Geometría Algebraica

Clase 24

Pedro Montero

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

30 de Octubre de 2023

§4.4 Resoluciones inyectivas y quasi-isomorfismos

Resolución de un objeto

Sea $\mathscr{C}$ categoría abeliana y $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$. El **complejo** positivo asociado a A, denotado $\underline{A}^\bullet$ o símplemente A, es $\underline{A}^i := 0$ si $i \neq 0$ y $\underline{A}^0 := A$, i.e.,

$$\underline{A}^\bullet : \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \underline{A}^0 \overset{\mathsf{def}}{=} A \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Una **resolución** del objeto A es un morfismo $\varepsilon : \underline{A}^\bullet \longrightarrow R^\bullet$ de complejos positivos (i.e., $R^i = 0$ si $i < 0$) que es un **quasi-isomorfismo** (qis), i.e.,

$$\begin{tikzcd}
\underline{A}^\bullet : \arrow[d, "\varepsilon"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon^0"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
R^\bullet : & R^0 \arrow[r, "d^0"] & R^1 \arrow[r, "d^1"] & R^2 \arrow[r, "d^2"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

tal que $\mathrm{H}^i(\varepsilon) : \mathrm{H}^i(\underline{A}^\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^i(R^\bullet)$ es un isomorfismo para todo $i \geq 0$.

Como $\mathrm{H}^0(\underline{A}^\bullet) \overset{\mathsf{def}}{=} A$ y $\mathrm{H}^i(\underline{A}^\bullet) = 0$ para $i > 0$, $\mathrm{H}^i(R^\bullet) = 0$ para todo $i > 0$ y el **morfismo de aumentación** $\varepsilon^0 : A \longrightarrow R^0$ identifica A con $\mathrm{H}^0(R^\bullet)$, i.e., con el kernel de $d^0 : R^0 \longrightarrow R^1$.

Conclusión: En resumen, el **complejo exacto** dado por

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon^0} R^0 \xrightarrow{d^0} R^1 \xrightarrow{d^1} R^2 \xrightarrow{d^2} R^3 \xrightarrow{d^3} \cdots$$

denotado $0 \to A \to R^\bullet$, contiene la misma información que $\varepsilon : \underline{A}^\bullet \xrightarrow{\text{qis}} R^\bullet$.

Si todos los objetos R^i son inyectivos en $\mathscr{C}$, decimos que

$$\varepsilon : A \overset{\text{def}}{=} \underline{A}^\bullet \longrightarrow R^\bullet \text{ es una **resolución inyectiva de** } A.$$

Sea $\mathscr{C}$ una **categoría abeliana con suficientes inyectivos** y veamos que las buenas propiedades de objetos inyectivos se extienden a complejos:

Todo objeto $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ posee una resolución inyectiva $\varepsilon : A \to I^\bullet$.

Prueba: Sea $\varepsilon^0 : A \hookrightarrow I^0 = I^0(A)$ con I^0 objetivo inyectivo, y $A_1 := I^0/A$. Sea $\delta_1 : A_1 \hookrightarrow I^1$ con I^1 inyectivo y con $\ker(\delta^1) = 0$ en I^0/A, i.e.,

$$\varepsilon_1 : I^0 \xrightarrow{\pi} I^0/A \xrightarrow{\delta^1} I^1 \text{ cumple } \ker(\varepsilon^1) = A = \mathrm{Im}(\varepsilon^0).$$

Inductivamente, construímos $\varepsilon : A \longrightarrow I^\bullet$. $\square$

Sea $f : A \longrightarrow I^\bullet$ un morfismo arbitrario de complejos positivos en $\mathscr{C}$, donde todos los objetos de $I^\bullet$ son **inyectivos**. Entonces,

Para toda resolución $\varepsilon : A \xrightarrow{\text{qis}} R^\bullet$, *existe* $g : R^\bullet \to I^\bullet$ *tal que*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, "f"'] & R^\bullet \arrow[d, "g"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & I^\bullet \end{tikzcd}$$

Más aún, si $g' : R^\bullet \to I^\bullet$ es otro morfismo con $f = g' \circ \varepsilon$, entonces $g \sim g'$.

