Geometría Algebraica

Clase 26

Pedro Montero

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

8 de Noviembre de 2023

§4.8 Imágenes directas superiores

El functor $\mathrm{R}^i f_*$

En lo que sigue, $f : X \to Y$ es un **morfismo regular** entre variedades algebraicas y $\mathscr{F}$ es un $\mathscr{O}_X$-módulo.

Recuerdo: El functor **imagen directa**

$$f_* : \mathbf{Qcoh}(X) \longrightarrow \mathbf{Qcoh}(Y),\ \mathscr{F} \longrightarrow f_*\mathscr{F} \text{ es exacto por la izquierda}$$

con $(f_*\mathscr{F})(V) \overset{\text{def}}{=} \mathscr{F}(f^{-1}(V))$ para $V \subseteq Y$ abierto. Sus functores derivados

$$\mathrm{R}^i f_* : \mathbf{Qcoh}(X) \longrightarrow \mathbf{Qcoh}(Y),\ \mathscr{F} \longrightarrow \mathrm{R}^i f_*\mathscr{F}$$

se llaman **imágenes directas superiores**.

En particular, $\mathrm{R}^0 f_*(\mathscr{F}) \cong f_*\mathscr{F}$ y toda sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{H} \longrightarrow 0$$

de $\mathscr{O}_X$-módulos induce una sucesión exacta larga en $\mathbf{Qcoh}(Y)$

$$0 \longrightarrow f_*\mathscr{F} \longrightarrow f_*\mathscr{G} \longrightarrow f_*\mathscr{H} \xrightarrow{\delta^0} \mathrm{R}^1 f_*\mathscr{F}$$

$$\longrightarrow \mathrm{R}^1 f_*\mathscr{G} \longrightarrow \mathrm{R}^1 f_*\mathscr{H} \xrightarrow{\delta^1} \mathrm{R}^2 f_*\mathscr{F} \longrightarrow \cdots$$

$\mathrm{R}^i f_*(\mathscr{F})$ es el haz asociado al prehaz que a cada $V \subseteq Y$ abierto asigna

$$V \longmapsto \mathrm{H}^i(f^{-1}(V), \mathscr{F})$$

Prueba: Sea $\mathscr{F} \to \mathcal{I}^\bullet$ resolución inyectiva, donde $\mathrm{R}^i f_*(\mathscr{F}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{H}^i(f_*(\mathcal{I}^\bullet))$. La definición de f_* implica que $\mathrm{H}^i(f_*(\mathcal{I}^\bullet))$ es el haz asociado al prehaz

$$V \longmapsto \mathrm{H}^i(\Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{I}^\bullet)) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{H}^i(f^{-1}(V), \mathscr{F}). \quad \square$$

Caso particular importante: Si $\mathcal{I}$ es un haz **flasque** en X (e.g. un haz inyectivo en $\mathbf{Qcoh}(X)$) entonces $\mathrm{H}^i(f^{-1}(V), \mathcal{I}) = 0$ para todo $i \geq 1$ y luego

$$\mathrm{R}^i f_*(\mathcal{I}) = 0 \text{ para todo } i \geq 1.$$

Teorema de imágenes directas de Leray

Sea $f : X \to Y$ morfismo regular entre variedades algebraicas, y $\mathscr{F}$ haz quasi-coherente en X tal que $\mathrm{R}^p f_*(\mathscr{F}) = 0$ para todo $p \geq 1$. Entonces,

$$\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F}) \cong \mathrm{H}^i(Y, f_*\mathscr{F}) \text{ para todo } i \geq 0.$$

Prueba: Sea $\mathscr{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{I}^\bullet$ resolución inyectiva, dada por el complejo **exacto**

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{\varepsilon^0} \mathcal{I}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{I}^1 \xrightarrow{d^1} \mathcal{I}^2 \longrightarrow \cdots$$

Por hipótesis, $\mathrm{R}^p f_*(\mathscr{F}) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{H}^p(f_*(\mathcal{I}^\bullet)) = 0$ para todo $p \geq 1$, i.e.,

$$0 \longrightarrow f_*\mathscr{F} \longrightarrow f_*\mathcal{I}^0 \longrightarrow f_*\mathcal{I}^1 \longrightarrow \cdots \text{ es un complejo exacto.}$$

