Geometría Algebraica

Clase 21

Pedro Montero

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

18 de Octubre de 2023

§4.1 Cohomología de Čech y Haces coherentes

¿Para qué sirve la cohomología? ¿Cómo usar la cohomología?

Motivación

Convención: En todo lo que sigue, X es un espacio topológico y todos los haces serán haces en grupos abelianos.

Sea $0 \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{f} \mathscr{G} \xrightarrow{g} \mathscr{H} \longrightarrow 0$ sucesión exacta de haces en X. Entonces, Γ *es un functor exacto por la izquierda*, i.e., la sucesión de secciones globales inducida

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathscr{F}) \xrightarrow{\Gamma(f)} \Gamma(X, \mathscr{G}) \xrightarrow{\Gamma(g)} \Gamma(X, \mathscr{H}) \text{ es exacta.}$$

Sin embargo, $\Gamma(X, \mathscr{G}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathscr{H})$ **no** es necesariamente sobreyectivo, tal como lo ilustra la sucesión exponencial para $X = \mathbb{C}$:

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathscr{O}_X \xrightarrow{\exp(2\pi i \cdot)} \mathscr{O}_X^* \longrightarrow 0.$$

La cohomología mide "cuánto falla la exactitud" de secciones globales.

El sueño cohomológico

Anhelamos definir de manera <u>**canónica**</u> para todo haz de grupos abelianos $\mathscr{F}$ en X y todo $i \in \mathbb{N}$, el i-**ésimo grupo de cohomología** $\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F})$ con:

1. $\mathrm{H}^0(X, \mathscr{F}) \cong \Gamma(X, \mathscr{F}) \overset{\text{def}}{=} \mathscr{F}(X)$.
2. Todo morfismo de haces $\varphi : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ induce un morfismo
$$\mathrm{H}^i(\varphi) : \mathrm{H}^i(X, \mathscr{F}) \longrightarrow \mathrm{H}^i(X, \mathscr{G}) \text{ para todo } i \in \mathbb{N},$$
donde $\mathrm{H}^0(\varphi) = \Gamma(\varphi)$.
3. Toda sucesión exacta $0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{H} \longrightarrow 0$ de haces de grupos abelianos induce una sucesión <u>**exacta**</u> larga

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^0(X, \mathscr{F}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(X, \mathscr{G}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(X, \mathscr{H}) \xrightarrow{\delta^0} \mathrm{H}^1(X, \mathscr{F}) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \mathrm{H}^1(X, \mathscr{G}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X, \mathscr{H}) \xrightarrow{\delta^1} \mathrm{H}^2(X, \mathscr{F}) \longrightarrow \cdots$$

Para cumplir nuestro sueño, necesitaremos aprender sobre **functores derivados**. Antes, ganaremos intuición vía la **cohomología de Čech**.

Sea $\mathscr{F}$ haz en X. Dado un cubrimiento abierto $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ de X, donde I es un conjunto ordenado, definimos el grupo abeliano de p-**cocadenas de Čech** de $\mathscr{F}$ respecto a $\mathscr{U}$ por:

$$C^p(\mathscr{U},\mathscr{F}) := \prod_{i_0<\cdots<i_p} \mathscr{F}(U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_p}), \text{ donde } p\in\mathbb{N}.$$

Una p-**cocadena** $s\in C^p(\mathscr{U},\mathscr{F})$ es una *colección* $s = \{s_{i_0,\dots,i_p}\}_{i_0<\cdots<i_p}$ de secciones de $\mathscr{F}$, donde se escoge una sección por cada posible intersección (ordenada) de $p+1$ abiertos del cubrimiento $\mathscr{U}$.

Ejemplos:

1. $s\in C^0(\mathscr{U},\mathscr{F}) \overset{\text{def}}{=} \prod_{i\in I}\mathscr{F}(U_i)$ es $s = \{s_i\}_{i\in I}$ con $s_i\in\mathscr{F}(U_i)$.
2. $s\in C^1(\mathscr{U},\mathscr{F}) \overset{\text{def}}{=} \prod_{i<j}\mathscr{F}(U_i\cap U_j)$ es $s = \{s_{ij}\}_{i<j}$, $s_{ij}\in\mathscr{F}(U_i\cap U_j)$.
3. $C^2(\mathscr{U},\mathscr{F}) \overset{\text{def}}{=} \prod_{i<j<k}\mathscr{F}(U_i\cap U_j\cap U_k)$ y una 2-cocadena es $s = \{s_{ijk}\}_{i<j<k}$ con $s_{ijk}\in\mathscr{F}(U_i\cap U_j\cap U_k)$.