Prueba: Como ε resolución, $\varepsilon^0 : A \hookrightarrow R^0$ y como I^0 objeto inyectivo en $\mathscr{C}$, $f^0 : A \longrightarrow I^0$ se extiende a $g^0 : R^0 \longrightarrow I^0$. Supongamos g^i construído:

$$\begin{tikzcd} R^{i-1} \arrow[r, "d_R^{i-1}"] \arrow[d, "g^{i-1}"'] & R^i \arrow[r, "d_R^i"] \arrow[d, "g^i"'] & R^{i+1} \arrow[d, dotted, "\exists ?\ g^{i+1}"] \\ I^{i-1} \arrow[r, "d_I^{i-1}"] & I^i \arrow[r, "d_I^i"] & I^{i+1} \end{tikzcd}$$

$d_I^i \circ g^i : R^i \to I^{i+1}$ se anula en $\mathrm{Im}(d_R^{i-1}) \overset{\text{def}}{=} \ker(d_R^i)$ pues $g^i \circ d_R^{i-1} = d_I^{i-1} \circ g^{i-1}$.

Aquí, $d_I^i \circ g^i : R^i / \ker(d_R^i) \cong \operatorname{Im}(d_R^i) \to I^{i+1}$ se extiende a $g^{i+1} : R^{i+1} \longrightarrow I^{i+1}$ pues I^{i+1} objeto inyectivo. Construímos $g : R^\bullet \longrightarrow I^\bullet$ inductivamente.

Finalmente, consideremos otro morfismo $g' : R^\bullet \longrightarrow I^\bullet$ tal que $f = g' \circ \varepsilon$:

Sea $K^\bullet := R^\bullet / A$ el complejo positivo dado por $K^i := R^i$ si $i > 0$ y por $K^0 := R^0 / A$, entonces $g - g'$ se factoriza en un morfismo de complejos

$$G : K^\bullet \longrightarrow I^\bullet.$$

Dado que $K^\bullet$ es un complejo exacto y $I^\bullet$ es un complejo inyectivo, ya vimos la vez pasada que necesariamente $G \sim 0$, i.e., $g \sim g'$.

En otras palabras, g es **único módulo homotopía**. $\square$

Esta última propiedad para g es crucial para que la definición de functores derivados **no dependa de elecciones**.

§4.5 Functores derivados

En lo que sigue, $\mathscr{C}$ es una categoría abeliana con suficientes inyectivos.

Construcción de $\mathrm{R}^i F$

Construcción: Sea $\mathscr{D}$ otra categoría abeliana y $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un **functor covariante aditivo**. Para todo $i \geq 0$ construiremos $\mathrm{R}^i F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$:

1. Dado $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, fijamos $A \to I_A^\bullet$ resolución inyectiva y definimos

$$\mathrm{R}^i F(A) := \mathrm{H}^i(F(I_A^\bullet)) \text{ en } \mathscr{D}, \text{ para todo } i \in \mathbb{N}.$$

2. Dado $f : A \to B$ morfismo en $\mathscr{C}$, la discusión anterior implica que la composición $A \to B \to I_B^\bullet$ se extiende a un morfismo de complejos $g : I_A^\bullet \longrightarrow I_B^\bullet$ tal que el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & I_A^\bullet \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r] & I_B^\bullet \end{tikzcd}$$

Como $\mathrm{H}^i(F(g)) : \mathrm{H}^i(F(I_A^\bullet)) \to \mathrm{H}^i(F(I_B^\bullet))$ es **independiente** de la elección de g (único módulo homotopía), será denotado

$$(\mathrm{R}^i F)(f) : \mathrm{R}^i F(A) \longrightarrow \mathrm{R}^i F(B).$$

Si $\varepsilon : A \to I^\bullet$ es otra resolución inyectiva de A, el morfismo canónico

$$\mathrm{H}^i(F(I^\bullet)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}^iF(A) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{H}^i(F(I_A^\bullet)) \text{ es un isomorfismo.}$$