Así, $f_*\mathscr{F} \longrightarrow f_*\mathcal{I}^\bullet$ resolución en $\mathbf{Qcoh}(Y)$. Como $\mathcal{I}^i$ es **flasque**, cada $f_*\mathcal{I}^i$ es flasque (por definición de f_*) y así $f_*\mathscr{F} \to f_*\mathcal{I}^\bullet$ resolución flasque. El Teorema de de Rham implica que

$$\mathrm{H}^i(Y, f_*\mathscr{F}) \underset{\text{dR}}{\cong} \mathrm{H}^i(\Gamma(Y, f_*\mathcal{I}^\bullet)) \underset{\text{def}}{\cong} \mathrm{H}^i(\Gamma(X, \mathcal{I}^\bullet)) \underset{\text{def}}{\cong} \mathrm{H}^i(X, \mathscr{F}) \;\forall i \geq 1. \quad \square$$

Ejemplo: Supongamos que $f : X \to Y$ es un **morfismo finito** (e.g. la inclusión de una subvariedad cerrada). Entonces,

$$\text{Si } V \subseteq Y \text{ abierto afín, entonces } f^{-1}(V) \subseteq X \text{ abierto afín.}$$

Luego, el Teorema de Serre implica que $\mathrm{H}^p(f^{-1}(V), \mathscr{F}) = 0$ para todo $p \geq 0$, y luego $\mathrm{R}^p f_*(\mathscr{F}) = 0$ para todo $p \geq 1$. El resultado anterior implica

$$\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F}) \cong \mathrm{H}^i(Y, f_*\mathscr{F}) \text{ para todo } i \geq 0.$$

Recuerdo: Si $f : X \to Y$ morfismo regular y $\mathscr{F} \in \mathbf{Qcoh}(X)$ entonces $f_*\mathscr{F}$ es un **quasi-coherente** en Y, pero no necesariamente coherente (incluso si $\mathscr{F}$ es coherente). E.g. $f : \mathbb{A}^n \to Y = \{\mathrm{pt}\}$ y $\mathscr{F} = \mathscr{O}_{\mathbb{A}^n}$.

Si f **morfismo finito** y $\mathscr{F}$ es **coherente** entonces $f_*\mathscr{F}$ es coherente.

Si $\varphi : B \to A$ morfismo de anillos noetherianos y M un A-módulo, entonces M es un B-módulo vía $b \cdot m := \varphi(b) \cdot m$, **no** necesariamente fin. gen. Si A es un B-módulo finitamente generado vía φ, entonces M también.

Sea $f : X \to Y$ morfismo regular y $\mathscr{F} \in \mathbf{Qcoh}(X)$. Entonces:

1. Las imágenes directas superiores $\mathrm{R}^i f_*(\mathscr{F})$ son haces quasi-coherentes.
2. Si Y es **afín** con $B = \mathscr{O}(Y)$, $\mathrm{R}^i f_*(\mathscr{F}) = \widetilde{M}$ con $M = \mathrm{H}^i(X, \mathscr{F})$.

Prueba: (1) se obtiene pues los functores derivados preservan las categorías de partida y llegada. Para (2), recordamos que si Y es afín entonces

$$\Gamma : \mathbf{Qcoh}(Y) \longrightarrow B\text{-}\mathbf{Mod},\ \mathscr{G} \longmapsto \Gamma(Y, \mathscr{G}) \text{ es } \textbf{exacto}.$$

En particular, para todo complejo $\mathscr{K}^\bullet$ en $\mathbf{Qcoh}(Y)$ se tiene que

$$\mathrm{H}^i(\Gamma(\mathscr{K}^\bullet)) \cong \Gamma(\mathrm{H}^i(\mathscr{K}^\bullet)) \text{ para todo } i \geq 0.$$

Luego, si $\mathscr{F} \to \mathcal{I}^\bullet$ resolución inyectiva en $\mathbf{Qcoh}(X)$ y $\mathscr{K}^\bullet := f_* \mathcal{I}^\bullet$, entonces $\mathrm{R}^i f_*(\mathscr{F}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{H}^i(f_* \mathcal{I}^\bullet) = \mathrm{H}^i(\mathscr{K}^\bullet)$. Así, $\Gamma(\mathrm{H}^i(\mathscr{K}^\bullet))$ está dado por

$$\Gamma(Y, \mathrm{R}^i f_*(\mathscr{F})) \cong \mathrm{H}^i(\Gamma(Y, f_* \mathcal{I}^\bullet)) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{H}^i(\Gamma(X, \mathcal{I}^\bullet)) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{H}^i(X, \mathscr{F}),$$

i.e., $\mathrm{R}^i f_*(\mathscr{F}) \cong \widetilde{M}$ con $M = \mathrm{H}^i(X, \mathscr{F})$. $\square$

