Geometría Algebraica

Clase 25

Pedro Montero

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

6 de Noviembre de 2023

§4.6 Resoluciones acíclicas y resoluciones flasque

En lo que sigue, $\mathscr{C}$ es una categoría abeliana con suficientes inyectivos.

Cono de un morfismo $f : K^\bullet \to L^\bullet$

Sea $f : K^\bullet \to L^\bullet$ morfismo de complejos en $\mathscr{C}$. El **cono** de f es el complejo

$$C(f)^i := L^i \oplus K^{i+1}$$

y cuyo diferencial $d^i_{C(f)} : C(f)^i \longrightarrow C(f)^{i+1} \overset{\text{def}}{=} L^{i+1} \oplus K^{i+2}$ está dado por

$$d^i_{C(f)} := \begin{pmatrix} d^i_L & f^{i+1} \\ 0 & -d^{i+1}_K \end{pmatrix}, \text{ i.e., } d^i_{C(f)}(x,y) \overset{\text{def}}{=} (d^i_L(x) + f^{i+1}(y), -d^{i+1}_K(y)).$$

Así, si denotamos por $K[1]^\bullet$ al complejo $K[1]^i := K^{i+1}$ con $d^i_{K[1]} := -d^{i+1}_K$,

$$0 \longrightarrow L^\bullet \xrightarrow{\iota} C(f)^\bullet \xrightarrow{\pi} K[1]^\bullet \longrightarrow 0 \text{ es **exacta**.}$$

y luego induce una sucesión exacta en cohomología

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}^i(L^\bullet) \longrightarrow \mathrm{H}^i(C(f)^\bullet) \longrightarrow \mathrm{H}^i(K[1]^\bullet) \cong \mathrm{H}^{i+1}(K^\bullet) \xrightarrow{\delta^i} \qquad (\star)$$
$$\xrightarrow{\delta^i} \mathrm{H}^{i+1}(L^\bullet) \longrightarrow \mathrm{H}^{i+1}(C(f)^\bullet) \longrightarrow \cdots$$

donde δ^i coincide con $\mathrm{H}^{i+1}(f) : \mathrm{H}^{i+1}(K^\bullet) \longrightarrow \mathrm{H}^{i+1}(L^\bullet)$.

Complejos F-acíclicos y quasi-isomorfismos

Sea $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un functor aditivo, donde $\mathscr{D}$ es una categoría abeliana.

Sea $f : K^\bullet \longrightarrow L^\bullet$ un morfismo de complejos **positivos** en $\mathscr{C}$ tal que:

1. f es un quasi-isomorfismo, y que
2. Los objetos de $K^\bullet$ y $L^\bullet$ son F-acíclicos (i.e., $\mathrm{R}^i F(A) = 0\ \forall i \geq 1$).

Entonces, $F(f) : F(K^\bullet) \longrightarrow F(L^\bullet)$ es un quasi-isomorfismo.

Prueba: (1) y $(\star)$ implican que $C(f)^\bullet$ es un complejo exacto. Además, (2) implica que cada $C(f)^i \overset{\text{def}}{=} L^i \oplus K^{i+1}$ es F-acíclico. Vimos que entonces

$$F(C(f)^\bullet) \cong C(F(f))^\bullet \text{ es un complejo exacto.}$$

Así, la sucesión exacta larga $(\star)$ asociada a la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow F(L^\bullet) \longrightarrow C(F(f))^\bullet \longrightarrow F(K[1]^\bullet) \longrightarrow 0$$

muestra que el morfismo de complejos

$$F(f) : F(K^\bullet) \longrightarrow F(L^\bullet) \text{ es un quasi-isomorfismo.} \quad \square$$

Teorema de de Rham

Teorema de de Rham (Grothendieck, 1957)

Sea A un objeto en $\mathscr{C}$ y sea $A \longrightarrow K^\bullet$ una resolución de A tal que todos los objetos de $K^\bullet$ son F-acíclicos. Entonces, hay un isomorfismo canónico

$$\mathrm{H}^i(F(K^\bullet)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}^i F(A) \text{ para todo } i \geq 0.$$

Prueba: Sea $A \xrightarrow{\text{qis}} I_A^\bullet$ resolución inyectiva, con $\mathrm{R}^i F(A) \overset{\mathsf{def}}{=} \mathrm{H}^i(F(I_A^\bullet))$.

