Geometría Algebraica

Clase 22

Pedro Montero

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

23 de Octubre de 2023

§4.1 Cohomología de Čech y Haces coherentes

Teorema de Anulación de Grothendieck

Sea X variedad algebraica y $\mathscr{F}$ haz de grupos abelianos. Entonces,

$$\mathrm{H}^p(X, \mathscr{F}) = 0 \text{ para todo } p > \dim(X).$$

Prueba (para X proyectiva y $\mathscr{F}$ coherente): Sea $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ con $n = \dim(X)$. Notar que X se puede cubrir con a lo más $n+1$ abiertos afines:

Tomando secciones hiperplanas, notamos que existe $\mathbb{P}^{N-n-1} \cong \Lambda \subseteq \mathbb{P}^N$ lineal tal que $X \cap \Lambda = \varnothing$. Si Λ está dado por $\Lambda = \{x_0 = \cdots = x_n = 0\} \subseteq \mathbb{P}^N$ entonces $X \subseteq U_0 \cup \cdots \cup U_n$, con $U_i \stackrel{\text{def}}{=} \{x_i \neq 0\} \cong \mathbb{A}^n$ y así $V_i = X \cap U_i$ abierto afín.

Así, $\mathscr{U} := \{V_0, \ldots, V_n\}$ cumple $C^p(\mathscr{U}, \mathscr{F}) \stackrel{\text{def}}{=} 0$ si $p > n$ y luego (Teorema de Leray) $\mathrm{H}^p(X, \mathscr{F}) = 0$ para todo $p > n$ si $\mathscr{F}$ es un haz coherente. $\square$

La prueba general se encuentra en **Hartshorne**, Chapter III, Theorem 2.7.

Ejemplo: Si $\mathscr{F}$ un haz coherente en $\mathbb{P}^1$. Entonces $\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^1, \mathscr{F}) = 0$ si $i \geq 2$.

Si $\mathscr{F} \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}$: $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}) \cong \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}) \cong k$. Para $\mathrm{H}^1(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1})$, usamos cohomología de Čech con el cubrimiento **afín** $U_0 = \{x_0 \neq 0\}$ y $U_1 = \{x_1 \neq 0\}$:

$$C^1(\mathscr{U}, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(U_0 \cap U_1) \cong \left\{ \frac{f}{x_0^a x_1^b} \text{ con } f \text{ homogéneo de grado } a+b \right\}$$

$$\cong \mathrm{Vect}_k \left\langle \frac{x_0^m x_1^n}{x_0^a x_1^b} \text{ con } m+n = a+b,\ m,n,a,b \geq 0 \right\rangle$$

La condición $m - a = b - n$ implica $m \geq a$ o bien $n \geq b$, i.e., $s = \frac{x_0^m x_1^n}{x_0^a x_1^b}$ regular en U_0 o en U_1. En particular, cada generador está en la imagen de

$$d^0 : C^0(\mathscr{U}, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(U_0) \times \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(U_1) \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(U_0 \cap U_1)$$
$$(s_0, s_1) \longmapsto s_1|_{U_0 \cap U_1} - s_0|_{U_0 \cap U_1}.$$

i.e., $\mathrm{H}^1(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}) = 0$.

Notación

Si $E \to X$ fibrado vectorial y si identificamos E con su haz de secciones regulares $\mathscr{E}$, definimos $h^i(X, E) := \dim_k \mathrm{H}^i(X, E) \stackrel{\text{def}}{=} \dim_k \mathrm{H}^i(X, \mathscr{E})$.

Recuerdo: $\omega_{\mathbb{P}^n} \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)$ fibrado canónico de $\mathbb{P}^n$.