Prueba: Considerando $f = \mathrm{Id}_A : A \to A$, las resoluciones $A \to I^\bullet$ y $A \to I_A^\bullet$ inducen $g : I^\bullet \longrightarrow I_A^\bullet$ único módulo homotopía. Invirtiendo los roles de $I^\bullet$ con $I_A^\bullet$, obtenemos $h : I_A^\bullet \to I^\bullet$ único módulo homotopía. Más aún, $g \circ h \sim \mathrm{Id}_{I_A^\bullet}$ y $h \circ g \sim \mathrm{Id}_{I^\bullet}$, por lo que g y h son quasi-isomorfismos.

Por functorialidad, la imagen por F de una homotopía de morfismos de complejos en $\mathscr{C}$ es una homotopía de morfismos de complejos en $\mathscr{D}$. Así,

$$F(g) : F(I^\bullet) \longrightarrow F(I_A^\bullet)$$

es invertible módulo homotopía, y por ende un quasi-isomorfismo. Luego,

$$\mathrm{H}^i(F(I^\bullet)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^i(F(I_A^\bullet)) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{R}^iF(A) \text{ isomorfismo para todo } i \geq 0. \quad \square$$

Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ categorías abelianas, y supongamos que $\mathscr{C}$ **posee suficientes inyectivos**. Dado un functor **covariante** aditivo $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$, el functor

$$\mathrm{R}^i F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}, \; A \longmapsto \mathrm{R}^i F(A)$$

es llamado el i-**ésimo functor derivado** (derecho) de F.

Importante: Si reescribimos $A \to I_A^\bullet$ como el complejo exacto en $\mathscr{C}$

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon^0} I_A^0 \xrightarrow{d^0} I_A^1 \xrightarrow{d^1} I_A^2 \xrightarrow{d^2} I_A^3 \xrightarrow{d^3} \cdots$$

al aplicar F obtenemos un complejo en $\mathscr{D}$ **no necesariamente exacto**

$$F(A) \xrightarrow{F(\varepsilon^0)} F(I_A^0) \xrightarrow{F(d^0)} F(I_A^1) \xrightarrow{F(d^1)} F(I_A^2) \xrightarrow{F(d^2)} F(I_A^3) \xrightarrow{F(d^3)} \cdots$$

Como $d^0 \circ \varepsilon^0 = 0$, tenemos $F(d^0) \circ F(\varepsilon^0) = 0$ y así $F(\varepsilon^0) : F(A) \to F(I_A^0)$ se factoriza de manera functorial en

$$F(A) \longrightarrow \ker(F(d^0)) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{H}^0(F(I_A^\bullet)) \overset{\text{def}}{=} (\mathrm{R}^0 F)(A)$$

i.e., existe una **transformación natural** $F \longrightarrow R^0 F$.

Primeras propiedades de $\mathrm{R}^i F$

Si F **exacto por la izquierda**, entonces $F \xrightarrow{\sim} R^0 F$ es un isomorfismo.

Prueba: Sea $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ y $\varepsilon : A \to I^\bullet$ resolución inyectiva. Dado que F es exacto por la izquierda, la sucesión exacta $0 \to A \xrightarrow{\varepsilon^0} I^0 \xrightarrow{d^0} I^1$ en $\mathscr{C}$ es enviada a la sucesión **exacta** en $\mathscr{D}$ dada por

$$0 \to F(A) \xrightarrow{F(\varepsilon^0)} F(I^0) \xrightarrow{F(d^0)} F(I^1),$$

i.e., $F(A) \cong \ker(F(d^0)) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathrm{R}^0 F)(A)$. $\square$

Para todo $I \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ **inyectivo**, se tiene $\mathrm{R}^i F(I) = 0$ para todo $i \geq 1$.