Como $A \xrightarrow{\text{qis}} K^\bullet$ es una resolución, $\exists f : K^\bullet \to I_A^\bullet$ único módulo homotopía

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr] & K^\bullet \arrow[d, "f\ \textbf{qis}"] \\ & I_A^\bullet \end{tikzcd} \quad \text{conmutativo.}$$

Así obtenemos $F(f) : F(K^\bullet) \to F(I_A^\bullet)$ único módulo homotopía, y luego

$$\mathrm{H}^i(F(f)) : \mathrm{H}^i(F(K^\bullet)) \longrightarrow \mathrm{H}^i(F(I_A^\bullet)) \overset{\mathsf{def}}{=} \mathrm{R}^i F(A) \text{ es } \textbf{único}.$$

Como $K^\bullet$ y $I_A^\bullet$ son F-acíclicos y f un **qis**, $F(f)$ es un **qis**. $\square$

Complejo de de Rham (1931)

Sea X variedad diferenciable real y sea $\mathscr{O}_X := \mathscr{C}^\infty_X$ haz de funciones diferenciables, entonces el **complejo de de Rham** asociado al diferencial exterior

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{R}} \xrightarrow{\iota} \mathscr{O}_X \xrightarrow{d} \Omega^1_X \xrightarrow{d} \Omega^2_X \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^{\dim(X)}_X \longrightarrow 0$$

verifica (Lema de Poincaré) $\mathrm{H}^i(X, \Omega^p_X) = 0$ para todo $i \geq 1$ y $p \geq 0$ donde $\Omega^0_X := \mathscr{O}_X$, i.e., $\underline{\mathbb{R}} \longrightarrow \Omega^\bullet_X$ determina una resolución Γ-acíclica del haz $\underline{\mathbb{R}}$.

Luego, el **Teorema de de Rham** implica que

$$\mathrm{H}^i(X, \underline{\mathbb{R}}) \cong \mathrm{H}^i(\Gamma(\Omega^\bullet_X)) \overset{\mathsf{def}}{=} \frac{\ker\{d : \Omega^i_X(X) \longrightarrow \Omega^{i+1}_X(X)\}}{\mathrm{Im}\{d : \Omega^{i-1}_X(X) \longrightarrow \Omega^i_X(X)\}}$$

$$\overset{\mathsf{def}}{=} \frac{\{i\text{-formas cerradas en } X\}}{\{i\text{-formas exactas en } X\}} =: \mathrm{H}^i_{\mathsf{dR}}(X).$$

Cultura general

En 1953, Pierre Dolbeault prueba que para variedades complejas X se tiene

$$\mathrm{H}^q(X, \Omega^p_X) \cong \mathrm{H}^{p,q}_{\overline{\partial}}(X) \overset{\mathsf{def}}{=} \ker(\overline{\partial}_{p,q}) / \mathrm{Im}(\overline{\partial}_{p,q-1}).$$

Haces flasque

En lo que sigue X es un espacio topológico y consideramos

$$\Gamma : \mathbf{Sh}(X) \longrightarrow \mathbf{Ab}, \ \mathscr{F} \longmapsto \Gamma(X, \mathscr{F})$$

cuyos functores derivados son los grupos de cohomología de haces $\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F})$.

Un haz $\mathscr{F}$ en X es **flasque** si el morfismo de restricción

$$\mathscr{F}(X) \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \mathscr{F}(U) \text{ es } \textbf{sobreyectivo} \text{ para todo abierto } U \subseteq X.$$

Hecho (Ejercicio de Lectura, ver Lema 4.6.9)

Si $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{H} \to 0$ sucesión exacta en X, con $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ **flasque**:

1. $\Gamma(X, \mathscr{G}) \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \Gamma(X, \mathscr{H})$ es sobreyectivo.
2. $\mathscr{H}$ es flasque.

