functorial $f^0 : S^0 \longrightarrow T^0$ se extiende en un único morfismo $f^i : S^i \longrightarrow T^i$ compatible con los morfismos de conexión.

Idea de Prueba: Se construye $f^i : S^i \longrightarrow T^i$ por inducción en $i \in \mathbb{N}$: Sea A objeto en $\mathscr{C}$ y $u : P \twoheadrightarrow A$ sobreyectivo con $S^{i+1}(u) = 0$ y consideremos

$$0 \longrightarrow K := \ker(u) \xrightarrow{j} P \xrightarrow{u} A \longrightarrow 0 \text{ exacta en } \mathscr{C}.$$

Dicha sucesión exacta induce una sucesión exacta larga

$$\begin{tikzcd}
S^i(A) \arrow[r, "S^i(u)"] \arrow[d, "f^i_A"'] & S^i(P) \arrow[r, "S^i(j)"] \arrow[d, "f^i_P"'] & S^i(K) \arrow[r, two heads, "\delta^i_S"] \arrow[d, "f^i_K"'] & S^{i+1}(A) \arrow[r, "S^{i+1}(u)=0"] \arrow[d, dotted, "\exists ?\ f^{i+1}_A"] & 0 \\
T^i(A) \arrow[r, "T^i(u)"] & T^i(P) \arrow[r, "T^i(j)"] & T^i(K) \arrow[r, "\delta^i_T"] & T^{i+1}(A)
\end{tikzcd}$$

donde las filas son **exactas**. Si $x \in S^{i+1}(A)$ con $y \in S^i(K)$ tal que $\delta^i_S(y) = x$, entonces se define $f^{i+1}_A(x) := (\delta^i_T \circ f^i_K)(y) \in T^{i+1}(A)$. $\square$

Sean S y T dos δ-functores entre categorías abelianas $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$. Supongamos que S^i y T^i son **borrables** para todo $i \geq 1$. Entonces, para todo $i \geq 0$

Todo isomorfismo functorial $D^0 : S^0 \xrightarrow{\sim} T^0$ se extiende a únicos isomorfismos $D^i : S^i \xrightarrow{\sim} T^i$ compatibles con los morfismos δ_S^i y δ_T^i.

Paso 3. Extender $D : \mathrm{Hom}(\mathscr{F}, \omega_{\mathbb{P}^n}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \mathscr{F})^\vee$ a un isomorfismo

$$D : \mathrm{Ext}^i(\mathscr{F}, \omega_{\mathbb{P}^n}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{n-i}(\mathbb{P}^n, \mathscr{F})^\vee \text{ para todo } i \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Prueba: En $\mathbb{P}^n$, los functores

$$\mathscr{F} \longmapsto \mathrm{Ext}^i(\mathscr{F}, \omega_X) \quad \text{y} \quad \mathscr{F} \longmapsto \mathrm{H}^{n-i}(X, \mathscr{F})^\vee$$

son borrables para todo $i \geq 1$ y para todo haz coherente $\mathscr{F}$ en $\mathbb{P}^n$. Luego, D se extiende de manera única a isomorfismos functoriales

$$D : \mathrm{Ext}^i(\,\cdot\,, \omega_{\mathbb{P}^n}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{n-i}(\mathbb{P}^n, \,\cdot\,)^\vee \text{ para todo } i \geq 0. \quad \square$$

Así, la **dualidad de Grothendieck** vale para $\mathbb{P}^n$.

Caso general

Paso 4. Caso general $j : X \hookrightarrow Y$, donde $Y = \mathbb{P}^{n+r}$ (i.e., $\operatorname{codim}_Y(X) = r$).

Aquí, $\dim(X) = n$ y debemos probar que para todo $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}(X)$ se tiene

$$\operatorname{Ext}^i(\mathscr{F}, \omega_X) \cong \operatorname{Ext}^{i+r}(j_*\mathscr{F}, \omega_Y) \text{ para todo } i \geq 0$$

Recuerdo (fórmula de adjunción): Los fibrados canónicos ω_X y ω_Y cumplen

$$\omega_X \cong \omega_Y|_X \otimes \det(\mathscr{N}_{X/Y}) \stackrel{\text{def}}{=} j^*\omega_Y \otimes \det(\mathscr{N}_{X/Y})$$

con $\mathscr{N}_{X/Y}$ fibrado normal de X en Y, de $\operatorname{rg}(\mathscr{N}_{X/Y}) = r$.

