Geometría Algebraica

Clase 23

Pedro Montero

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

25 de Octubre de 2023

§4.3 Categorías abelianas y functores exactos

Una categoría $\mathscr{C}$ es **aditiva** si para todos $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ se tiene que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ es un grupo abeliano, y además se verifica que:

1. La composición $(f, g) \longmapsto g \circ f$ es bilineal.
2. $\exists!\ 0 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ con $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(0, 0) = \{0\}$ grupo trivial.
3. Para todos $A_1, A_2 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ existe un único $B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ junto $j_i : A_i \to B$ (resp. $p_i : B \to A_i$), con $i \in \{1, 2\}$, que hacen de B la **suma directa** (resp. **producto**) de A_1 y A_2 en $\mathscr{C}$.

Un functor entre categorías aditivas $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ es **aditivo** (covariante) si todos los $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A), F(B))$ son morfismos de grupos.

Una categoría aditiva $\mathscr{C}$ es una **categoría abeliana** si además se cumple

4. Todo morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ posee un kernel y un cokernel en $\mathscr{C}$, y la aplicación natural $A/\ker(f) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}(f)$ es un isomorfismo.

Aquí, $A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3$ es una **sucesión exacta** si $\ker(f_2) = \mathrm{Im}(f_1)$.

1. Si A anillo conmutativo, A-$\mathbf{Mod}$ es abeliana y la sub-categoría de A-módulos finitamente generados es abeliana también.
2. Si X espacio topológico, $\mathbf{Sh}(X)$ es abeliana.
3. Si $(X, \mathscr{O}_X)$ espacio anillado, $\mathscr{O}_X$-$\mathbf{Mod}$ es abeliana.
4. Si X variedad algebraica, $\mathbf{Coh}(X)$ y $\mathbf{Qcoh}(X)$ son abelianas.
5. Si X variedad algebraica de $\dim(X) \geq 1$, $\mathbf{Vect}(X)$ **no** es abeliana.

Sea $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ functor aditivo covariante entre categorías abelianas, y sean

$$A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3 \text{ morfismos en } \mathscr{C}$$

tal que $f_2 \circ f_1 = 0$, i.e., $\mathrm{Im}(f_1) \subseteq \ker(f_2)$. Aplicando F, obtenemos

$$F(A_1) \xrightarrow{F(f_1)} F(A_2) \xrightarrow{F(f_2)} F(A_3) \text{ morfismos en } \mathscr{D}$$

que también cumplen que $F(f_2) \circ F(f_1) \overset{\text{def}}{=} F(f_2 \circ f_1) = 0$.

Functores exactos por izquierda y derecha

Sea $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ un functor aditivo (covariante) entre categorías abelianas. Decimos que F es **exacto por la izquierda** (resp. **derecha**) si para toda

$$0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3 \longrightarrow 0 \quad \text{sucesión exacta corta en } \mathscr{C} \qquad (S)$$

es enviada por F en una sucesión en $\mathscr{D}$

$$0 \longrightarrow F(A_1) \xrightarrow{F(f_1)} F(A_2) \xrightarrow{F(f_2)} F(A_3) \longrightarrow 0 \qquad (F(S))$$

exacta salvo quizás en $F(A_3)$ (resp. en $F(A_1)$), i.e., **quizás** $F(f_2)$ **no es sobreyectivo** (resp. **quizás** $F(f_1)$ **no es inyectivo**).

Decimos que F es un **functor exacto** si es exacto por la izquierda y por la derecha, i.e., **si** (S) **es exacta entonces** $F(S)$ **es exacta**.

1. Sea X variedad **afín**, con $A = \mathscr{O}(X)$. El functor de secciones globales
$$\Gamma : \mathbf{Coh}(X) \longrightarrow A\text{-}\mathbf{Mod},\ \mathscr{F} \longmapsto \Gamma(X, \mathscr{F})$$
es un **functor exacto**.