Objetivo: Probar que los haces flasque son Γ-acíclicos, y considerar resoluciones flasque en lugar de inyectivas para calcular $\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F})$ (de Rham).

Inyectivo implica Flasque

Construcción: Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ espacio anillado y $j : U \hookrightarrow X$ abierto no-vacío. El prehaz **extensión por cero** de un $\mathscr{O}_U$-módulo $\mathscr{F}$ está dado por

$$V \subseteq X \longmapsto (j_!^{\text{pre}}\mathscr{F})(V) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } V \nsubseteq U \\ \mathscr{F}(V) & \text{si } V \subseteq U \end{cases}$$

El haz asociado $j_!\mathscr{F} := (j_!^{\text{pre}}\mathscr{F})^+$ es un $\mathscr{O}_X$-módulo y la correspondencia $\mathscr{F}(X) \overset{\text{def}}{=} \Gamma(X, \mathscr{F}) \cong \operatorname{Hom}_X(\mathscr{O}_X, \mathscr{F})$ se generaliza a (Ejercicio)

$$\mathscr{F}(U) \cong \operatorname{Hom}_X(j_!\mathscr{O}_U, \mathscr{F}) \text{ para todo abierto } U \subseteq X.$$

Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ espacio anillado. Todo $\mathscr{O}_X$-módulo **inyectivo** $\mathcal{I}$ es **flasque**.

Prueba: Si $j : U \hookrightarrow X$ abierto no-vacío, entonces $0 \to j_!\mathscr{O}_U \to \mathscr{O}_X$ exacta. Dado que (ver Clase 23) $\mathcal{I}$ **inyectivo** si y sólo si el functor contravariante

$$\operatorname{Hom}(\,\cdot\,, \mathcal{I}) : \mathscr{O}_X\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbf{Ab},\ \mathscr{F} \longmapsto \operatorname{Hom}_X(\mathscr{F}, \mathcal{I}) \text{ es exacto.}$$

Así, $\mathcal{I}(X) \cong \operatorname{Hom}_X(\mathscr{O}_X, \mathcal{I}) \twoheadrightarrow \mathcal{I}(U) \cong \operatorname{Hom}_X(j_!\mathscr{O}_U, \mathcal{I}) \to 0$ **exacta**. □

Si $\mathscr{O}_X = \underline{\mathbb{Z}}$ entonces $\mathscr{O}_X\text{-}\mathbf{Mod} \cong \mathbf{Sh}(X)$ y así:

"En un espacio topológico, todo haz de grupos abelianos inyectivo es flasque"

Flasque implica Γ-acíclico

Si $\mathscr{F}$ haz de grupos abelianos **flasque** en un espacio topológico X,
$\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F}) = 0$ para todo $i \geq 1$, i.e., $\mathscr{F}$ es Γ-acíclico.

Prueba: Sea $\mathcal{I}$ inyectivo en $\mathbf{Sh}(X)$ (y así $\mathrm{H}^i(X, \mathcal{I}) = 0\ \forall i \geq 1$) con $\mathscr{F} \hookrightarrow \mathcal{I}$. Dado que $\mathscr{F}$ y $\mathcal{I}$ son flasque, la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow \mathscr{G} := \mathcal{I}/\mathscr{F} \longrightarrow 0$$

implica (**Hecho**) que $\mathscr{G}$ es flasque y que la sucesión siguiente es exacta:

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathscr{F}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{I}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathscr{G}) \longrightarrow 0.$$

Así, la sucesión exacta en cohomología se reduce a

$$0 \to \mathrm{H}^1(X, \mathscr{F}) \to \underbrace{\mathrm{H}^1(X, \mathcal{I})}_{=0} \to \mathrm{H}^1(X, \mathscr{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^2(X, \mathscr{F}) \to \underbrace{\mathrm{H}^2(X, \mathcal{I})}_{=0} \to \cdots$$

i.e., $\mathrm{H}^1(X, \mathscr{F}) = 0$ y además $\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F}) \cong \mathrm{H}^{i-1}(X, \mathscr{G})$ para todo $i \geq 2$.