Si $\mathscr{F} \cong \omega_{\mathbb{P}^1} \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$: $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)) = \{0\}$. Para $\mathrm{H}^1(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-2))$ notamos que $C^1(\mathscr{U}, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-2))$ está dado por

$$\begin{aligned}\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)(U_0 \cap U_1) &\cong \left\{ \frac{f}{x_0^a x_1^b} \text{ con } f \text{ homogéneo de grado } a+b-2 \right\} \\ &\cong \mathrm{Vect}_k \left\langle \frac{x_0^m x_1^n}{x_0^a x_1^b} \text{ con } m+n = a+b-2,\ m,n,a,b \in \mathbb{Z} \right\rangle\end{aligned}$$

$m-(a-1) = (b-1)-n$ implica $m \geq a-1$ o $n \geq b-1$. Si alguna desigualdad es estricta, $s = \frac{x_0^m x_1^n}{x_0^a x_1^b}$ regular en U_0 o U_1 y luego sería 0 en $\mathrm{H}^1(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-2))$.

Resta considerar el caso $m = a-1$ y $n = b-1$, i.e., $s = \frac{1}{x_0 x_1}$. Como $C^2(\mathscr{U}, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)) = 0$ tenemos $d^1 = 0$, i.e., $\ker(d^1) = C^1(\mathscr{U}, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-2))$. Así,

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{P}^1, \omega_{\mathbb{P}^1}) \cong \mathrm{Vect}_k \left\langle \frac{1}{x_0 x_1} \right\rangle \cong k.$$

§4.2 Cohomología coherente en variedades proyectivas

CÁLCULO DE $\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$

Sea $i \in \{0, \dots, n\}$ y sea $d \in \mathbb{Z}$. Entonces,

1. $h^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = \binom{n+d}{n}$ (resp. $= 0$) si $d \geq 0$ (resp. $d < 0$).
2. $h^n(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = \binom{-d-1}{n}$ (resp. $= 0$) si $d \leq -n-1$ (resp. $d \geq -n$).
3. $h^i(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = 0$ para todo $d \in \mathbb{Z}$ si $0 < i < n$.

En particular, $h^n(\mathbb{P}^n, \omega_{\mathbb{P}^n}) = 1$.

Prueba: Sea $\mathscr{F} := \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$, con $\check{\mathrm{H}}^p(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}) \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \check{\mathrm{H}}^p(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$. En particular, para $p = 0$ hay un isomorfismo de anillos graduados

$$\check{\mathrm{H}}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}) \cong k[x_0, \dots, x_n] =: S$$

de donde se deduce (1). Sea $p \geq 1$ y usemos $U_i \overset{\text{def}}{=} \{x_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^n$ para calcular $\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathscr{F})$ via cohomología de Čech (Leray):

Para cada $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ sea $U_I := \bigcap_{i \in I} U_i$. En particular,

$$\mathrm{H}^0(U_I, \mathscr{F}|_{U_I}) \overset{\text{def}}{=} \mathscr{F}(U_I) \cong \mathrm{Vect}_k \left\langle x_0^{\ell_0} \cdots x_n^{\ell_n} \text{ con } \ell_j \in \mathbb{Z} \text{ y } \ell_j \geq 0 \text{ si } j \notin I \right\rangle.$$

Cálculo de $\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$

Así, el **complejo de Čech** del cubrimiento estándar de $\mathbb{P}^n$ está dado por

$$C^\bullet(\mathscr{U}, \mathscr{F}) : \qquad \prod S_{x_{i_0}} \xrightarrow{d^0} \prod S_{x_{i_0}x_{i_1}} \xrightarrow{d^1} \dots \xrightarrow{d^{n-1}} S_{x_0\cdots x_n} \xrightarrow{d^n} 0$$

con $\check{\mathrm{H}}^i(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}) \overset{\text{def}}{=} \ker(d^i)/\operatorname{Im}(d^{i-1})$. Veamos que hay una forma bilineal no-degenerada $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \times \mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-d-n-1)) \to \mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \omega_{\mathbb{P}^n}) \cong k$:

$$\check{\mathrm{H}}^n(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{coker}\left(\prod_k S_{x_0\cdots\widehat{x_k}\cdots x_n} \xrightarrow{d^{n-1}} S_{x_0\cdots x_n}\right) \cong \operatorname{Vect}_k\langle x_0^{a_0}\cdots x_n^{a_n},\ a_j < 0\},$$