Prueba: Para cada I inyectivo, la resolución $I \to R^\bullet$ dada por

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varepsilon^0 := \mathrm{Id}_I} I =: R^0 \xrightarrow{d^0} 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \text{ es inyectiva.}$$

Así, dado que $F(\mathrm{Id}_I) = \mathrm{Id}_{F(I)}$, tenemos que la sucesión

$$0 \longrightarrow F(I) \xrightarrow[\sim]{F(\varepsilon^0)} F(I) \xrightarrow{d^0} 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \text{ es exacta,}$$

y por ende $(\mathrm{R}^i F)(A) \cong \mathrm{H}^i(F(R^\bullet)) = 0$ para todo $i \geq 1$. $\square$

Toda sucesión exacta $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ en $\mathscr{C}$ tiene asociada de manera functorial una **sucesión exacta larga** en $\mathscr{D}$

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{R}^i F(A) \longrightarrow \mathrm{R}^i F(B) \longrightarrow \mathrm{R}^i F(C) \xrightarrow{\delta^i} \mathrm{R}^{i+1} F(A) \longrightarrow \cdots$$

Prueba: Consideremos la sucesión exacta corta en $\mathscr{C}$

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0,$$

y fijamos resoluciones inyectivas $A \xrightarrow{\varepsilon_A} I_A^\bullet$, $B \xrightarrow{\varepsilon_B} I_B^\bullet$ y $C \xrightarrow{\varepsilon_C} I_C^\bullet$. El principal problema es que no contamos con una sucesión exacta de complejos

$$0 \longrightarrow I_A^\bullet \longrightarrow I_B^\bullet \longrightarrow I_C^\bullet \longrightarrow 0$$

para aplicar el lema de la serpiente y obtener una sucesión exacta larga en cohomología (y por ende de functores derivados). Buscaremos un reemplazo:

Construyamos inductivamente $B \to I^\bullet$ resolución inyectiva con $I^i := I_A^i \oplus I_C^i$ para ciertos $d^i : I^i \longrightarrow I^{i+1}$: el morfismo de aumentación $\varepsilon_A^0 : A \hookrightarrow I_A^0$ se extiende a $\eta : B \longrightarrow I_A^0$ pues $f : A \hookrightarrow B$ y I_A^0 es un objeto inyectivo.

Así, usando el morfismo de aumentación $\varepsilon^0_C : C \hookrightarrow I^0_C$, construimos

$$\varepsilon^0 := (\eta, \varepsilon^0_C \circ g) : B \longrightarrow I^0 \overset{\text{def}}{=} I^0_A \oplus I^0_C$$

de tal suerte que el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I^0_A \arrow[r, hook, "\iota"] & I^0 \arrow[r, two heads, "\pi"] & I^0_C \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, hook, "\varepsilon^0_A"] \arrow[r, hook, "f"'] & B \arrow[u, "\varepsilon^0"'] \arrow[ul, dotted, "\eta"'] \arrow[r, two heads, "g"'] & C \arrow[u, hook, "\varepsilon^0_C"'] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

El Lema de la Serpiente implica que $\varepsilon^0 : B \hookrightarrow I^0$ es un morfismo inyectivo, y que la sucesión de cokernels siguiente es **exacta**:

$$0 \longrightarrow \mathrm{coker}(\varepsilon^0_A) \longrightarrow \mathrm{coker}(\varepsilon^0) \longrightarrow \mathrm{coker}(\varepsilon^0_C) \longrightarrow 0$$

y así obtenemos el primer diferencial $d^0 : I^0 \longrightarrow I^1$ deseado.

Intercambiando el rol de $0 \to A \to B \to C \to 0$ por $0 \to I^0_A \to I^0 \to I^0_C \to 0$, obtenemos el segundo diferencial $d^1 : I^1 \longrightarrow I^2$, y así sucesivamente.