2. Sea A anillo conmutativo y $f \in A$. El functor de localización
$$(\cdot)_f : A\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow A_f\text{-}\mathbf{Mod},\ M \longmapsto M_f \quad \text{es un } \textbf{functor exacto}.$$

3. Sea $\mathscr{C}$ una categoría abeliana y $A_0 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ un objeto fijo. Entonces,
$$\mathrm{Hom}(A_0, \cdot) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathbf{Ab},\ B \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A_0, B)$$
es **exacto por la izquierda**. Por ejemplo:
   (a) Si $\mathscr{C} = A\text{-}\mathbf{Mod}$, entonces $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ es un A-módulo.
   (b) Si $\mathscr{C} = \mathscr{O}_X\text{-}\mathbf{Mod}$, entonces $\mathrm{Hom}_X(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ es un $\mathscr{O}_X(X)$-módulo.
   (c) Si $\mathscr{C} = \mathscr{O}_X\text{-}\mathbf{Mod}$ y consideramos el functor $\mathscr{H}om(\mathscr{F}, \cdot)$
$$\mathscr{O}_X\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathscr{O}_X\text{-}\mathbf{Mod},\ \mathscr{G} \longmapsto \mathscr{H}om(\mathscr{F}, \mathscr{G})$$
   donde el $\mathscr{O}_X$-módulo $\mathscr{H}om(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ es el haz $U \mapsto \mathrm{Hom}_U(\mathscr{F}|_U, \mathscr{G}|_U)$.

4. Sea X espacio topológico. Entonces, el functor de secciones globales

$$\Gamma : \mathbf{Sh}(X) \longrightarrow \mathbf{Ab},\ \mathscr{F} \longmapsto \Gamma(X, \mathscr{F})$$

   es **exacto por la izquierda**.

5. Más generalmente (Ejercicio), si $f : X \to Y$ morfismo regular entre variedades algebraicas, el functor imagen directa

$$f_* : \mathbf{Qcoh}(X) \longrightarrow \mathbf{Qcoh}(Y),\ \mathscr{F} \longmapsto f_*\mathscr{F}$$

   es **exacto por la izquierda**.

Los **functores derivados** son nuevos functores que permitirán medir qué tanto falla la exactitud de un functor exacto por la izquierda (o derecha). En particular, las cohomologías H^i son los functores derivados de Γ.

Sea $\mathscr{C}$ una categoría abeliana. Un **complejo** (de cocadenas) en $\mathscr{C}$ es una colección $K^\bullet = (K^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que:

1. $K^n \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ es un objeto de $\mathscr{C}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.
2. $d^n : K^n \to K^{n+1}$ es un morfismo en $\mathscr{C}$ con $d^{n+1} \circ d^n = 0$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Gráficamente, la información anterior se representa en el diagrama

$$K^\bullet : \cdots \xrightarrow{d^{i-2}} K^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} K^i \xrightarrow{d^i} K^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \cdots$$

Más aún, para cada $i \in \mathbb{Z}$, el objeto

$$\mathrm{H}^i(K^\bullet) := \ker(d^i)/\operatorname{Im}(d^{i-1}) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{coker}\left(\operatorname{Im}(d^{i-1}) \longrightarrow \ker(d^i)\right) \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$$

es llamado la i-**ésima cohomología** del complejo $K^\bullet$.

Si $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ functor aditivo (covariante) entre categorías abelianas, denotamos por $F(K^\bullet)$ al complejo en $\mathscr{D}$ dado por $(F(K^n), F(d^n))_{n\in\mathbb{Z}}$ donde $F(K^n) \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})$ y donde $d^n \overset{\text{def}}{=} F(d^n) : F(K^n) \longrightarrow F(K^{n+1})$.

Sea $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ functor **exacto**. Para todo complejo $K^\bullet$ en $\mathscr{C}$ tenemos

$$\mathrm{H}^i(F(K^\bullet)) \xrightarrow{\sim} F(\mathrm{H}^i(K^\bullet)) \text{ para todo } i \in \mathbb{Z}.$$

Prueba: Sea $K^\bullet = (K^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ en $\mathscr{C}$, y sean $Z^i := \ker(d^i)$ y $B^i := \mathrm{Im}(d^{i-1})$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Así, $\mathrm{H}^i(K^\bullet) \overset{\text{def}}{=} Z^i/B^i$. Como F exacto, tenemos

$$F(Z^i) \overset{\text{def}}{=} \ker(F(d^i)) \text{ y } F(B^i) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Im}(F(d^{i-1})) \text{ para todo } i \in \mathbb{Z}.$$