con graduación $d := \sum_{i=0}^n a_i$. Luego, si $d = -n-1$ hay un monomio: $x_0^{-1}\cdots x_n^{-1}$. Así, $\mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \omega_{\mathbb{P}^n}) \cong \mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)) \cong k$. Además, si $d \geq 0$ entonces

$$\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \cong \operatorname{Vect}_k\langle x_0^{b_0}\cdots x_n^{b_n} \text{ con } b_j \geq 0 \text{ y } \sum b_j = d\rangle,$$

por lo que si $x_0^{a_0}\cdots x_n^{a_n} \in \mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-d-n-1))$ y $x_0^{b_0}\cdots x_n^{b_n} \in \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$,

$$x_0^{a_0+b_0}\cdots x_n^{a_n+b_n} \in \mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \omega_{\mathbb{P}^n}) \cong k.$$

Si $d < 0$, $\mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-d-n-1)) = \{0\}$ pues $-d-n-1 > -n-1$, i.e., (2).

Cálculo de $\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$

Para ver $h^i(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = 0 \ \forall d \in \mathbb{Z}$ si $0 < i < n$, usamos inducción en n:

Localizando respecto a x_n tenemos $C^\bullet(\mathscr{U}, \mathscr{F})_{x_n} \cong C^\bullet(\mathscr{U}|_{U_n}, \mathscr{F}|_{x_n})$ y, dado que $U_n \cong \mathbb{A}^n$ afín, tenemos (Serre) que $\mathrm{H}^i(U_n, \mathscr{F}|_{U_n}) = 0 \ \forall i \geq 1$. Así, $\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathscr{F})_{x_n} = 0 \ \forall i \geq 1$, i.e., todo $\sigma \in \mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathscr{F})$ es anulado por cierta x_n^p. Así, basta probar que multiplicar por x_n define un morfismo **inyectivo**:

Sea $H := \{x_n = 0\} \cong \mathbb{P}^{n-1} \xrightarrow{\iota} \mathbb{P}^n$, y consideremos la sucesión asociada a H

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-H) \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \xrightarrow{\cdot x_n} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \iota_* \mathscr{O}_H \longrightarrow 0 \qquad (\star)$$

Tensorizando $(\star) \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ y considerando $\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}}$, obtenemos

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{\cdot x_n} \mathscr{F} \longrightarrow \iota_* \mathscr{F}_H \longrightarrow 0 \text{ con } \mathscr{F}_H := \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \mathscr{O}_H(d).$$

Dado que $\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \iota_* \mathscr{F}_H) \cong \mathrm{H}^i(H, \mathscr{F}_H)$, obtenemos las sucesiones

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}) \xrightarrow{\cdot x_n} \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(H, \mathscr{F}_H) \longrightarrow \qquad (a)$$
$$\longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}) \xrightarrow{\cdot x_n} \mathrm{H}^1(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}) \longrightarrow \underbrace{0}_{\text{inducción}}$$

$$\overbrace{0}^{\text{inducción}} \longrightarrow \mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}) \xrightarrow{\cdot x_n} \mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}) \longrightarrow \overbrace{0}^{\text{inducción}} \quad \text{para todo } 1 < i < n-1, \quad \text{(b)}$$

y así ($\cdot\, x_n$ isomorfismo) $\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}) = 0$ si $1 < i < n-1$. Como $\dim(H) = n-1$,

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^{n-1}(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}) \xrightarrow{\cdot x_n} \mathrm{H}^{n-1}(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}) \longrightarrow \mathrm{H}^{n-1}(H, \mathscr{F}_H) \longrightarrow \qquad \text{(c)}$$

$$\longrightarrow \mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}) \xrightarrow{\cdot x_n} \mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}) \longrightarrow 0 \text{ (anulación de Grothendieck)}$$