Recuerdo (fórmula de proyección): Si $\mathscr{E}$ es un haz localmente libre en Y y $\mathscr{F}$ es un $\mathscr{O}_X$-módulo, entonces

$$\mathscr{E} \otimes j_*\mathscr{F} \cong j_*(j^*\mathscr{E} \otimes \mathscr{F}) \text{ en } Y.$$

Al combinar ambas fórmulas, obtenemos que

$$j_*\omega_X \cong j_*(j^*\omega_Y \otimes \det(\mathscr{N}_{X/Y})) \cong \omega_Y \otimes j_* \det(\mathscr{N}_{X/Y}).$$

El haz $\mathscr{E}xt^i$

Recordemos que $\mathscr{E}xt^i$ son los functores derivados de $\mathscr{H}om$. En particular, si $\mathscr{E}$ un haz localmente libre en Y, y sea $\mathscr{G}$ y $\mathscr{H}$ dos $\mathscr{O}_Y$-módulos arbitrarios

$\mathscr{E}xt^i(\mathscr{G} \otimes \mathscr{E}^\vee, \mathscr{H}) \cong \mathscr{E}xt^i(\mathscr{G}, \mathscr{E} \otimes \mathscr{H}) \cong \mathscr{E}xt^i(\mathscr{G}, \mathscr{H}) \otimes \mathscr{E}$ para todo $i \geq 0$.

En particular, tenemos que

$$\mathscr{E}xt^i(\mathscr{G}, \mathscr{O}_Y) \otimes \omega_Y \cong \mathscr{E}xt^i(\mathscr{G}, \omega_Y) \text{ para todo } i \geq 0.$$

Hecho clave (ver Le Potier, Ch. IV §2)

Bajo las hipótesis del Paso 4, se tiene que[a]

$$\mathscr{E}xt^i(j_*\mathscr{O}_X, \mathscr{O}_Y) \cong \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq r \\ j_* \det(\mathscr{N}_{X/Y}) & \text{si } i = r \end{cases}$$

En particular, la observación anterior y la fórmula de adjunción implican

$$\mathscr{E}xt^i(j_*\mathscr{O}_X, \omega_Y) \cong \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq r \\ j_*\omega_X & \text{si } i = r \end{cases}$$

[a] La prueba usa el **complejo de Koszul** del incrustamiento $j : X \hookrightarrow Y$.

El isomorfismo $\mathrm{Ext}^i(\mathscr{F}, \omega_X) \cong \mathrm{Ext}^{i+r}(j_*\mathscr{F}, \omega_Y)$

Recuerdo: Para calcular los grupos Ext necesitamos de resoluciones inyectivas $\omega_X \longrightarrow \mathcal{I}^\bullet$ en $\mathscr{O}_X$-$\mathbf{Mod}$ y $\omega_Y \longrightarrow \mathscr{R}^\bullet$ en $\mathscr{O}_Y$-$\mathbf{Mod}$, respectivamente:

1. $\mathrm{Ext}^i(\mathscr{F}, \omega_X) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{H}^i(\mathrm{Hom}_X(\mathscr{F}, \mathcal{I}^\bullet))$.
2. $\mathrm{Ext}^{i+r}(j_*\mathscr{F}, \omega_Y) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{H}^{i+r}(\mathrm{Hom}_Y(j_*\mathscr{F}, \mathscr{R}^\bullet))$.

La estrategia será construir $\omega_X \to \mathcal{I}^\bullet$ a partir de $\omega_Y \to \mathscr{R}^\bullet$, y relacionarlas usando el **Hecho clave**.