Para cada $p \in \mathbb{N}$, definimos el **operador de coborde** mediante

$$d^p : C^p(\mathscr{U}, \mathscr{F}) \longrightarrow C^{p+1}(\mathscr{U}, \mathscr{F}),\ s \longmapsto d^p s$$

donde $s = \{s_{j_0,\dots,j_p}\}_{j_0<\dots<j_p}$ y donde $d^p s$ está dada por

$$(d^p s)_{i_0,\dots,i_{p+1}} := \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k s_{i_0,\dots,i_{k-1},i_{k+1},\dots,i_{p+1}}|_{U_{i_0}\cap\dots\cap U_{i_{p+1}}} \in \mathscr{F}(U_{i_0}\cap\dots\cap U_{i_{p+1}}).$$

1. Si $s = \{s_i\} \in C^0(\mathscr{U}, \mathscr{F})$, $(d^0 s)_{i_0 i_1} := s_{i_1}|_{U_{i_0}\cap U_{i_1}} - s_{i_0}|_{U_{i_0}\cap U_{i_1}}$, i.e., $d^0 s = \{s_{ij}\}$ con $s_{ij} \overset{\text{def}}{=} s_j|_{U_i\cap U_j} - s_i|_{U_i\cap U_j} \in \mathscr{F}(U_i \cap U_j)$.
2. Sea $s = \{s_{ij}\} \in C^1(\mathscr{U}, \mathscr{F})$ una 1-cocadena, entonces $d^1 s = \{s_{ijk}\}$ con
$$s_{ijk} \overset{\text{def}}{=} s_{jk}|_{U_i\cap U_j\cap U_j} - s_{ik}|_{U_i\cap U_j\cap U_k} + s_{ij}|_{U_i\cap U_j\cap U_k} \in \mathscr{F}(U_i \cap U_j \cap U_k).$$

En particular, $d^1(d^0 s) = 0$ para toda $s \in C^0(\mathscr{U}, \mathscr{F})$.

Ejercicio importante

Probar que para todo $p \in \mathbb{N}$ se tiene $d^{p+1} \circ d^p = 0$, i.e., $\operatorname{Im}(d^p) \subseteq \ker(d^{p+1})$.

Sea $\mathscr{F}$ un haz en X. Dado un cubrimiento abierto $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ de X, con I conjunto ordenado, el p-**ésimo grupo de cohomología de Čech** es

$$\check{\mathrm{H}}^p_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{F}) := \ker(d^p)/\operatorname{Im}(d^{p-1}),\ \text{donde } p\in\mathbb{N}.$$

Aquí $d^p := 0$ y $C^p(\mathscr{U},\mathscr{F}) := 0$ para $p<0$, y luego $\check{\mathrm{H}}^0_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{F}) \overset{\text{def}}{=} \ker(d^0)$. Si cada $\mathscr{F}(U)$ es un k-e.v. entonces $\check{\mathrm{H}}^p_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{F})$ también lo es, y escribimos

$$h^p_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{F}) := \dim_k \check{\mathrm{H}}^p_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{F}).$$

Ejemplo importante: $\check{\mathrm{H}}^0_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{F}) \overset{\text{def}}{=} \ker\{d^0 : C^0(\mathscr{U},\mathscr{F}) \longrightarrow C^1(\mathscr{U},\mathscr{F})\}$. Luego, si $s = \{s_i\}_{i\in I} \in C^0(\mathscr{U},\mathscr{F})$ con $s_i \in \mathscr{F}(U_i)$ entonces

$$d^0 s = \{s_j|_{U_i\cap U_j} - s_i|_{U_i\cap U_j}\} = 0 \Leftrightarrow s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j} \text{ para todo } i,j\in I.$$

Como $\mathscr{F}$ es un **haz**, $\exists! s\in\mathscr{F}(X) \overset{\text{def}}{=} \Gamma(X,\mathscr{F})$ con $s|_{U_i} = s_i$ $\forall i\in I$, i.e.,

$$\check{\mathrm{H}}^0_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{F}) \cong \Gamma(X,\mathscr{F})$$

para <u>todo</u> cubrimiento abierto $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$.