Un morfismo regular $f : X \to Y$ es un **morfismo proyectivo** si existe $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tal que f se factoriza como

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & Y \times \mathbb{P}^n \arrow[d, "\mathrm{pr}_Y"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

donde $\iota : X \hookrightarrow Y \times \mathbb{P}^n$ es un incrustamiento cerrado, i.e., todas las fibras $X_y := f^{-1}(y) \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ son proyectivas (en un mismo ambiente).

Ejemplos:

1. Si X es **proyectiva** y $f : X \to Y$ regular con Y arbitraria, entonces f es **proyectivo** pues el grafo de f verifica
$$X \xrightarrow[\sim]{\iota} \Gamma(f) \xrightarrow{\mathrm{pr}_Y} Y$$
con $\Gamma(f) \subseteq X \times Y \subseteq \mathbb{P}^n \times Y$, y luego X es un cerrado de $\mathbb{P}^n \times Y$.
2. Si f **proyectivo** entonces f es un **morfismo cerrado** (ver Clase 8).

Teorema (Grauert 1960, Grothendieck 1958)

Sea $f: X \to Y$ **morfismo proyectivo** y $\mathscr{F}$ haz coherente en X. Entonces, $\mathrm{R}^i f_*(\mathscr{F})$ son haces coherentes en Y para todo $i \geq 0$.

Prueba: Consideramos $f: X \xrightarrow{\iota} Y \times \mathbb{P}^n \xrightarrow{\mathrm{pr}_Y} Y$, y recordemos que $\mathrm{R}^i f_*(\mathscr{F})$ es el haz asociado al prehaz

$$V \longmapsto \mathrm{H}^i(f^{-1}(V), \mathscr{F}) \cong \mathrm{H}^i(\mathrm{pr}_Y^{-1}(V), \iota_* \mathscr{F}).$$

Luego, podemos suponer que $X = Y \times \mathbb{P}^n$ y que $f = \mathrm{pr}_Y$.

Como la coherencia es una propiedad local, podemos suponer que Y es **afín** con $B = \mathscr{O}(Y)$. En tal caso, $\mathrm{R}^i f_*(\mathscr{F}) \cong \widetilde{M}$ con $M = \mathrm{H}^i(X, \mathscr{F})$. Luego, basta verificar que $\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F})$ es un B-módulo finitamente generado:

El Lema de Serre (ver Clase 22) implica que existen $r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ y $m \gg 0$ con

$$\mathscr{O}_X(-m)^{\oplus r} \twoheadrightarrow \mathscr{F} \text{ morfismo sobreyectivo de } \mathscr{O}_X\text{-módulos,}$$

donde $\mathscr{O}_X(-m) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{pr}_Y^* \mathscr{O}_Y \otimes \mathrm{pr}_{\mathbb{P}^n}^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-m) \overset{\text{def}}{=} \mathscr{O}_Y \boxtimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-m)$.

Así, obtenemos una sucesión exacta de haces coherentes en $X = Y \times \mathbb{P}^n$

$$0 \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{O}_X(-m)^{\oplus r} \twoheadrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow 0$$

Luego, la conclusión se obtendría por inducción descendente en $i \in \mathbb{N}$ al considerar la sucesión exacta larga en cohomología

$$\cdots \to \mathrm{H}^i(X, \mathscr{G}) \to \mathrm{H}^i(X, \mathscr{O}_X(-m))^{\oplus r} \to \mathrm{H}^i(X, \mathscr{F}) \to \mathrm{H}^{i+1}(X, \mathscr{G}) \to \cdots$$

donde $\mathrm{H}^{i+1}(X, \mathscr{G}) \cong \Gamma(Y, \mathrm{R}^{i+1} f_* \mathscr{G})$ es un B-módulo finitamente generado por hipótesis inductiva.