Deducimos por inducción en $i \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ que $\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F}) = 0$ para todo $i \geq 1$. $\square$

El Teorema de de Rham implica que podemos usar **resoluciones flasque** para calcular $\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F})$, en lugar de resoluciones inyectivas. Por ejemplo:

Sea X variedad algebraica y $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo, con haz subyacente $\mathscr{F}_a$. Entonces, $\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F}) \cong \mathrm{H}^i(X, \mathscr{F}_a)$ para todo $i \geq 0$.

Prueba: Sea $\mathscr{F} \to \mathcal{I}^\bullet$ resolución inyectiva en $\mathscr{O}_X$-$\mathbf{Mod}$. Así, $\mathscr{F}_a \to \mathcal{I}_a^\bullet$ resolución flasque en $\mathbf{Sh}(X)$ y cada $\mathcal{I}_a^i$ es Γ-acíclico. Luego,

$$\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F}) \overset{\mathsf{def}}{=} \mathrm{H}^i(\Gamma(\mathcal{I}^\bullet)) = \mathrm{H}^i(\Gamma(\mathcal{I}_a^\bullet)) \underset{\mathsf{dR}}{\cong} \mathrm{H}^i(X, \mathscr{F}_a)$$

para todo $i \geq 0$, gracias al Teorema de de Rham. $\square$

§4.7 Cohomología de variedades afines y Teorema de Leray

Haces (quasi-)coherentes en $X \subseteq \mathbb{A}^n$

Recuerdo: Sea A un anillo conmutativo con unidad, y sea M un A-módulo. Para todo $f \in A$, definimos

$$M_f := M \otimes_A A_f \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \frac{m}{f^p} \text{ con } m \in M \text{ y } p \in \mathbb{N} \right\} / \sim,$$

donde $\frac{m}{f^p} \sim \frac{m'}{f^q}$ si existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $f^r(f^q m - f^p m') = 0$ en M.

Si X variedad algebraica **afín** con $A = \mathscr{O}(X)$ entonces hay una biyección

$$\mathscr{F} \longmapsto \Gamma(X, \mathscr{F})$$
$$\widetilde{M} \longleftarrow M$$

entre $\mathbf{Qcoh}(X)$ (resp. $\mathbf{Coh}(X)$) y A-módulos (resp. A-módulos fin. gen.). Aquí, $\widetilde{M}$ es el haz definido en el abierto $U_f \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X,\ f(x) \neq 0\}$ por

$$\widetilde{M}(U_f) := M_f.$$

Lo anterior permite geometrizar resultados de la teoría de módulos.

Sea X una variedad algebraica **afín** con $A = \mathscr{O}(X)$, y sea I un A-módulo inyectivo. Entonces, para todo $f \in A$ no-nulo se tiene:

1. La proyección natural $I \xrightarrow{\pi} I_f$, $m \longmapsto \frac{m}{1}$ es **sobreyectiva**.
2. El kernel $K := \ker\{I \xrightarrow{\pi} I_f\}$ es un A-módulo inyectivo.

La demostración de esto último es un Ejercicio de álgebra conmutativa[1].

Traducción geométrica (ver Lema 4.7.3 y Proposición 4.7.4)

Sea X una variedad algebraica **afín** con $A = \mathscr{O}(X)$, y sea I un A-módulo inyectivo, con $\mathcal{I} := \widetilde{I}$ el haz quasi-coherente asociado. La restricción

$$\mathcal{I}(X) \twoheadrightarrow \mathcal{I}(U_f)$$

es sobreyectiva para todo $f \in A$ no-nulo. Más aún, $\mathcal{I}$ es un **haz flasque**.

[1] Ver Hartshorne, Chapter III, Lemma 3.3.

Teorema (Jean-Pierre Serre)

Si $\mathscr{F}$ haz quasi-coherente en una variedad algebraica **afín** X. Entonces,

$$\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F}) = 0 \text{ para todo } i \geq 1.$$

Prueba: Sea $A = \mathscr{O}(X)$ y $M := \Gamma(X, \mathscr{F})$. Sea $\varepsilon : M \to I^\bullet$ resolución inyectiva en A-$\mathbf{Mod}$, y sea $\mathcal{I}^p := \widetilde{I^p}$ el haz quasi-coherente asociado a I^p.