En conclusión, obtenemos una sucesión **exacta** de complejos

$$0 \longrightarrow I_A^\bullet \xrightarrow{\iota} I^\bullet \xrightarrow{\pi} I_C^\bullet \longrightarrow 0$$

donde $I^\bullet = I_A^\bullet \oplus I_C^\bullet$. Dado que functores aditivos preservan las sumas directas, tenemos que $F(I^\bullet) = F(I_A^\bullet) \oplus F(I_C^\bullet)$ y en particular la sucesión

$$0 \longrightarrow F(I_A^\bullet) \longrightarrow F(I^\bullet) \longrightarrow F(I_C^\bullet) \longrightarrow 0$$

es **exacta** en $\mathscr{D}$. Así, el Lema de la serpiente implica que hay una sucesión exacta larga en cohomología de complejos

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}^i(F(I_A^\bullet)) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{R}^i F(A) \longrightarrow \mathrm{H}^i(F(I^\bullet)) \cong \mathrm{H}^i(F(I_B^\bullet)) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{R}^i F(B)$$
$$\longrightarrow \mathrm{H}^i(F(I_C^\bullet)) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{R}^i F(C) \xrightarrow{\delta^i} \mathrm{R}^{i+1} F(A) \longrightarrow \cdots$$

que nos otorga la sucesión exacta larga de functores derivados deseada. $\square$

La functorialidad de la construcción queda como Ejercicio de Lectura.

El functor $\mathrm{Hom}_A(M,\,\cdot\,)$: Sea A anillo conmutativo y M un A-módulo. Los functores derivados de $N \longmapsto \mathrm{Hom}_A(M,N)$ se denotan $\mathrm{Ext}^i_A(M,N)$, y son muy usados en topología. Toda sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow N_1 \xrightarrow{f} N_2 \xrightarrow{g} N_3 \longrightarrow 0 \text{ de } A\text{-módulos}$$

induce una sucesión exacta larga de A-módulos

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M,N_1) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_A(M,N_2) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_A(M,N_3) \xrightarrow{\delta^0} \mathrm{Ext}^1_A(M,N_1)$$
$$\to \mathrm{Ext}^1_A(M,N_2) \to \mathrm{Ext}^1_A(M,N_3) \xrightarrow{\delta^1} \mathrm{Ext}^2_A(M,N_1) \to \cdots$$

El functor $\mathrm{Hom}_X(\mathscr{F},\cdot)$: Sea $(X,\mathscr{O}_X)$ espacio anillado y $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo. Los functores derivados de $\mathscr{G} \longmapsto \mathrm{Hom}_X(\mathscr{F},\mathscr{G})$ se denotan $\mathrm{Ext}^i_X(\mathscr{F},\mathscr{G})$ o símplemente $\mathrm{Ext}^i(\mathscr{F},\mathscr{G})$, y como antes $0 \to \mathscr{G}_1 \to \mathscr{G}_2 \to \mathscr{G}_3 \to 0$ induce

$$0 \to \mathrm{Hom}_X(\mathscr{F},\mathscr{G}_1) \to \mathrm{Hom}_X(\mathscr{F},\mathscr{G}_2) \to \mathrm{Hom}_X(\mathscr{F},\mathscr{G}_3) \to \mathrm{Ext}^1_X(\mathscr{F},\mathscr{G}_1)$$
$$\to \mathrm{Ext}^1_X(\mathscr{F},\mathscr{G}_2) \to \mathrm{Ext}^1_X(\mathscr{F},\mathscr{G}_3) \to \mathrm{Ext}^2_X(\mathscr{F},\mathscr{G}_1) \to \cdots$$

sucesión exacta larga de $\Gamma(X,\mathscr{O}_X)$-módulos.