Resta verificar que $\mathrm{H}^i(X, \mathscr{O}_X(-m))$ es un B-módulo finitamente generado:

Sea $d \in \mathbb{Z}$ y calculemos $\mathrm{H}^i(X, \mathscr{O}_X(d))$ usando cohomología de Čech respecto al **cubrimiento afín**

$$V_i := Y \times U_i \cong Y \times \mathbb{A}^n \text{ de } X = Y \times \mathbb{P}^n, \text{ donde } i \in \{0, \ldots, n\}.$$

Notando que $C^\bullet(\mathscr{V}, \mathscr{O}_X(d)) \cong B \otimes_k C^\bullet(\mathscr{U}, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$, obtenemos que

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^i(X, \mathscr{O}_X(d)) &\underset{\text{Leray}}{\cong} \check{\mathrm{H}}^i_{\mathscr{V}}(X, \mathscr{O}_X(d)) \cong B \otimes_k \check{\mathrm{H}}^i_{\mathscr{U}}(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \\ &\underset{\text{Leray}}{\cong} B \otimes_k \mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)),\end{aligned}$$

y luego $\mathrm{H}^i(X, \mathscr{O}_X(d))$ es finitamente generado, pues $\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ es de dimensión finita. Así, $\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F})$ es finitamente generado. $\square$

Tanto Grothendieck como Grauert demuestran una versión más fuerte de este resultado, donde sólo asumen que f es un **morfismo propio**.

Sea $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo **proyectivo** tal que

Para todo $y \in Y$, la fibra $f^{-1}(y) \subseteq X$ es un **conjunto finito**.

Entonces, f es un **morfismo finito**.

Prueba: El resultado es local en Y, por lo que asumimos que Y es **afín**. A priori, no sabemos si X es afín (a posteriori, si lo es pues f finito).

El Teorema de Grauert-Grothendieck implica que $f_* \mathscr{O}_X$ es un haz coherente en Y, donde $f_* \mathscr{O}_X \cong \widetilde{M}$ con $M = \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X) \overset{\text{def}}{=} \mathscr{O}(X)$.

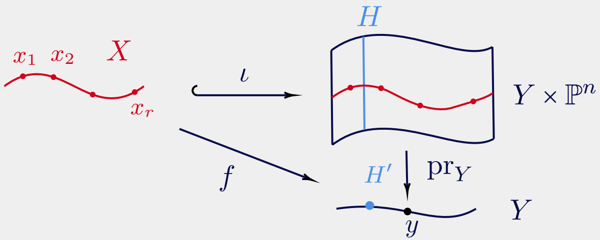
Luego, $\mathscr{O}(X)$ es un $\mathscr{O}(Y)$-módulo finitamente generado vía

$$f^* : \mathscr{O}(Y) \longrightarrow \mathscr{O}(X),$$

lo que implicaría que f es un morfismo finito si supieramos que X es afín.

La idea es cubrir Y por abiertos afines $V \subseteq Y$ tales que $f^{-1}(V)$ sea afín, de tal suerte que el argumento anterior nos permita concluir.

Sea $y \in Y$ en la imagen de f, con fibra dada por $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_r\}$, y sea $f : X \xrightarrow{\iota} Y \times \mathbb{P}^n \xrightarrow{\mathrm{pr}_Y} Y$ factorización del morfismo proyectivo f.



Sea $H \subseteq Y \times \mathbb{P}^n$ hiperplano (vertical) tal que $\iota(x_1), \dots, \iota(x_r) \notin H$. Como ι es incrustamiento cerrado, $H \cap \iota(X)$ es cerrado en $Y \times \mathbb{P}^n$ y luego $H' := \mathrm{pr}_Y(H \cap \iota(X))$ es un cerrado en Y, pues f es un morfismo proyectivo.

Así, $y \in V := Y \smallsetminus H'$ vecindad abierta afín tal que $f^{-1}(V) \cong \mathrm{pr}_Y^{-1}(V) \cap \iota(X)$ es cerrado en $(Y \times \mathbb{P}^n) \smallsetminus H \cong Y \times \mathbb{A}^n$ variedad afín, y luego $f^{-1}(V)$ afín. $\square$

Sea C curva **proyectiva irreducible**. Si $f : C \to X$ un morfismo regular no-constante hacia X una variedad arbitraria, f es un morfismo **finito**.