Así, cada $\mathcal{I}^p$ es **flasque** y en particular Γ-acíclico. Así, obtenemos

$$\varepsilon : \widetilde{M} \cong \mathscr{F} \longrightarrow \widetilde{I^\bullet} \overset{\mathsf{def}}{=} \mathcal{I}^\bullet \text{ resolución } \Gamma\text{-acíclica en } \mathscr{O}_X\text{-}\mathbf{Mod}.$$

El Teorema de de Rham y el hecho que $\Gamma(X, \mathcal{I}^p) \overset{\mathsf{def}}{=} \Gamma(X, \widetilde{I^p}) \cong I^p$ implican

$$\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F}) \underset{\mathsf{dR}}{\cong} \mathrm{H}^i(\Gamma(X, \mathcal{I}^\bullet)) \cong \mathrm{H}^i(I^\bullet) = 0$$

para todo $i \geq 1$, pues $0 \to M \xrightarrow{\varepsilon^0} I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \xrightarrow{d^1} I^2 \xrightarrow{d^2} \cdots$ es **exacto**. $\square$

Sólo falta justificar el uso de **cohomología de Čech** (Teorema de Leray).

Sea $\mathscr{F}$ haz de grupos abelianos en un espacio topológico X, y $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ cubrimiento abierto de X, con I conjunto (totalmente) ordenado.

Para $p \in \mathbb{N}$, el grupo de p-**cocadenas** de Čech de $\mathscr{F}$ respecto a $\mathscr{U}$ es

$$C^p(\mathscr{U}, \mathscr{F}) := \prod_{i_0 < \cdots < i_p} \mathscr{F}(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p}).$$

Además, para cada p-cocadena $s = \{s_{j_0,\ldots,j_p}\}_{j_0<\cdots<j_p}$, se define el **operador de coborde** $d^p : C^p(\mathscr{U}, \mathscr{F}) \longrightarrow C^{p+1}(\mathscr{U}, \mathscr{F})$, $s \mapsto d^p s$ mediante

$$(d^p s)_{i_0,\ldots,i_{p+1}} := \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k s_{i_0,\ldots,i_{k-1},i_{k+1},\ldots,i_{p+1}}|_{U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_{p+1}}} \qquad (\star)$$

con $d^{p+1} \circ d^p = 0$ para todo $p \in \mathbb{N}$, i.e., $C^\bullet(\mathscr{U}, \mathscr{F})$ es un **complejo** en la categoría $\mathbf{Ab}$, llamado el **complejo de Čech**. Además,

$$\check{\mathrm{H}}^i_{\mathscr{U}}(X, \mathscr{F}) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{H}^i(C^\bullet(\mathscr{U}, \mathscr{F})) \qquad i\text{-ésima cohomología de Čech}$$

verifica $\check{\mathrm{H}}^0_{\mathscr{U}}(X, \mathscr{F}) \cong \Gamma(X, \mathscr{F})$.

El complejo $\mathscr{C}^\bullet(\mathscr{U},\mathscr{F})$ en $\mathbf{Sh}(X)$

Construcción: Sea $V \subseteq X$ un abierto, y consideremos el cubrimiento $\mathscr{U}_V$ de V dado por los abiertos $\{U_i \cap V\}_{i\in I}$. Entonces, el prehaz de grupos abelianos

$$V \longmapsto C^p(\mathscr{U}_V,\mathscr{F})$$

es un **haz**, que denotaremos $\mathscr{C}^p(\mathscr{U},\mathscr{F})$. Más aún, hay morfismos

$$d^p : \mathscr{C}^p(\mathscr{U},\mathscr{F}) \longrightarrow \mathscr{C}^{p+1}(\mathscr{U},\mathscr{F})$$

que hacen de $\mathscr{C}^\bullet(\mathscr{U},\mathscr{F})$ un complejo en la categoría $\mathbf{Sh}(X)$. Además:

1. Si $\mathscr{F}$ **flasque**, entonces $\mathscr{C}^p(\mathscr{U},\mathscr{F})$ **flasque** para todo $p \in \mathbb{N}$.
2. El morfismo $\varepsilon^0 : \mathscr{F} \hookrightarrow \mathscr{C}^0(\mathscr{U},\mathscr{F})$ dado por

$$s \in \mathscr{F}(V) \longmapsto \{s|_{V\cap U_i}\}_{i\in I} \in C^0(\mathscr{U}_V,\mathscr{F})$$

es inyectivo, por los axiomas de haces. En particular, tenemos

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{\varepsilon^0} \mathscr{C}^0(\mathscr{U},\mathscr{F}) \xrightarrow{d^0} \mathscr{C}^1(\mathscr{U},\mathscr{F}) \to \cdots$$ complejo en $\mathbf{Sh}(X)$.

3. Por (2), hay isomorfismos $\mathrm{H}^0(\mathscr{C}^\bullet(\mathscr{U},\mathscr{F})) \overset{\text{def}}{=} \ker(d^0) \cong \mathscr{F} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Im}(\varepsilon^0)$.

Lema técnico

Con la notación anterior, $\varepsilon : \mathscr{F} \to \mathscr{C}^\bullet(\mathscr{U}, \mathscr{F})$ es una resolución en $\mathbf{Sh}(X)$.

Idea de Prueba: Resta verificar que $\mathscr{C}^\bullet(\mathscr{U}, \mathscr{F})$ es un complejo **exacto**. Veamos que $\mathscr{C}^\bullet(\mathscr{U}, \mathscr{F})_x$ complejo exacto de grupos abelianos $\forall x \in X$:

Sea U_j en $\mathscr{U}$ tal que $x \in U_j$, y construyamos una homotopía h tal que $\mathrm{Id}_{\mathscr{C}^\bullet(\mathscr{U}, \mathscr{F})_x} \sim_h 0$ (lo que concluye el Lema). Así, buscamos morfismos $h^{p+1} : \mathscr{C}^{p+1}(\mathscr{U}, \mathscr{F})_x \to \mathscr{C}^p(\mathscr{U}, \mathscr{F})_x$ tal que para todo $f \in \mathscr{C}^{p+1}(\mathscr{U}, \mathscr{F})_x$

$$f = d^p \circ h^{p+1}(f) + h^{p+2} \circ d^{p+1}(f) \text{ en } \mathscr{C}^{p+1}(\mathscr{U}, \mathscr{F})_x. \qquad (\star\star)$$

Para esto, definimos $h^{p+1}(f) \overset{\text{def}}{=} (h^{p+1}(f)_{i_0,\dots,i_p})_{i_0<\dots<i_p}$ mediante

$$h^{p+1}(f)_{i_0,\dots,i_p} := f_{j,i_0,\dots,i_p}.$$

Aquí, $f = (f_{i_0,\dots,i_{p+1}}) \in C^{p+1}(\mathscr{U}_V, \mathscr{F})$ para cierto abierto $x \in V \subseteq U_j$.

La fórmula $(\star\star)$ se deduce "*directamente*" de $(\star)$ que define d^p. $\square$

Sucesión exacta larga en cohomología $\check{\mathrm{H}}^i_{\mathscr{U}}$

1. Para toda sucesión exacta $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{H} \to 0$ de haces en X con

   $$\mathrm{H}^1(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p}, \mathscr{F}) = 0 \text{ para todo } p \in \mathbb{N} \text{ y todos } i_0, \ldots, i_p \in I,$$

   hay una sucesión **exacta** larga de cohomología de Čech

   $$0 \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^0_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{F}) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^0_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{G}) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^0_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{H}) \xrightarrow{\delta^0} \check{\mathrm{H}}^1_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{F})$$

   $$\longrightarrow \check{\mathrm{H}}^1_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{G}) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^1_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{H}) \xrightarrow{\delta^1} \check{\mathrm{H}}^2_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{F}) \longrightarrow \cdots$$

2. Si $\mathscr{F}$ haz **flasque**, entonces $\check{\mathrm{H}}^i_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{F}) = 0$ para todo $i \geq 1$.