El functor $\mathscr{H}om_X(\mathscr{F},\cdot)$: Con la notación del ejemplo anterior, los functores derivados de $\mathscr{G} \longmapsto \mathscr{H}om(\mathscr{F},\mathscr{G})$ se denotan $\mathscr{E}xt^i(\mathscr{F},\mathscr{G})$. Como antes, una sucesión exacta corta $0 \to \mathscr{G}_1 \to \mathscr{G}_2 \to \mathscr{G}_3 \to 0$ de $\mathscr{O}_X$-módulos induce

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathscr{H}om(\mathscr{F},\mathscr{G}_1) \longrightarrow \mathscr{H}om(\mathscr{F},\mathscr{G}_2) \longrightarrow \mathscr{H}om(\mathscr{F},\mathscr{G}_3) \longrightarrow \mathscr{E}xt^1(\mathscr{F},\mathscr{G}_1) \\ &\longrightarrow \mathscr{E}xt^1(\mathscr{F},\mathscr{G}_2) \longrightarrow \mathscr{E}xt^1(\mathscr{F},\mathscr{G}_3) \longrightarrow \mathscr{E}xt^2(\mathscr{F},\mathscr{G}_1) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

sucesión exacta larga de $\mathscr{O}_X$-módulos.

El functor $\Gamma(X,\cdot)$: Sea X variedad algebraica con $A = \Gamma(X,\mathscr{O}_X)$. Los functores derivados del functor de secciones globales

$$\Gamma : \mathscr{O}_X\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow A\text{-}\mathbf{Mod},\ \mathscr{F} \longmapsto \Gamma(X,\mathscr{F})$$

se llaman **grupos de cohomología**, y se denotan $\mathrm{H}^i(X,\mathscr{F})$. En particular, $\mathrm{H}^0(X,\mathscr{F}) \cong \Gamma(X,\mathscr{F})$ y toda sucesión exacta $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{H} \to 0$ induce

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \Gamma(X,\mathscr{F}) \longrightarrow \Gamma(X,\mathscr{G}) \longrightarrow \Gamma(X,\mathscr{H}) \xrightarrow{\delta^0} \mathrm{H}^1(X,\mathscr{F}) \\ \longrightarrow \mathrm{H}^1(X,\mathscr{G}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X,\mathscr{H}) \xrightarrow{\delta^1} \mathrm{H}^2(X,\mathscr{F}) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

sucesión exacta larga de A-módulos.

El functor f_*: Sea $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo regular entre variedades algebraicas. Los functores derivados del functor imagen directa

$$f_* : \mathbf{Qcoh}(X) \longrightarrow \mathbf{Qcoh}(Y), \ \mathscr{F} \longmapsto f_*\mathscr{F}$$

se llaman **imágenes directas superiores**, y se denotan $\mathrm{R}^i f_*\mathscr{F}$. Así, se tiene $\mathrm{R}^0 f_*\mathscr{F} \cong f_*\mathscr{F}$ y toda sucesión exacta corta $0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{H} \longrightarrow 0$ de $\mathscr{O}_X$-módulos quasi-coherentes induce una sucesión exacta larga

$$0 \longrightarrow f_*\mathscr{F} \longrightarrow f_*\mathscr{G} \longrightarrow f_*\mathscr{H} \xrightarrow{\delta^0} \mathrm{R}^1 f_*\mathscr{F}$$

$$\longrightarrow \mathrm{R}^1 f_*\mathscr{G} \longrightarrow \mathrm{R}^1 f_*\mathscr{H} \xrightarrow{\delta^1} \mathrm{R}^2 f_*\mathscr{F} \longrightarrow \cdots$$

de $\mathscr{O}_Y$-módulos quasi-coherentes.

Si X espacio topológico, los functores derivados del functor de secciones globales $\Gamma : \mathbf{Sh}(X) \to \mathbf{Ab}$, $\mathscr{F} \mapsto \Gamma(X, \mathscr{F})$ también se denotan $\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F})$. Veremos que si X es una variedad algebraica, los grupos de cohomología asociados a Γ (vistos en $\mathbf{Sh}(X)$ y en $\mathscr{O}_X$-$\mathbf{Mod}$) coinciden.