Además, la sucesión exacta $0 \to B^i \to Z^i \to \mathrm{H}^i(K^\bullet) \to 0$ en $\mathscr{C}$ induce

$$0 \longrightarrow F(B^i) \longrightarrow F(Z^i) \longrightarrow F(\mathrm{H}^i(K^\bullet)) \longrightarrow 0 \text{ sucesión exacta en } \mathscr{D}.$$

Así, el isomorfismo deseado se obtiene del hecho que

$$F(\mathrm{H}^i(K^\bullet)) \cong F(Z^i)/F(B^i) = \ker(F(d^i))/\mathrm{Im}(F(d^{i-1})) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{H}^i(F(K^\bullet)). \qquad \square$$

Sean $K^\bullet = (K^n, d_K^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ y $L^\bullet = (L^n, d_L^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dos complejos en una categoría abeliana $\mathscr{C}$. Un **morfismo de complejos**

$$\varphi := \varphi^\bullet : (K^\bullet, d_K^\bullet) \to (L^\bullet, d_L^\bullet)$$

son morfismos $\{\varphi^i : K^i \to L^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ compatibles con los diferenciales:

$$\varphi^{i+1} \circ d_K^i = d_L^i \circ \varphi^i \text{para todo } i \in \mathbb{Z}.$$

En otras palabras, el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
K^\bullet : \arrow[d, "\varphi"] & \cdots \arrow[r, "d_K^{i-2}"] & K^{i-1} \arrow[r, "d_K^{i-1}"] \arrow[d, "\varphi^{i-1}"] & K^i \arrow[r, "d_K^i"] \arrow[d, "\varphi^i"] & K^{i+1} \arrow[r, "d_K^{i+1}"] \arrow[d, "\varphi^{i+1}"] & \cdots \\
L^\bullet : & \cdots \arrow[r, "d_L^{i-2}"] & L^{i-1} \arrow[r, "d_L^{i-1}"] & L^i \arrow[r, "d_L^i"] & L^{i+1} \arrow[r, "d_L^{i+1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

La categoría $\mathrm{Kom}(\mathscr{C})$ así obtenida es la **categoría de complejos** de $\mathscr{C}$. No es difícil probar que es una categoría abeliana (Ejercicio).

§4.4 Resoluciones inyectivas y quasi-isomorfismos

Objetos inyectivos

En todo lo que sigue de la clase, $\mathscr{C}$ es una categoria abeliana.

La siguiente será una noción fundamental (cf. Teorema de Hanh-Banach).

Definición (Baer, 1940)

Un objeto $I \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ es **inyectivo** si para toda sucesión exacta

$$0 \to A \hookrightarrow B$$

y todo morfismo $f : A \longrightarrow I$, existe un morfismo (no necesariamente único) $g : B \longrightarrow I$ tal que $g \circ \varphi = f$. Equivalentemente, el functor **contravariante**

$$\mathrm{Hom}(\,\cdot\,, I) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathbf{Ab},\ A \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, I) \text{ es } \textbf{exacto},$$

i.e., siempre es posible completar el diagrama conmutativo siguiente:

$$\begin{tikzcd}
I & \\
A \arrow[u, "f"] \arrow[r, hook, "\varphi"] & B \arrow[ul, dotted, "\exists\, g"']
\end{tikzcd}$$

Nuestras categorías favoritas serán las siguientes.

La categoría $\mathscr{C}$ **tiene suficientes inyectivos** si todo objeto $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ se incrusta en un objeto inyectivo, i.e.,

Existe $I = I(A) \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ inyectivo y $A \hookrightarrow I$ morfismo de kernel nulo.

Los ejemplos que más usaremos son los siguientes:

Hecho (Ejercicio de Lectura, ver Proposición 4.4.6 y Ejercicio 4.4.7)

1. La categoría de grupos abelianos $\mathbf{Ab}$ tiene suficientes inyectivos.
2. Sea A un anillo conmutativo. Entonces, la categoría de A-módulos A-$\mathbf{Mod}$ tiene suficientes inyectivos.