Prueba: La hipótesis (1) implica que, para todas las posibles intersecciones, las sucesiones de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p}) \longrightarrow \mathscr{G}(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p}) \longrightarrow \mathscr{H}(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p}) \longrightarrow 0$$

son **exactas**, i.e., la sucesión de complejos

$$0 \longrightarrow C^\bullet(\mathscr{U},\mathscr{F}) \longrightarrow C^\bullet(\mathscr{U},\mathscr{G}) \longrightarrow C^\bullet(\mathscr{U},\mathscr{G}) \longrightarrow 0 \text{ es } \textbf{exacta},$$

de donde se obtiene la sucesión exacta larga (Lema de la serpiente).

Para (2), notar que $\varepsilon : \mathscr{F} \to \mathscr{C}^\bullet(\mathscr{U}, \mathscr{F})$ resolución **flasque**, y luego Γ-acíclica. Luego, de Rham y como $\mathscr{F}$ es Γ-acíclico, implican que para $i \geq 1$

$$0 = \mathrm{H}^i(X, \mathscr{F}) \underset{\mathsf{dR}}{\cong} \mathrm{H}^i(\Gamma(\mathscr{C}^\bullet(\mathscr{U}, \mathscr{F}))) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{H}^i(C^\bullet(\mathscr{U}, \mathscr{F})) \overset{\text{def}}{=} \check{\mathrm{H}}^i_{\mathscr{U}}(X, \mathscr{F}). \quad \square$$

La condición (1) del resultado anterior motiva la siguiente definición:

Sea $\mathscr{F}$ haz de grupos abelianos en un espacio topológico X. Decimos que $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ cubrimiento abierto de X, con I ordenado, es **$\mathscr{F}$-acíclico** si para todos $p \in \mathbb{N}$ y $i_0, \ldots, i_p \in I$ se tiene $\mathrm{H}^i(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p}, \mathscr{F}) = 0 \ \forall i \geq 1$.

Ejemplo principal: El Teorema de Serre implica que si X es una variedad algebraica (separada) y $\mathscr{F}$ un haz quasi-coherente en X entonces

Todo cubrimiento $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ por **abiertos afines** es $\mathscr{F}$-acíclico.

Teorema de Leray

1. Existe un morfismo canónico (y functorial en $\mathscr{F}$)
$$\check{\mathrm{H}}^i_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{F}) \longrightarrow \mathrm{H}^i(X,\mathscr{F}) \text{ para todo } i \geq 0,$$
2. Si el cubrimiento $\mathscr{U}$ es $\mathscr{F}$-acíclico, entonces
$$\check{\mathrm{H}}^i_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{F}) \cong \mathrm{H}^i(X,\mathscr{F}) \text{ es un isomorfismo } \forall i \geq 0.$$

Prueba: Consideremos la resolución $\varepsilon : \mathscr{F} \to \mathscr{C}^\bullet(\mathscr{U},\mathscr{F})$ y una resolución inyectiva $\mathscr{F} \to \mathcal{I}^\bullet$ tal que $\mathrm{H}^i(X,\mathscr{F}) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{R}^i\Gamma(\mathscr{F}) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{H}^i(\Gamma(\mathcal{I}^\bullet))$. Las propiedades de complejos inyectivos implican que existe φ único salvo homotopía tal que

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F} \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr] & \mathscr{C}^\bullet(\mathscr{U},\mathscr{F}) \arrow[d, "\varphi"] \\
& \mathcal{I}^\bullet
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $\Gamma(\varphi) : \Gamma(\mathscr{C}^\bullet(\mathscr{U},\mathscr{F})) \overset{\text{def}}{=} C^\bullet(\mathscr{U},\mathscr{F}) \to \Gamma(\mathcal{I}^\bullet)$ induce un **único** morfismo en cohomología $\mathrm{H}^i(C^\bullet(\mathscr{U},\mathscr{F})) \overset{\text{def}}{=} \check{\mathrm{H}}^i_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{F}) \longrightarrow \mathrm{H}^i(X,\mathscr{F})$.