$\operatorname{Ext}^i(\mathscr{O}_X, \cdot\,) \cong \operatorname{H}^i(X, \cdot\,)$

Recordar que si X variedad algebraica y $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo, hay una biyección

$$\left\{ \begin{array}{c} s \in \Gamma(X, \mathscr{F}) \\ \text{sección global} \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \varphi : \mathscr{O}_X \longrightarrow \mathscr{F} \text{ morfismo} \\ \text{de } \mathscr{O}_X\text{-módulos} \end{array} \right\}$$

Con la notación anterior, tenemos que:

1. $\mathscr{E}xt^0(\mathscr{O}_X, \mathscr{F}) \cong \mathscr{F}$ y $\mathscr{E}xt^i(\mathscr{O}_X, \mathscr{F}) = 0$ si $i \geq 1$.
2. $\operatorname{Ext}^i(\mathscr{O}_X, \mathscr{F}) \cong \operatorname{H}^i(X, \mathscr{F})$ para todo $i \geq 0$.

Más aún, si $\mathscr{E}$ es un $\mathscr{O}_X$-módulo localmente libre de rango r, entonces

$$\operatorname{Ext}^i(\mathscr{E}, \mathscr{F}) \cong \operatorname{H}^i(X, \mathscr{E}^\vee \otimes \mathscr{F}) \text{ para todo } i \geq 0.$$

Prueba: Como $\mathscr{H}om(\mathscr{O}_X, \mathscr{F}) \cong \mathscr{F}$, tenemos que $\mathscr{H}om(\mathscr{O}_X, \cdot\,) \cong \operatorname{Id}_{\mathscr{O}_X\text{-}\mathbf{Mod}}$ es un functor **exacto**, de donde deducimos (1). Para (2), notamos que

$$\Gamma(X, \cdot\,) \cong \operatorname{Hom}_X(\mathscr{O}_X, \cdot\,) \text{ son isomorfos,}$$

y luego sus functores derivados $\operatorname{H}^i(X, \mathscr{F}) \cong \operatorname{Ext}^i(\mathscr{O}_X, \mathscr{F})$ coinciden $\forall i \geq 0$.

$\operatorname{Ext}^i(\mathscr{O}_X, \cdot\,) \cong \operatorname{H}^i(X, \cdot\,)$

Por último, notar que las propiedades del producto tensorial implica que

$$\operatorname{Hom}_X(\mathscr{E}, \cdot\,) = \operatorname{Hom}_X(\mathscr{O}_X \otimes \mathscr{E}, \cdot\,) \cong \operatorname{Hom}_X(\mathscr{O}_X, \mathscr{E}^\vee \otimes \cdot\,).$$

Por otro lado, si $\mathscr{F} \longrightarrow \mathcal{I}^\bullet$ resolución inyectiva de $\mathscr{F}$ en $\mathscr{O}_X$-$\mathbf{Mod}$, entonces $\otimes\, \mathscr{E}^\vee$ preserva la exactitud (pues $\mathscr{E}$ localmente libre) y con ello obtenemos

$$\mathscr{E}^\vee \otimes \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{R}^\bullet := \mathscr{E}^\vee \otimes \mathcal{I}^\bullet \ \text{ resolución } \textbf{inyectiva}$$

pues en cada trivialización $\mathscr{R}^i|_U = (\mathscr{E}^\vee \otimes \mathcal{I}^i)|_U \cong (\mathcal{I}^i|_U)^{\oplus r}$ son inyectivos. Como $\operatorname{R}^i F(A) := \operatorname{H}^i(F(I_A^\bullet))$,