Sea X espacio topológico (resp. espacio anillado). Entonces, la categoría $\mathbf{Sh}(X)$ de haces de grupos abelianos en X (resp. la categoría $\mathscr{O}_X$-$\mathbf{Mod}$ de $\mathscr{O}_X$-módulos) **tiene suficientes inyectivos**.

Prueba para $\mathbf{Sh}(X)$: Sea $\mathscr{F}$ un haz de grupos abelianos en X, y para cada $x \in X$ consideremos una inclusión $\mathscr{F}_x \hookrightarrow I(\mathscr{F}_x)$, con $I(\mathscr{F}_x)$ un grupo abeliano inyectivo en donde se incrusta el tallo $\mathscr{F}_x$.

Sea $I(\mathscr{F}) \in \mathbf{Sh}(X)$ el haz definido por

$$I(\mathscr{F})(U) := \prod_{x \in U} I(\mathscr{F}_x) \text{ para todo } U \subseteq X \text{ abierto.}$$

Así, tenemos un morfismo inyectivo $\mathscr{F} \hookrightarrow I(\mathscr{F})$ y, dado que los morfismos de haces están determinados por los tallos, para todo $\mathscr{G} \in \mathbf{Sh}(X)$ se verifica

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{G}, I(\mathscr{F})) \cong \prod_{x \in X} \mathrm{Hom}(\mathscr{G}_x, I(\mathscr{F}_x)) \text{ en } \mathbf{Ab}.$$

Así, $I(\mathscr{F})$ es un objeto inyectivo en la categoría $\mathbf{Sh}(X)$. $\square$

Recuerdo: Sea X variedad **afín** con $A = \mathscr{O}(X)$. Vimos que la categoría abeliana $\mathbf{Coh}(X)$ puede verse como una subcategoría de A-$\mathbf{Mod}$ vía

$$\mathscr{F} \longmapsto \mathrm{H}^0(X, \mathscr{F}) \cong \Gamma(X, \mathscr{F})$$

La ventaja es que en A-$\mathbf{Mod}$ los cálculos son mucho más simples.

Hecho (Teorema de Freyd-Mitchell, 1964)

Toda categoría abeliana (pequeña) $\mathscr{C}$ puede ser vista como subcategoría de R-$\mathbf{Mod}$ para cierto anillo (**no necesariamente conmutativo**) R.

Consecuencia práctica: Todos los cálculos en $\mathscr{C}$ que involucren kernel, cokernel e imágenes pueden hacerse en R-$\mathbf{Mod}$ mediante "diagram chasing". En particular, podemos calcular pensando los objetos de $\mathscr{C}$ como **conjuntos**.

Un morfismo de complejos $\varphi : K^\bullet \longrightarrow L^\bullet$ en $\mathscr{C}$, dado por la familia de morfismos $\{\varphi^i : K^i \longrightarrow L^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ tales que $\varphi^{i+1} \circ d^i_K = d^i_L \circ \varphi^i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, **induce un morfismo en cohomología**:

$$\mathrm{H}^i(\varphi) : \mathrm{H}^i(K^\bullet) \longrightarrow \mathrm{H}^i(L^\bullet) \text{ para todo } i \in \mathbb{Z}.$$

En efecto, recordando que $\mathrm{H}^i(K^\bullet) \overset{\text{def}}{=} \ker(d^i_K)/\operatorname{Im}(d^{i-1}_K)$, cada elemento (!) $x \in \ker(d^i_K)$ verifica que

$$0 = (\varphi^{i+1} \circ d^i_K)(x) = d^i_L(\varphi^i(x)), \text{ i.e., } \varphi^i(x) \in \ker(d^i_L).$$

La relación $\varphi^i \circ d^{i-1}_K = d^{i-1}_L \circ \varphi^{i-1}$ implica que si $x' \in \ker(d^i_K)$ es tal que $x' = x + d^{i-1}_K(y)$ para cierto elemento $y \in K^{i-1}$, entonces tenemos que $\varphi^i(x') = \varphi^i(x) + \varphi^i(d^{i-1}_K(y)) = \varphi^i(x) + d^{i-1}_L(\varphi^{i-1}(y))$. En otras palabras,

$$[\varphi^i(x)] = [\varphi^i(x')] \text{ en } \mathrm{H}^i(L^\bullet) \overset{\text{def}}{=} \ker(d^i_L)/\operatorname{Im}(d^{i-1}_L).$$