Recuerdo: Sea $j : X \hookrightarrow Y$ un incrustamiento cerrado entre variedades algebraicas. Entonces, hay una sucesión exacta de $\mathscr{O}_Y$-módulos

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_X \longrightarrow \mathscr{O}_Y \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow j_*\mathscr{O}_X \longrightarrow 0$$

y donde j_* identifica $\mathscr{O}_X$-módulos con $\mathscr{O}_Y$-módulos que se anulan por $\mathcal{I}_X$.

$\omega_X \to \mathcal{I}^\bullet$ A PARTIR DE $\omega_Y \to \mathscr{R}^\bullet$

Sea $\omega_Y \to \mathscr{R}^\bullet$ una resolución inyectiva en $\mathscr{O}_Y$-$\mathbf{Mod}$, y sea $\mathscr{R}^\bullet_X \hookrightarrow \mathscr{R}^\bullet$ el subcomplejo dado por los subhaces $\mathscr{R}^i_X \subseteq \mathscr{R}^i$ de secciones locales de $\mathscr{R}^i$ que se anulan por $\mathcal{I}_X$. Entonces, $\mathcal{I}^\bullet := j^*\mathscr{R}^\bullet_X$ inyectivo en $\mathscr{O}_X$-$\mathbf{Mod}$ con

$$\mathrm{H}^i(\mathcal{I}^\bullet) \cong \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq r \\ \omega_X & \text{si } i = r \end{cases}$$

Prueba: Por definición de $\mathcal{I}^\bullet$ y de j_*, tenemos que

$$\mathrm{Hom}_Y(j_*\mathscr{F}, \mathscr{R}^i) \cong \mathrm{Hom}_X(\mathscr{F}, \mathcal{I}^i) \text{ para todo } \mathscr{O}_X\text{-módulo } \mathscr{F}.$$

Por un lado, $\mathscr{F} \longmapsto j_*\mathscr{F}$ es un functor **exacto**, pues $j : X \hookrightarrow Y$ morfismo finito y luego $\mathrm{R}^p j_* = 0$ para todo $p \geq 1$. Por otro lado, por definición

$$\mathscr{R}^i \text{ es inyectivo si y sólo si el functor } \mathrm{Hom}_Y(\,\cdot\,, \mathscr{R}^i) \text{ es } \textbf{exacto}.$$

En particular, la composición

$$\mathrm{Hom}_Y(j_*(\,\cdot\,), \mathscr{R}^i) \cong \mathrm{Hom}_X(\,\cdot\,, \mathcal{I}^i) \text{ es un functor exacto,}$$

i.e., $\mathcal{I}^i$ es inyectivo en $\mathscr{O}_X$-$\mathbf{Mod}$.

Finalmente, notemos que $\mathcal{I}^i \overset{\text{def}}{=} \mathscr{H}om(\mathscr{O}_X, \mathcal{I}^i)$, y que por definición de $\mathcal{I}^\bullet$ y de j_* tenemos que

$$j^* \mathscr{H}om(j_*\mathscr{O}_X, \mathscr{R}^i) \cong \mathscr{H}om(\mathscr{O}_X, \mathcal{I}^i).$$

De estas dos observaciones, obtenemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^i(\mathcal{I}^\bullet) &\overset{\text{def}}{=} \mathrm{H}^i(\mathscr{H}om(\mathscr{O}_X, \mathcal{I}^\bullet)) \cong j^* \mathrm{H}^i(\mathscr{H}om(j_*\mathscr{O}_X, \mathscr{R}^\bullet)) \\ &\overset{\text{def}}{=} j^* \mathscr{E}xt^i(j_*\mathscr{O}_X, \omega_Y) \\ &\underset{\text{Hecho}}{\cong} \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq r \\ j^*(j_*\omega_X) \cong \omega_X & \text{si } i = r \end{cases} \end{aligned}$$

donde $j^*(j_*\omega_X) \cong \omega_X$ se prueba gracias a la fórmula de proyección. $\square$

Paso 4. El isomorfismo $\mathrm{Ext}^i(\mathscr{F}, \omega_X) \cong \mathrm{Ext}^{i+r}(j_*\mathscr{F}, \omega_Y)$.