Prueba: Como C es proyectiva, f es un morfismo proyectivo. Así, basta notar que sus fibras son conjuntos finitos:

En caso contrario, existiría $x_0 \in X$ con $\dim(f^{-1}(x_0)) \geq 1$ y luego (C **curva** irreducible) se tendría $f^{-1}(x_0) = C$, i.e., $f(C) = \{x_0\}$ y f constante. $\square$

Hecho importante (Fórmula de Proyección)

Sea $f : X \to Y$ morfismo regular entre **proyectivas irreducibles**, y sea $C \subseteq X$ curva irreducible. El **grado de C respecto a f** es

$$d := \deg_f(C) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(C) = \{\mathrm{pt}\} \\ \deg(f|_C : C \to f(C)) & \text{si } f(C) \subseteq Y \text{ curva irreducible} \end{cases}$$

donde $\deg(f|_C) \stackrel{\text{def}}{=} [k(C) : k(f(C))]$. Entonces, para todo $D \in \mathrm{Div}(Y)$

$$f^*D \cdot C = \deg_f(C)(D \cdot f(C)) \quad (\text{Fórmula de proyección})$$

Sea X variedad proyectiva irreducible y $L \in \mathrm{Pic}(X)$ sin puntos de base,

i.e., $\varphi_L : X \longrightarrow \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(X, L)^\vee) \cong \mathbb{P}^n$ es un morfismo regular.

Entonces, L es amplio si y sólo si las fibras $\varphi_L^{-1}(y)$ son **conjuntos finitos**.

Prueba: Dado que X proyectiva, φ_L es un morfismo proyectivo.

($\Leftarrow$) Si las fibras de φ_L son conjuntos finitos, φ_L es un morfismo finito. Luego, dado que $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ es amplio y φ_L finito, $\varphi_L^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \cong L$ es amplio.

($\Rightarrow$) Si $L \cong \mathscr{O}_X(D)$ es amplio, $D \cdot C > 0$ para toda curva irreducible $C \subseteq X$. Luego, si por contradicción existe $y_0 \in \mathbb{P}^n$ tal que $\dim(\varphi_L^{-1}(y_0)) \geq 1$, basta considerar $C \subseteq \varphi_L^{-1}(y_0)$ una curva irreducible.

Por definición, $\varphi_L(C) = \{y_0\}$ y luego, por la fórmula de proyección, tendríamos

$$D \cdot C = \varphi_L^* H \cdot C = d(H \cdot \varphi_L(C)) = 0$$

donde $H \subseteq \mathbb{P}^n$ es un hiperplano, una contradicción. $\square$

§5.1 Dualidad de Grothendieck y Dualidad de Serre

En 1955, Jean-Pierre Serre publica "Un théorème de dualité", probando que si E es un fibrado vectorial **holomorfo** en una variedad compacta compleja

$$\mathrm{H}^i(X, E) \cong \mathrm{H}^{n-i}(X, E^\vee \otimes \omega_X)^\vee$$

donde $n = \dim(X)$ y $\omega_X \overset{\mathsf{def}}{=} \det(\Omega^1_X)$ es el fibrado en rectas canónico.

La demostración de Serre usa técnicas de Análisis Funcional (espacios de Fréchet, teoría de Fredholm, técnicas L^2, teoría de Hodge, etc):

$$\overline{\star}_E : \mathscr{H}^{p,q}(X, E) \xrightarrow{\simeq} \mathscr{H}^{n-p,n-q}(X, E^\vee),$$

donde $\mathscr{H}^{p,q}(X, E) := \{\alpha \in \Gamma(X, \wedge^{p,q}\Omega^1_X \otimes E),\ \Delta_E(\alpha) = 0\}$.

El 15 de diciembre de 1955, Alexandre Grothendieck envía una carta a Serre:

> *"Pensando un poco sobre tu teorema de dualidad, me di cuenta que su generalización es más o menos evidente y que se encuentra implícitamente en tu artículo (...).*
>
> *Estoy muy convencido,* bastardo, *que las secciones §3 y §4 del Capítulo 3 se pueden hacer sin ningún cálculo."*

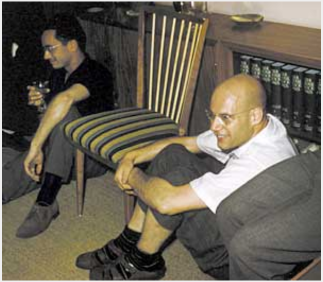


Figure: A. Grothendieck y J.-P. Serre, disfrutando un vinito (1958).