El **lema de la serpiente** (aplicado en la categoría R-$\mathbf{Mod}$) implica que si

$$0 \longrightarrow K^\bullet \xrightarrow{\varphi} L^\bullet \xrightarrow{\psi} M^\bullet \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de complejos en $\mathscr{C}$, i.e., para todo $i \in \mathbb{Z}$ la sucesión

$$0 \longrightarrow K^i \xrightarrow{\varphi^i} L^i \xrightarrow{\psi^i} M^i \longrightarrow 0 \text{ es exacta en } \mathscr{C}$$

entonces hay una **sucesión exacta larga en cohomología** asociada

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}^{i-1}(M^\bullet) \xrightarrow{\delta^{i-1}} \mathrm{H}^i(K^\bullet) \xrightarrow{\mathrm{H}^i(\varphi)} \mathrm{H}^i(L^\bullet) \xrightarrow{\mathrm{H}^i(\psi)} \mathrm{H}^i(M^\bullet) \xrightarrow{\delta^i}$$
$$\xrightarrow{\delta^i} \mathrm{H}^{i+1}(K^\bullet) \xrightarrow{\mathrm{H}^{i+1}(\varphi)} \mathrm{H}^{i+1}(L^\bullet) \xrightarrow{\mathrm{H}^{i+1}(\psi)} \mathrm{H}^{i+1}(M^\bullet) \xrightarrow{\delta^{i+1}} \cdots$$

Aquí, $\delta^i : \mathrm{H}^i(M^\bullet) \longrightarrow \mathrm{H}^{i+1}(K^\bullet)$ es el i-**ésimo morfismo de conexión**.

Estamos en condiciones de definir las nociones fundamentales del Álgebra Homológica

Sea $\varepsilon : K^\bullet \longrightarrow L^\bullet$ un morfismo de complejos en $\mathscr{C}$. Decimos que ε es un **quasi-isomorfismo** (qis) si

$\mathrm{H}^i(\varepsilon) : \mathrm{H}^i(K^\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^i(L^\bullet)$ es un isomorfismo para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Más aún, en este caso decimos que $(\varepsilon, L^\bullet)$ es una **resolución** de $K^\bullet$.

Decimos dos morfismos de complejos $f : K^\bullet \longrightarrow L^\bullet$ y $g : K^\bullet \longrightarrow L^\bullet$ en $\mathscr{C}$ son **homotópicamente equivalentes**, y escribimos $f \sim g$ (o $f \sim_h g$), si:

Existen morfismos $h = \{h^i : K^i \longrightarrow L^{i-1}\}_{i \in \mathbb{Z}}$ tales que
$f^i - g^i = d_L^{i-1} \circ h^i + h^{i+1} \circ d_K^i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Gráficamente, la **homotopía** h está dada por diagramas de la forma

$$\begin{tikzcd}
 & K^i \arrow[r, "d_K^i"] \arrow[dl, "h^i"'] & K^{i+1} \arrow[dl, "h^{i+1}"] \\
L^{i-1} \arrow[r, "d_L^{i-1}"'] & L^i &
\end{tikzcd}$$

$f \sim g$ IMPLICA $\mathrm{H}^i(f) = \mathrm{H}^i(g)$

Sean $f, g : K^\bullet \longrightarrow L^\bullet$ morfismos de complejos en $\mathscr{C}$.