Prueba: A partir del complejo inyectivo $\mathcal{I}^\bullet$, y usando el hecho que $\mathrm{H}^i(\mathcal{I}^\bullet) = 0$ si $i \neq r$ y que $\mathrm{H}^r(\mathcal{I}^\bullet) \cong \omega_X$, obtenemos una resolución inyectiva

$$\omega_X \longrightarrow \mathscr{J}^\bullet$$

tal que $d^i_{\mathscr{J}} := d^{i+r}_{\mathcal{I}}$, i.e., consideramos una traslación (shift) en r. Luego,

$$\mathrm{Ext}^i(\mathscr{F}, \omega_X) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{H}^i(\mathrm{Hom}_X(\mathscr{F}, \mathscr{J}^\bullet)) \underset{\text{Anterior}}{\cong} \mathrm{H}^{i+r}(\mathrm{Hom}_X(\mathscr{F}, \mathcal{I}^\bullet))$$
$$\cong \mathrm{H}^{i+r}(\mathrm{Hom}_Y(j_*\mathscr{F}, \mathscr{R}^\bullet)) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Ext}^{i+r}(j_*\mathscr{F}, \omega_Y). \quad \square$$

Consencuencia (**Dualidad de Serre**): Sea X variedad proyectiva suave irreducible de $\dim(X) = n$ y sea $E \to X$ un fibrado vectorial, entonces

$$\mathrm{H}^i(X, E) \cong \mathrm{H}^{n-i}(X, E^\vee \otimes \omega_X)^\vee \text{ para todo } i \geq 0.$$

§5.2 Teorema de Riemann-Roch para curvas algebraicas

Recuerdo: Sea X variedad algebraica proyectiva suave irreducible. Así, todo $L \in \mathrm{Pic}(X)$ es de la forma $L \cong \mathscr{O}_X(D)$ para cierto divisor de Cartier $D \in \mathrm{Div}(X)$ que es **único módulo equivalencia lineal**, i.e.,

Si $L \cong \mathscr{O}_X(D) \cong \mathscr{O}_X(D')$ entonces $D \sim D'$,
i.e., $\exists f \in k(X)^*$ con $D - D' = \mathrm{div}(f)$.

Como X es **suave** podemos pensar a D como un divisor de Weil, i.e.,

$$D = \sum_{i=1}^{r} n_i \cdot Y_i \quad \text{donde } n_i \in \mathbb{Z} \text{ e } Y_i \subseteq X \text{ hipersuperficie irreducible.}$$

Si $n_i \geq 0 \ \forall i$, decimos que D es un **divisor efectivo**, y escribimos $D \geq 0$.

El k-espacio vectorial $\mathrm{H}^0(X, L) \cong \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(D))$ es llamado el **espacio de Riemann-Roch** de D y, como X es proyectiva, es de dimensión finita.

Hoy en día, la dimensión de este espacio se denota por

$$\dim_k \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(D)) := h^0(X, \mathscr{O}_X(D)) \text{ o bien } h^0(X, D),$$

o incluso $h^0(D)$ si X es clara en el contexto.

La notación clásica para esta dimensión es $\ell(D)$.

Más aún, podemos describir explícitamente el espacio de Riemann-Roch

$$\mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(D)) \cong \{f \in k(X)^* \text{ tal que } \operatorname{div}(f) + D \geq 0\},$$

así como su sistema lineal asociado

$$|D| := \mathbb{P}\,\mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(D)) \cong \{E \geq 0 \text{ divisor efectivo tal que } E \sim D\}.$$

En 1857, Riemann estudia sistemas lineales en curvas algebraicas proyectivas suaves e irreducibles (*superficies de Riemann compactas*).