Para (2) usamos inducción en $i \in \mathbb{N}$, donde para $i = 0$ tenemos

$$\check{\mathrm{H}}^0_{\mathscr{U}}(X, \mathscr{F}) \cong \mathrm{H}^0(X, \mathscr{F}) \cong \Gamma(X, \mathscr{F}).$$

El ítem (1) y el resultado anterior implican que si $0 \to \mathscr{F} \to \mathcal{I} \to \mathscr{G} \to 0$ **exacta** en $\mathbf{Sh}(X)$ y $\mathscr{U}$ es $\mathscr{F}$-acíclico entonces hay un diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \to & \check{\mathrm{H}}^i_{\mathscr{U}}(X, \mathscr{F}) & \longrightarrow & \check{\mathrm{H}}^i_{\mathscr{U}}(X, \mathcal{I}) & \longrightarrow & \check{\mathrm{H}}^i_{\mathscr{U}}(X, \mathscr{G}) & \xrightarrow{\check{\delta}^i} & \check{\mathrm{H}}^{i+1}_{\mathscr{U}}(X, \mathscr{F}) & \to \cdots \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\cdots \to & \mathrm{H}^i(X, \mathscr{F}) & \longrightarrow & \mathrm{H}^i(X, \mathcal{I}) & \longrightarrow & \mathrm{H}^i(X, \mathscr{G}) & \xrightarrow{\delta^i} & \mathrm{H}^{i+1}(X, \mathscr{F}) & \to \cdots
\end{array}$$

Sea entonces $\mathscr{F} \hookrightarrow \mathcal{I}$ con $\mathcal{I}$ inyectivo en $\mathbf{Sh}(X)$, y sea $\mathscr{G} := \mathcal{I}/\mathscr{F}$:

Como $\mathscr{U}$ es $\mathscr{F}$-acíclico y como $\mathcal{I}$ es Γ-acíclico, para cada intersección

$$U_{i_0 \cdots i_p} := U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p}$$

se tiene $\mathrm{H}^i(U_{i_0 \cdots i_p}, \mathscr{F}) = \mathrm{H}^i(U_{i_0 \cdots i_p}, \mathcal{I}) = 0$ para todo $i \geq 1$. Luego, la sucesión exacta larga en cohomología implica que $\mathscr{G}$ también es Γ-acíclico en cada $U_{i_0 \cdots i_p}$, i.e., el cubrimiento $\mathscr{U}$ es $\mathscr{G}$-acíclico también.

El hecho que $\mathcal{I}$ sea **flasque** implica (gracias el resultado anterior) que $\check{\mathrm{H}}^i_{\mathscr{U}}(X,\mathcal{I}) = 0 \ \forall i \geq 1$. Luego, el diagrama conmutativo se reduce a:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to \Gamma(X,\mathscr{F}) & \longrightarrow & \Gamma(X,\mathcal{I}) & \longrightarrow & \Gamma(X,\mathscr{G}) & \xrightarrow{\check{\delta}^0} & \check{\mathrm{H}}^1_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{F}) \to 0 \\
\downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \downarrow \\
0 \to \Gamma(X,\mathscr{F}) & \longrightarrow & \Gamma(X,\mathcal{I}) & \longrightarrow & \Gamma(X,\mathscr{G}) & \xrightarrow{\delta^0} & \mathrm{H}^1(X,\mathscr{F}) \to 0
\end{array}$$

de donde deducimos que la última flecha vertical es un isomorfismo, y se reduce al diagrama siguiente para todo $i \geq 1$

$$\begin{array}{ccc}
0 \to \check{\mathrm{H}}^i_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{G}) & \xrightarrow{\sim} & \check{\mathrm{H}}^{i+1}_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{F}) \to 0 \\
\downarrow\wr & & \downarrow \\
0 \to \mathrm{H}^i(X,\mathscr{G}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}^{i+1}(X,\mathscr{F}) \to 0
\end{array}$$

donde las fechas horizontales son isomorfismos, y donde la primera flecha vertical es un isomorfismo gracias a la hipótesis de inducción. Por lo tanto,

$$\check{\mathrm{H}}^i_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{F}) \cong \mathrm{H}^i(X,\mathscr{F}) \text{ isomorfismo para todo } i \geq 0. \quad \square$$