Dependencia del cubrimiento abierto

Si $p \geq 1$, los grupos $\check{\mathrm{H}}^p_{\mathscr{U}}(X, \mathscr{F})$ pueden **depender** de $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i \in I}$. Sin embargo, si $\mathscr{V} < \mathscr{U}$ es un **refinamiento**[1] las restricciones $C^p(\mathscr{U}, \mathscr{F}) \to C^p(\mathscr{V}, \mathscr{F})$ inducen morfismos $\check{\mathrm{H}}^p_{\mathscr{U}}(X, \mathscr{F}) \to \check{\mathrm{H}}^p_{\mathscr{V}}(X, \mathscr{F})$. Luego, definimos

$$\check{\mathrm{H}}^p(X, \mathscr{F}) := \varinjlim_{\mathscr{U} \text{ cubrimiento de } X} \check{\mathrm{H}}^p_{\mathscr{U}}(X, \mathscr{F}),$$

i.e., $s \in \check{\mathrm{H}}^p_{\mathscr{U}}(X, \mathscr{F})$ y $t \in \check{\mathrm{H}}^p_{\mathscr{V}}(X, \mathscr{F})$ son iguales en $\check{\mathrm{H}}^p(X, \mathscr{F})$ si existe un refinamiento común $\mathscr{W} < \mathscr{U}$ y $\mathscr{W} < \mathscr{V}$ tal que $s|_{\mathscr{W}} = t|_{\mathscr{W}}$.

Veremos que si X variedad algebraica, todo cubrimiento **afín** $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de X cumple que $\check{\mathrm{H}}^p(X, \mathscr{F}) \cong \check{\mathrm{H}}^p_{\mathscr{U}}(X, \mathscr{F})$ si $\mathscr{F}$ es un **haz coherente**. Mejor aún, veremos que

$$\check{\mathrm{H}}^p(X, \mathscr{F}) \cong \mathrm{H}^p(X, \mathscr{F})$$

donde $\mathrm{H}^p(X, \mathscr{F})$ es la cohomología definida mediante functores derivados.

[1] i.e., para todo $V_j \in \mathscr{V}$, existe $U_i \in \mathscr{U}$ tal que $V_j \subseteq U_i$.

$\mathrm{Div}(X)/\,\mathrm{PDiv}(X) \cong \mathrm{Pic}(X) \cong \check{\mathrm{H}}^1(X, \mathscr{O}_X^*)$

Sea X variedad algebraica y $L \in \mathrm{Pic}(X)$ determinado por el cubrimiento abierto $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ de X (trivialización) y por funciones de transición $g_{ij} \in \mathscr{O}_X^*(U_i \cap U_j)$ que verifican $g_{ij}g_{jk}g_{ki} = 1$ (condición de cociclo).

Por otro lado, $g = \{g_{ij}\} \in C^1(\mathscr{U}, \mathscr{O}_X^*)$ con[2] $g_{ij} \in \mathscr{O}_X^*(U_i \cap U_j)$ verifica

$$d^1 g = 0 \text{ si y sólo si } g_{ij}g_{jk}g_{ki} = 1 \text{ en } \mathscr{O}_X^*(U_i \cap U_j \cap U_k).$$

Más aún, $\mathrm{Im}(d^0)$ corresponde por definición a divisores de Cartier principales, de donde se deduce que $\mathrm{Pic}(X) \cong \check{\mathrm{H}}^1(X, \mathscr{O}_X^*)$.

[2] ¡grupo multiplicativo!

Functorialidad de $\check{\mathrm{H}}^\bullet$

Un morfismo $\mathscr{F} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{G}$ de haces en X son morfismos de grupos abelianos

$$\varphi_U : \mathscr{F}(U) \longrightarrow \mathscr{G}(U) \text{ para todo } U \subseteq X \text{ abierto,}$$

compatibles con las restricciones. Luego, inducen $C^p(\mathscr{U},\mathscr{F}) \longrightarrow C^p(\mathscr{U},\mathscr{G})$ que conmutan con $d^p_{\mathscr{F}}$ y $d^p_{\mathscr{G}}$, y luego definen $\check{\mathrm{H}}^p_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{F}) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^p_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{G})$. Tomando límites, obtenemos para todo $p \in \mathbb{N}$ morfismos de grupos

$$\check{\mathrm{H}}^p(\varphi) : \check{\mathrm{H}}^p(X,\mathscr{F}) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^p(X,\mathscr{G}),$$

que verifican $\check{\mathrm{H}}^0(\varphi) = \Gamma(\varphi) : \Gamma(X,\mathscr{F}) \longrightarrow \Gamma(X,\mathscr{G})$.

$\check{\mathrm{H}}^p(X,\mathscr{F})$ no es la buena cohomología

Faltaría verificar que si $0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{H} \longrightarrow 0$ exacta, existe

$$0 \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^0(X,\mathscr{F}) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^0(X,\mathscr{G}) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^0(X,\mathscr{H}) \xrightarrow{\delta^0} \check{\mathrm{H}}^1(X,\mathscr{F}) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \check{\mathrm{H}}^1(X,\mathscr{G}) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^1(X,\mathscr{H}) \xrightarrow{\delta^1} \check{\mathrm{H}}^2(X,\mathscr{F}) \longrightarrow \cdots \text{ exacta.}$$

Es posible verificar ella es exacta en $\check{\mathrm{H}}^p$ con $p \in \{0,1\}$, pero que si X **no** es Hausdorff (e.g., topología de Zariski) la exactitud falla para $\check{\mathrm{H}}^p$ con $p \geq 2$.