Teorema de Riemann-Roch

En el caso de curvas C, un divisor en C es una suma forma de la forma

$$D = \sum_{i=1}^{r} n_i \cdot p_i \quad \text{donde } n_i \in \mathbb{Z} \text{ y } p_i \in C \text{ es un punto,}$$

y en particular podemos considerar la función **grado** dada por

$$\deg : \mathrm{Pic}(C) \twoheadrightarrow \mathbb{Z},\ L \cong \mathscr{O}_C\left(\sum_{i=1}^{r} n_i \cdot p_i\right) \longmapsto \deg(L) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{r} n_i.$$

Si $k = \mathbb{C}$, Riemann prueba que para todo $L \cong \mathscr{O}_C(D) \in \mathrm{Pic}(C)$ se verifica:

$$\ell(D) \geq \deg(D) - g(C) + 1 \quad \textbf{(desigualdad de Riemann)}$$

con $g(C) \overset{\text{def}}{=} \dim_k \mathrm{H}^0(C, \omega_C)$ el **género** de C, y $\Omega_C^1 \cong \omega_C \cong \mathscr{O}_C(K_C)$ es el fibrado en rectas canónico (pues $\dim(C) = 1$).

En 1865, Gustav Roch prueba se necesita un "*término de corrección*":

$$\ell(D) - \ell(K_C - D) = \deg(D) - g(C) + 1$$

obteniendo así el **Teorema de Riemann-Roch** (para $k = \mathbb{C}$).

Sea X variedad proyectiva de $\dim(X)=n$ y $\mathscr{F}\in\mathbf{Coh}(X)$. Definimos la **característica de Euler-Poincaré** $\chi(X,\mathscr{F})$ de $\mathscr{F}$ como

$$\sum_{i\geq 0}(-1)^i h^i(X,\mathscr{F}) = h^0(X,\mathscr{F}) - h^1(X,\mathscr{F}) + \ldots + (-1)^n h^n(X,\mathscr{F}),$$

con $h^i(X,\mathscr{F})<+\infty\ \forall i\geq 0$ y con $h^i(X,\mathscr{F})=0$ para todo $i>\dim(X)$.

Sea $0\to\mathscr{F}\to\mathscr{G}\to\mathscr{H}\to 0$ una sucesión exacta en $\mathbf{Coh}(X)$. Entonces,

$$\chi(X,\mathscr{G})=\chi(X,\mathscr{F})+\chi(X,\mathscr{H}).$$

Prueba: La sucesión exacta larga en cohomología

$$0\longrightarrow \mathrm{H}^0(X,\mathscr{F})\longrightarrow \mathrm{H}^0(X,\mathscr{G})\longrightarrow \mathrm{H}^0(X,\mathscr{H})\longrightarrow \mathrm{H}^1(X,\mathscr{F})\longrightarrow\cdots$$

nos da una sucesión exacta

$$0\longrightarrow V_1\xrightarrow{f_1}V_2\xrightarrow{f_2}V_3\longrightarrow\cdots\longrightarrow V_m\xrightarrow{f_m}0\xrightarrow{f_{m+1}}0$$

de k-espacios vectoriales de dimensión finita.

Característica de Euler-Poincaré $\chi(X, \mathscr{F})$

Si denotamos $d_i := \dim_k(V_i)$ y $\kappa_i := \dim_k \ker(f_i)$, entonces la exactitud y el Teorema del rango implican que $d_i = \kappa_i + \mathrm{rg}(f_i) = \kappa_i + \kappa_{i+1}$. Luego,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}(-1)^i d_i = \sum_{i=1}^{m}(-1)^i(\kappa_i + \kappa_{i+1}) &= \sum_{i=1}^{m}\left((-1)^i\kappa_i - (-1)^{i+1}\kappa_{i+1}\right)\\ &= -\kappa_1 - (-1)^{m+1}\kappa_{m+1} \overset{\text{def}}{=} 0.\end{aligned}$$

Así, $0 = h^0(X, \mathscr{F}) - h^0(X, \mathscr{G}) + h^0(X, \mathscr{H}) - h^1(X, \mathscr{F}) + \cdots$, i.e., se tiene

$$\chi(X, \mathscr{F}) - \chi(X, \mathscr{G}) + \chi(X, \mathscr{H}) = 0. \quad \square$$

Esta última propiedad de la característica de Euler-Poincaré y el Teorema de dualidad de Serre, permitirán probar el Teorema de Riemann-Roch.