$$\begin{array}{l}
0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathscr{E}^\vee \otimes \mathscr{F}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathscr{R}^\bullet) \\
\qquad\ \ \downarrow\cong \\
0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_X(\mathscr{O}_X, \mathscr{E}^\vee \otimes \mathscr{F}) \cong \operatorname{Hom}_X(\mathscr{E}, \mathscr{F}) \longrightarrow \operatorname{Hom}_X(\mathscr{E}, \mathcal{I}^\bullet)
\end{array}$$

calculan el mismo $\operatorname{R}^i F$, i.e., $\operatorname{Ext}^i(\mathscr{E}, \mathscr{F}) \cong \operatorname{H}^i(X, \mathscr{E}^\vee \otimes \mathscr{F})\ \forall i \geq 0.$ $\square$

También es posible calcular **functores derivados izquierdos**. Por ejemplo, el functor derivado de $M \otimes_A (\,\cdot\,) : A\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow A\text{-}\mathbf{Mod}$, $N \longmapsto M \otimes_A N$, functor exacto por la derecha, se denota $\operatorname{Tor}_i^A(M, N)$.

§4.6 Resoluciones acíclicas y resoluciones flasque

¿Cómo calcular

$$\mathrm{R}^i F(A) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{H}^i(F(I_A^\bullet))$$

más fácilmente?

Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ categorías abelianas, y supongamos que $\mathscr{C}$ **posee suficientes inyectivos**. Dado un functor **covariante** aditivo $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$, denotamos por $\mathrm{R}^i F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ sus functores derivados.

Decimos que $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ es **F-acíclico** si $\mathrm{R}^i F(A) = 0$ para todo $i \geq 1$.

Ejemplo principal: Todo $I \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ **inyectivo** es F-acíclico.

Si $K^\bullet$ complejo **positivo** en $\mathscr{C}$ cuyos objetos K^i son F-acíclicos, entonces

Si $K^\bullet$ es **exacto** en $\mathscr{C}$, entonces $F(K^\bullet)$ es **exacto** en $\mathscr{D}$.

Prueba: Sea $K^\bullet = (K^i, d^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ y sean $Z^i := \ker(d^i)$ y $B^i := \mathrm{Im}(d^{i-1})$, donde $Z^i = B^i$ por exactitud de $K^\bullet$. Así, para todo $i \in \mathbb{Z}$ hay una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Z^{i-1} \longrightarrow K^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} Z^i \longrightarrow 0$$

Aplicando el functor F, obtenemos una sucesión exacta larga:

$$\begin{gathered} 0 \longrightarrow F(Z^{i-1}) \longrightarrow F(K^{i-1}) \longrightarrow F(Z^i) \longrightarrow \mathrm{R}^1F(Z^{i-1}) \longrightarrow \\ \longrightarrow \underbrace{\mathrm{R}^1F(K^{i-1})}_{=0} \longrightarrow \mathrm{R}^1F(Z^i) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}^2F(Z^{i-1}) \longrightarrow \underbrace{\mathrm{R}^2F(K^{i-1})}_{=0} \longrightarrow \cdots \end{gathered}$$

Así, $\mathrm{R}^pF(Z^i) \cong \mathrm{R}^{p+1}F(Z^{i-1})$ para todo $i \in \mathbb{Z}$ y todo $p \geq 1$. En particular,

$$\mathrm{R}^1F(Z^{i-1}) \cong \mathrm{R}^2F(Z^{i-2}) \cong \cdots \cong \mathrm{R}^pF(0) = 0 \text{ si } p \gg 0,$$

y luego la sucesión

$$0 \longrightarrow F(Z^{i-1}) \longrightarrow F(K^{i-1}) \longrightarrow F(Z^i) \longrightarrow 0$$

es **exacta** para todo $i \in \mathbb{Z}$, i.e., $F(K^\bullet)$ es un complejo exacto. $\square$

Veremos que podemos reemplazar resoluciones inyectivas por resoluciones F-acíclicas (Teorema de de Rham). En el caso de espacios topológicos, será especialmente interesante encontrar ejemplos de haces Γ-acíclicos.