Notar que los primeros términos de (a) son

$$0 \longrightarrow k[x_0, \ldots, x_n] \xrightarrow{\cdot x_n} k[x_0, \ldots, x_n] \twoheadrightarrow k[x_0, \ldots, x_{n-1}] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}) \xrightarrow{\cdot x_n} \mathrm{H}^1(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}) \longrightarrow 0,$$

i.e., los primeros tres términos ya forman una sucesión exacta. Así, podemos sub-dividir (a) en dos sucesiones exactas: en los primeros tres términos y

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}) \xrightarrow{\cdot x_n} \mathrm{H}^1(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}) \longrightarrow 0,$$

i.e., $\cdot\, x_n$ es un isomorfismo y por ende $\mathrm{H}^1(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}) = 0$. De manera similar, usando (c), se deduce que $\mathrm{H}^{n-1}(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}) = 0$ y así (3). $\square$

Sea X variedad algebraica y sea $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo. Hay una biyección:

$$\left\{ \begin{array}{c} s \in \Gamma(X, \mathscr{F}) \\ \text{sección global} \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \varphi : \mathscr{O}_X \longrightarrow \mathscr{F} \text{ morfismo} \\ \text{de } \mathscr{O}_X\text{-módulos} \end{array} \right\}$$

$$s \longmapsto \varphi_{s,U} : \mathscr{O}_X(U) \to \mathscr{F}(U),\ \lambda \longmapsto \lambda s|_U$$

$$s_\varphi := \varphi_X(1) \in \mathscr{F}(X) \longleftarrow \varphi$$

Notación: Sea $\iota : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ variedad proyectiva, $d \in \mathbb{Z}$ y $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo. Definimos $\mathscr{F}(d) := \mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_X(d)$ donde $\mathscr{O}_X(d) := \iota^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d) \overset{\text{def}}{=} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)|_X$.

Lema de Serre

Existe $r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ y $m \gg 0$ tal que $\mathscr{O}_X(-m)^{\oplus r} \twoheadrightarrow \mathscr{F}$, i.e., $\mathscr{O}_X^{\oplus r} \twoheadrightarrow \mathscr{F}(m)$.

Prueba: Sea $\mathbb{A}^n \cong U_i \overset{\text{def}}{=} \{x_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^n$ y $V_i = X \cap U_i$ abierto **afín** de X. Como $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}(X)$, $\mathscr{F}|_{V_i} \cong \widetilde{M_i}$ para un $\mathscr{O}(V_i) =: A_i$-módulo M_i fin. gen.

Sean $s_{i,1}, \dots, s_{i,k_i} \in M_i \cong \Gamma(V_i, \mathscr{F}|_{V_i})$ generadores de M_i, y que generan $\mathscr{F}_x$ para todo $x \in V_i$. Veamos que $s_{ij} x_i^m \in \Gamma(X, \mathscr{F}(m))$ para $m \gg 0$:

Notar que $X \setminus V_i$ se cubre por los $\{V_k\}_{k\neq i}$. Así, basta probar que $s_{ij}x_i^m$ se extiende a cada V_k para un $m \gg 0$: dado que $\mathscr{F}(V_k) \overset{\text{def}}{=} M_k$ y $\mathscr{F}(V_i \cap V_k) = (M_k)_{x_i}$, $\exists d_k \in \mathbb{N}$ tal que $s_{ij}x_i^{d_k} \in \mathscr{F}(V_k)$. Así, $m := \max_k\{d_k\}$ funciona.