Si $f \sim g$, entonces $\mathrm{H}^i(f) = \mathrm{H}^i(g)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Prueba: Sea $x \in \ker(d_K^i)$, entonces

$$f^i(x) - g^i(x) \overset{\text{def}}{=} d_L^{i-1}(h^i(x)) + h^{i+1}(d_K^i(x)) = d_L^{i-1}(h^i(x))$$

y luego $[f^i(x)] = [g^i(x)]$ en $\mathrm{H}^i(L^\bullet) \overset{\text{def}}{=} \ker(d_L^i)/\operatorname{Im}(d_L^{i-1})$. □

Consecuencias inmediatas:

1. Si $f : K^\bullet \to L^\bullet$ y $g : L^\bullet \to K^\bullet$ morfismos de complejos en $\mathscr{C}$ tales que

$$f \circ g \sim \mathrm{Id}_{L^\bullet} \text{ y } g \circ f \sim \mathrm{Id}_{K^\bullet}$$

entonces f y g son quasi-isomorfismos, y $\mathrm{H}^i(f)^{-1} = \mathrm{H}^i(g)$ $\forall i \in \mathbb{Z}$.

2. Si $f : K^\bullet \to L^\bullet$ verifica $f \sim 0$, entonces $\mathrm{H}^i(f) = 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Para el recíproco de (2) necesitamos hablar de **complejos exactos**.

Sea $K^\bullet$ un complejo en una categoría abeliana $\mathscr{C}$. Decimos que $K^\bullet$ es

1. **Exacto** si $\mathrm{H}^i(K^\bullet) = 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, i.e., $\mathrm{Im}(d^{i-1}) = \ker(d^i)\ \forall i \in \mathbb{Z}$.
2. **Positivo** si $K^i = 0$ para todo $i < 0$.

Sea $f : K^\bullet \to L^\bullet$ morfismo de complejos **positivos** en $\mathscr{C}$, y supongamos:

1. Todo objeto L^i es **inyectivo** en $\mathscr{C}$, y que
2. El complejo $K^\bullet$ es **exacto**, y en particular $\mathrm{H}^i(f) = 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Entonces, $f \sim 0$.

Prueba: Construiremos morfismos de homotopía h^i por inducción[1] en $i \in \mathbb{N}$:

Supongamos $h^i : K^i \longrightarrow L^{i-1}$ construido y verifica la fórmula de homotopía

$$f^j = f^j - 0 = d_L^{j-1} \circ h^j + h^{j+1} \circ d_K^j \text{ para todo } j \leq i-1. \qquad (\star)$$

Sea $g^i := f^i - d_L^{i-1} \circ h^i$, que a posteriori verificará que $g^i = h^{i+1} \circ d_K^i$ por $(\star)$.

[1] Podemos considerar $h^i := 0$ si $i < 0$.

Complejos exactos

$$\begin{tikzcd}
K^{i-1} \arrow[r, "d_K^{i-1}"] & K^i \arrow[r, "d_K^i"] \arrow[dl, "h^i"'] \arrow[d, "g^i"] & K^{i+1} \arrow[dl, dotted, "\exists?\ h^{i+1}"] \\
L^{i-1} \arrow[r, "d_L^{i-1}"'] & L^i &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
K^{i-1} \arrow[r, "d_K^{i-1}"] \arrow[d, "f^{i-1}"'] & K^i \arrow[d, "f^i"] \\
L^{i-1} \arrow[r, "d_L^{i-1}"'] & L^i
\end{tikzcd}$$

implican, junto con $(\star)$ para $j = i-1$ (i.e., $f^{i-1} = d_L^{i-2} \circ h^{i-1} + h^i \circ d_K^{i-1}$), que

$$\begin{aligned}
g^i \circ d_K^{i-1} &\overset{\text{def}}{=} f^i \circ d_K^{i-1} - d_L^{i-1} \circ (h^i \circ d_K^{i-1}) \\
&\underset{(\star)}{=} (f^i \circ d_K^{i-1} - d_L^{i-1} \circ f^{i-1}) + (d_L^{i-1} \circ d_L^{i-2}) \circ h^{i-1} = 0,
\end{aligned}$$

i.e., $g^i = 0$ en $\mathrm{Im}(d_K^{i-1}) = \ker(d_K^i)$. Por la propiedad universal del cociente

$$g^i : K^i / \ker(d_K^i) \cong \mathrm{Im}(d_K^i) \longrightarrow L^i.$$

Como L^i es inyectivo y $\mathrm{Im}(d_K^i) = \ker(d_K^{i+1}) \hookrightarrow K^{i+1}$, existe una extensión

$$h^{i+1} : K^{i+1} \longrightarrow L^i$$

de g que cumple $(\star)$. $\square$