Teorema (Grothendieck, 1957)

Sea X variedad proyectiva suave irreducible de $\dim(X) = n$. Entonces:

1. $\dim_k \mathrm{H}^n(X, \omega_X) = 1$. En particular, toda aplicación k-lineal no-nula
$$t : \mathrm{H}^n(X, \omega_X) \xrightarrow{\sim} k \text{ es un isomorfismo.}$$
Decimos que t es un **morfismo de traza**, o símplemente *una traza*.
2. Sea $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}(X)$. Para toda traza $t : \mathrm{H}^n(X, \omega_X) \xrightarrow{\sim} k$ asociamos un morfismo de functores **contravariantes** en $\mathscr{F}$
$$D : \mathrm{Hom}_X(\mathscr{F}, \omega_X) \longrightarrow \mathrm{H}^n(X, \mathscr{F})^\vee,\ f \longmapsto D(f) := t \circ \mathrm{H}^n(f),$$
donde $\mathrm{H}^n(f) : \mathrm{H}^n(X, \mathscr{F}) \to \mathrm{H}^n(X, \omega_X)$ inducido por $f : \mathscr{F} \to \omega_X$. Entonces, la transformación natural
$$D : \mathrm{Hom}_X(\,\cdot\,, \omega_X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n(X, \,\cdot\,)^\vee \text{ es un isomorfismo.}$$
3. El isomorfismo D se extiende a un isomorfismo functorial en $\mathscr{F}$
$$D : \mathrm{Ext}^i(\mathscr{F}, \omega_X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{n-i}(X, \mathscr{F})^\vee \text{ para todo } i \geq 0.$$

En particular, la elección de una traza $t : \mathrm{H}^n(X, \omega_X) \xrightarrow{\sim} k$ determina
$$\mathrm{Ext}^i(\mathscr{F}, \omega_X) \times \mathrm{H}^{n-i}(X, \mathscr{F}) \longrightarrow k \text{ emparejamiento perfecto.}$$

Es importante notar que la dualidad de Grothendieck implica:

Teorema (Dualidad de Serre)

Sea X variedad proyectiva suave irreducible, $\dim(X) = n$ y $\omega_X = \det(\Omega^1_X)$. Para todo fibrado $E \to X$, la elección de $t : \mathrm{H}^n(X, \omega_X) \xrightarrow{\sim} k$ determina un emparejamiento perfecto
$$\mathrm{H}^i(X, E) \times \mathrm{H}^{n-i}(X, E^\vee \otimes \omega_X) \longrightarrow k \text{ para todo } i \geq 0.$$
En particular, $\mathrm{H}^i(X, E) \cong \mathrm{H}^{n-i}(X, E^\vee \otimes \omega_X)^\vee$.

Prueba: Si $\mathscr{E}$ haz de secciones de E, basta aplicar dualidad de Grothendieck y usar que $\mathrm{H}^{n-i}(X, E^\vee \otimes \omega_X) \cong \mathrm{Ext}^{n-i}(\mathscr{E}, \omega_X)$ (ver Clase 24). $\square$

Casos particulares importantes

Sea X variedad proyectiva suave irreducible de $\dim(X) = n$. Entonces:

1. **Fibrados en rectas.** Si $L \cong \mathscr{O}_X(D)$ es un fibrado en rectas en X, con $L^\vee \cong \mathscr{O}_X(-D)$, entonces la dualidad de Serre se reduce a
$$\mathrm{H}^i(X, \mathscr{O}_X(D)) \cong \mathrm{H}^{n-i}(X, \mathscr{O}_X(K_X - D))^\vee$$
para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$.
2. **Números de Hodge.** Si $E = \mathscr{O}_X$, entonces
$$\mathrm{H}^i(X, \mathscr{O}_X) \cong \mathrm{H}^{n-i}(X, \omega_X)^\vee.$$
Más aún, dado que $\omega_X \otimes (\Omega_X^{n-p})^\vee \cong \Omega_X^p$ (ver Ejercicio 1.4.15) tenemos que para $p + q = n$ hay isomorfismos:
$$\mathrm{H}^q(X, \Omega_X^p) \cong \mathrm{H}^q(X, (\Omega_X^q)^\vee \otimes \omega_X) \cong \mathrm{H}^p(X, \Omega_X^q)^\vee.$$
Luego, si definimos el **número de Hodge**
$$h^{p,q}(X) := \dim_k \mathrm{H}^q(X, \Omega_X^p),$$
entonces $h^{p,q}(X) = h^{q,p}(X)$ para todo $p, q \geq 0$ tales que $p + q = n$.