Luego, hay r secciones $s_{ij} \in \Gamma(X, \mathscr{F}(m))$ que generan los $\mathscr{F}(m)_x$ $\forall x \in X$ y luego definen un morfismo sobreyectivo de $\mathscr{O}_X$-módulos $\mathscr{O}_X^{\oplus r} \twoheadrightarrow \mathscr{F}(m)$. $\square$

Sea X variedad algebraica. Un $\mathscr{O}_X$-módulo $\mathscr{F}$ es **globalmente generado** si existe $N \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ y un morfismo sobreyectivo de $\mathscr{O}_X$-módulos

$$\mathscr{O}_X^{\oplus N} \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \mathscr{F}.$$

Ejemplos:

1. Si $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ variedad proyectiva y $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}(X)$, entonces $\mathscr{F}(m)$ es globalmente generado para $m \gg 0$ (Lema de Serre).
2. Si $E \to X$ fibrado vectorial con haz de secciones $\mathscr{E}$, E globalmente generado (como fibrado) $\Leftrightarrow \mathscr{E}$ es globalmente generado (Ejercicio).

Teorema de finitud de Serre

Sea $\iota : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ variedad algebraica **proyectiva** y $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}(X)$. Los k-e.v. $\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F})$ son de dimensión finita para todo $i \in \mathbb{N}$, i.e., $h^i(X, \mathscr{F}) < +\infty$.

Prueba: Dado que $\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F}) \cong \mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \iota_* \mathscr{F})$ y $\iota_* \mathscr{F} \in \mathbf{Coh}(\mathbb{P}^n)$, podemos asumir $X = \mathbb{P}^n$. Además, $\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}) = 0$ si $i > n$ (Grothendieck). Luego, podemos proceder por **inducción descendente** en $i \in \mathbb{N}$:

Sean $r, n \in \mathbb{N}$ (Lema de Serre) tal que se tiene la sucesión exacta en $\mathbf{Coh}(\mathbb{P}^n)$

$$0 \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-m)^{\oplus r} \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow 0,$$

que induce una sucesión exacta larga en cohomología de la forma

$$\dots \longrightarrow \underbrace{\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-m))^{\oplus r}}_{\text{cálculo explícito}} \xrightarrow{\alpha} \mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}) \xrightarrow{\delta} \underbrace{\mathrm{H}^{i+1}(\mathbb{P}^n, \mathscr{G})}_{\text{inducción}} \longrightarrow \dots$$

y así $h^i(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}) = \mathrm{rg}(\delta) + \dim_k \ker(\delta) = \mathrm{rg}(\delta) + \mathrm{rg}(\alpha) < +\infty$. $\square$

Si $E \to X$ fibrado vectorial en X proyectiva, $\dim_k \mathrm{H}^0(X, E) < +\infty$.

Anulación de Serre

Sea $\iota : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ variedad algebraica **proyectiva** y $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}(X)$. Existe $m_0 = m_0(\mathscr{F}) \in \mathbb{N}$ tal que para todos $i \geq 1$ y $m \geq m_0$, $\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F}(m)) = 0$.

Prueba: Como antes, asumimos $X = \mathbb{P}^n$ y usamos inducción descendente: Existen $r, m_1 \in \mathbb{N}$ (Lema de Serre) y una sucesión exacta en $\mathbf{Coh}(\mathbb{P}^n)$

$$0 \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-m_1)^{\oplus r} \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow 0.$$

Al tensorizar dicha sucesión exacta por $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(m)$ obtenemos

$$0 \longrightarrow \mathscr{G}(m) \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(m - m_1)^{\oplus r} \longrightarrow \mathscr{F}(m) \longrightarrow 0,$$

la cual induce una sucesión exacta larga en cohomología

$$\ldots \to \underbrace{\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(m - m_1))^{\oplus r}}_{= 0 \text{ si } m \geq m_1 \text{ y } i \geq 1 \text{ (cálculo explícito)}} \xrightarrow{\alpha} \mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}(m)) \xrightarrow{\delta} \underbrace{\mathrm{H}^{i+1}(\mathbb{P}^n, \mathscr{G}(m))}_{= 0 \text{ si } m \geq m_2 := m_2(\mathscr{G}) = m_2(\mathscr{F})} \to \ldots$$

Así, $\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}(m)) = 0$ para $m \geq m_0 := \max\{m_1, m_2\}$. □

¡Podemos reinterpretar el concepto de amplitud!

Ejemplo importante: Sea X variedad proyectiva y $L \in \mathrm{Pic}(X)$ **amplio**, i.e., existe $m_0 \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tal que $L^{\otimes m_0}$ es **muy amplio**:

$$\psi := \varphi_{L^{\otimes m_0}} : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n \text{ incrustamiento cerrado,}$$

con $\psi^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \cong L^{\otimes m_0}$. Así, $L^{\otimes m_0} \overset{\text{def}}{=} \mathscr{O}_X(1)$ y para todo $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh(X)}$:

1. $\mathscr{F} \otimes L^{\otimes m m_0} \overset{\text{def}}{=} \mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_X(m) \overset{\text{def}}{=} \mathscr{F}(m)$ globalmente generado $\forall m \gg 0$.
2. Sea $\mathscr{L}$ el haz de seccióńes de L. Entonces, para todos $i \geq 1$ y $m \gg 0$,

$$\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m m_0}) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{H}^i(X, \mathscr{F}(m)) = 0.$$

Sea X variedad algebraica y $L \in \mathrm{Pic}(X)$ con haz de secciones $\mathscr{L}$. Decimos que el haz $\mathscr{L}$ es **amplio como $\mathscr{O}_X$-módulo** si para todo $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}(X)$

$$\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m} \text{ es globalmente generado para todo } m = m(\mathscr{F}) \gg 0.$$

Hecho (Ejercicio de Lectura, ver Teorema 4.2.13)

$$L \in \mathrm{Pic}(X) \text{ amplio} \Leftrightarrow \mathscr{L} \text{ es amplio como } \mathscr{O}_X\text{-módulo.}$$

Sean $L, M \in \mathrm{Pic}(X)$ con haces de secciones $\mathscr{L}$ y $\mathscr{M}$. Entonces:

1. Para todo $r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, el haz $\mathscr{L}$ es amplio si y sólo si $\mathscr{L}^{\otimes r}$ lo es.
2. Si $\mathscr{L}$ y $\mathscr{M}$ son amplios como $\mathscr{O}_X$-módulos, entonces $\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}$ también.
3. Si $\mathscr{M}$ es amplio, entonces $\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}^{\otimes r}$ también lo es para todo $r \gg 0$.

Prueba: Sea $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}(X)$. Para (1), notar que si $\mathscr{L}$ amplio entonces $\mathscr{L}^{\otimes r}$ también (pues $mr \geq m$). Si $\mathscr{L}^{\otimes r}$ amplio entonces para todo $0 \leq s \leq r-1$

$(\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes s}) \otimes (\mathscr{L}^{\otimes r})^{\otimes m} \cong \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes (s+mr)}$ globalmente generado para $m \geq m_s$.

Luego, $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}$ globalmente generado para todo $m \geq r \cdot \max\{m_0, \ldots, m_{r-1}\}$.

Para (2), notar primero que:

Si $\mathscr{L}$ es amplio y $\mathscr{M}$ globalmente generado, entonces $\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}$ amplio.

En efecto, $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}$ es globalmente generado para todo $m \gg 0$ y luego $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m} \otimes \mathscr{M}^{\otimes m} \cong \mathscr{F} \otimes (\mathscr{L} \otimes \mathscr{M})^{\otimes m}$ también, i.e., $\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}$ amplio.

En el caso general con $\mathscr{L}$ y $\mathscr{M}$ amplios, $\mathscr{O}_X \otimes \mathscr{L}^{\otimes m} \cong \mathscr{L}^{\otimes m}$ es globalmente generado para todo $m \gg 0$ y, como $\mathscr{M}^{\otimes m}$ amplio por (1), se tiene que

$$\mathscr{L}^{\otimes m} \otimes \mathscr{M}^{\otimes m} \cong (\mathscr{L} \otimes \mathscr{M})^{\otimes m} \text{ es amplio.}$$

Nuevamente, (1) implica que $\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}$ es amplio.

Para (3), $\mathscr{M}$ amplio implica que $\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}^{\otimes r}$ globalmente generado para todo $r \gg 0$. Así, $(\mathscr{F} \otimes \mathscr{M}^{\otimes m}) \otimes (\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}^{\otimes r})^{\otimes m} \cong \mathscr{F} \otimes (\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}^{\otimes (r+1)})^{\otimes m}$ es globalmente generado para todo $m \gg 0$, i.e., $\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}^{\otimes (r+1)}$ es amplio. $\square$

En la prueba usamos varias veces el hecho que si $\mathscr{L}$ y $\mathscr{M}$ son globalmente generados, entonces $\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}$ también (cf. incrustamiento de Segre).

¡La amplitud es una propiedad cohomológica!

Sea X proyectiva y $L \in \mathrm{Pic}(X)$ con haz de secciones $\mathscr{L}$. Son equivalentes:

1. L es un fibrado en rectas amplio.
2. Para todo $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}(X)$, se tiene que
$$\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}) = 0 \text{ para todo } m \gg 0 \text{ y todo } i \geq 1.$$
3. Para todo $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}(X)$, $\mathrm{H}^1(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}) = 0$ para todo $m \gg 0$.

Prueba: (1)⇒(2) por Anulación de Serre y (2)⇒(3). Veamos (3)⇒(1):

Sea $x \in X$ fijo y $k_x := \iota_x(k)$ **haz rascacielos**, con $k_x \in \mathbf{Coh}(X)$ pues
$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_x \longrightarrow \mathscr{O}_X \xrightarrow{\mathrm{ev}_x} k_x \longrightarrow 0 \text{ es exacta.}$$
Además, si consideramos $\mathscr{F} \xrightarrow{\mathrm{ev}_x} \mathscr{F} \otimes k_x$ con kernel $\mathscr{G} := \mathscr{F} \otimes \mathcal{I}_x$ obtenemos
$$0 \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{\mathrm{ev}_x} \mathscr{F} \otimes k_x \longrightarrow 0 \text{ sucesión exacta en } \mathbf{Coh}(X).$$
Así, (3) implica $\mathrm{H}^1(X, \mathscr{G} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}) = 0$ para todo $m \geq m_0 = m_0(\mathscr{F}, x)$, i.e.,
$$\Gamma(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}) \xrightarrow{\mathrm{ev}_x} \Gamma(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m} \otimes k_x) \text{ es } k\text{-lineal sobreyectiva.}$$

Criterio cohomológico de amplitud

Lema de Nakayama: existe $x \in U = U_{\mathscr{F},m_0} \subseteq X$ abierto tal que $(\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m})|_U$ globalmente generado. Luego (si $\mathscr{F} = \mathscr{O}_X$) $\exists m_1 \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ y $U_{\mathscr{O}_X,m_1}$ abierto tal que $\mathscr{L}^{\otimes m_1}$ globalmente generado en $U_{\mathscr{O}_X,m_1}$. Dado que

$\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m} \cong (\mathscr{L}^{\otimes m_1})^{\otimes r} \otimes (\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes (m_0+s)})$ para ciertos $r \geq 0$ y $0 \leq s < m_1$,

tenemos que $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}$ globalmente generado en el abierto

$$U_x := U_{\mathscr{O}_X,m_1} \cap U_{\mathscr{F},m_0} \cap U_{\mathscr{F},m_0+1} \cap \cdots \cap U_{\mathscr{F},m_0+m_1-1}.$$

Finalmente, basta cubrir X con finitos abiertos U_x y considerar el máximo m_0 para deducir que $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}$ es globalmente generado para todo $m \geq m_0$, i.e., $\mathscr{L}$ es amplio $\Leftrightarrow L \in \mathrm{Pic}(X)$ es rectas amplio. $\square$

Fórmula de proyección

Para aplicar lo anterior al caso de **morfismos finitos** necesitamos:

Sea $f : X \to Y$ morfismo regular entre variedades algebraicas. Para todo $\mathscr{O}_X$-módulo $\mathscr{F}$ y todo haz localmente libre $\mathscr{E}$ de rango r en Y, se tiene

$$\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_Y} f_*\mathscr{F} \cong f_*(f^*(\mathscr{E}) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{F})$$ **(fórmula de proyección)**.

Prueba: Es una afirmación local, por lo que asumimos $\mathscr{E} \cong \mathscr{O}_Y^{\oplus r}$ y como los términos de la fórmula conmutan con sumas directas, asumimos $\mathscr{E} \cong \mathscr{O}_Y$. Así, el resultado se obtiene al observar que $f^*\mathscr{O}_Y \cong \mathscr{O}_X$. □

Sea $f : X \longrightarrow Y$ **morfismo finito** entre variedades **proyectivas**. Entonces, para todo $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}(X)$ y $L \in \mathrm{Pic}(Y)$ se tiene que:

1. $\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F}) \cong \mathrm{H}^i(Y, f_*\mathscr{F})$ para todo $i \geq 0$.
2. Si $L \in \mathrm{Pic}(Y)$ es amplio, entonces $f^*L \in \mathrm{Pic}(X)$ es amplio.

Prueba: Sea $V \subseteq Y$ abierto afín. Como f finito, $U := f^{-1}(V)$ es un abierto afín en X. Luego, si $\mathscr{V}$ cubrimiento afín de Y entonces $\mathscr{U} := f^{-1}(\mathscr{V})$ es un cubrimiento afín de X. Además, por definición de $f_*\mathscr{F}$,

$$C^\bullet(\mathscr{U}, \mathscr{F}) \cong C^\bullet(\mathscr{V}, f_*\mathscr{F}) \text{ con } f_*\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}(Y) \text{ pues } f \text{ finito.}$$

Así, el Teorema de Leray implica (1) pues

$$\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F}) \cong \check{\mathrm{H}}^i_{\mathscr{U}}(X, \mathscr{F}) \cong \check{\mathrm{H}}^i_{\mathscr{V}}(Y, f_*\mathscr{F}) \cong \mathrm{H}^i(Y, f_*\mathscr{F}) \text{ para todo } i \geq 0.$$

Para (2), si $L \in \mathrm{Pic}(Y)$ amplio con haz $\mathscr{L}$ entonces para todo $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}(X)$

$$f_*(\mathscr{F} \otimes f^*\mathscr{L}^{\otimes m}) \cong f_*\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m} \text{ por la fórmula de proyección.}$$

Luego, el ítem (1) implica que

$$\mathrm{H}^1(X, \mathscr{F} \otimes f^*\mathscr{L}^{\otimes m}) \cong \mathrm{H}^1(Y, f_*\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}) \overbrace{=}^{L \text{ amplio}} 0 \text{ para todo } m \geq m_0.$$

El criterio cohomológico de amplitud implica que f^*L es amplio. $\square$

Aplicación: La **normalización** $\nu : X^{\nu} \longrightarrow X$ es un morfismo finito.

Más aún, si X variedad **proyectiva** entonces X^{ν} también es una variedad proyectiva (cf. **Shafarevich**, Chapter 3, Theorem 2.23). Luego,

Si $L \in \mathrm{Pic}(X)$ amplio, entonces $\nu^* L$ es amplio en la normalización X^{ν}.

Consecuencia: Si X variedad **proyectiva** irreducible y $L \cong \mathscr{O}_X(D)$ es un fibrado en rectas **amplio**, entonces

$$D \cdot C > 0 \text{ para toda curva irreducible } C \subseteq X,$$

donde $D \cdot C \overset{\text{def}}{=} \deg(\nu^*(L|_C))$ y donde $\nu : C^{\nu} \longrightarrow C$ es la normalización.

Cultura general

Los famosos **Teorema de Kleiman** y **Teorema de Nakai-Moishezon** son criterios numéricos para el recíproco, i.e., determinar si $L \in \mathrm{Pic}(X)$ amplio.