Usando el lenguaje de functores derivados, más adelante probaremos:

Teorema (Leray)

Sea X espacio topológico y $\mathscr{F}$ haz en X. Sea $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de X tal que

$\mathrm{H}^p(U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_k}, \mathscr{F}) = 0$ para todo $k \geq 1$, todos $i_1, \ldots, i_k \in I$, y todo $p \geq 1$.

Entonces, hay isomorfismos canónicos (functoriales)

$$\check{\mathrm{H}}^p_{\mathscr{U}}(X, \mathscr{F}) \cong \mathrm{H}^p(X, \mathscr{F}) \text{ para todo } p \geq 0.$$

En el contexto de la Geometría Algebraica:

Veremos que un Teorema de Serre implica que la condición anterior se cumple para un cubrimiento afín $\mathscr{U}$ y un **haz (quasi-)coherente** $\mathscr{F}$.

Sea X variedad algebraica. Un **haz quasi-coherente** es un $\mathscr{O}_X$-módulo $\mathscr{F}$ si $\forall x \in X$ existe $x \in U$ abierto y una sucesión exacta de $\mathscr{O}_U$-módulos

$$\mathscr{O}_U^{\oplus I} \longrightarrow \mathscr{O}_U^{\oplus J} \longrightarrow \mathscr{F}|_U \longrightarrow 0,$$

donde I y J conjuntos arbitrarios. Si I y J son **finitos** para todo U, i.e.,

$$\mathscr{O}_U^{\oplus m} \longrightarrow \mathscr{O}_U^{\oplus n} \longrightarrow \mathscr{F}|_U \longrightarrow 0 \text{ para ciertos } m, n \in \mathbb{N},$$

decimos que $\mathscr{F}$ es un **haz coherente**.

Ejemplos:

1. Sea $E \longrightarrow X$ fibrado de $\mathrm{rg}(X) = r$, y sea $\mathscr{E}$ su haz de secciones. Si $E|_U \cong U \times \mathbb{A}^r$ se tiene que $\mathscr{E}|_U \cong \mathscr{O}_U^{\oplus r}$. Así, $\mathscr{E}$ es un haz coherente.
2. (Ejercicio importante) Los kernel y cokernel de morfismos de fibrados vectoriales son haces coherentes.
3. Los haces $\mathscr{O}_X^*$ y $\underline{\mathbb{Z}}$ **no** son quasi-coherentes, pues no son $\mathscr{O}_X$-módulos.

Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad afín irreducible, donde $A = \mathscr{O}(X) \overset{\text{def}}{=} \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ es su k-álgebra de funciones regulares. Recordar que si $f \in A$ entonces

$$U_f \overset{\text{def}}{=} \{x \in X \text{ tal que } f(x) \neq 0\} \text{ abierto principal afin,}$$

con $\mathscr{O}(U_f) \cong A_f$ y son una base de la topología de Zariski.

Sea $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo y recordemos que $M := \Gamma(X, \mathscr{F})$ es un A-módulo. Además, para todo A-módulo M y todo $f \in A$ se define la **localización**

$$M_f := M \otimes_A A_f \overset{\text{def}}{=} \left\{ \frac{m}{f^p} \text{ con } m \in M \text{ y } p \in \mathbb{N} \right\} / \sim,$$

donde $\frac{m}{f^p} \sim \frac{m'}{f^q}$ si y sólo si existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $f^r(f^q m - m' f^p) = 0$ en M.

Más aún, para toda sucesión exacta de A-módulos $0 \to M \to N \to Q \to 0$, la sucesión asociada de A_f-módulos

$$0 \longrightarrow M_f \longrightarrow N_f \longrightarrow Q_f \longrightarrow 0,$$

es exacta, i.e., **localizar** envía sucesiones exactas en sucesiones exactas.

$\Gamma(X,\mathscr{F})$ DETERMINA $\mathscr{F}$ SI X ES AFÍN

Sea $\mathscr{F}$ haz coherente en X variedad **afín** irreducible. Entonces, para toda función regular $f \in \mathscr{O}(X)$ hay un isomorfismo

$$\varphi_f : \Gamma(X,\mathscr{F})_f \xrightarrow{\sim} \Gamma(U_f,\mathscr{F}),\ \frac{s}{f^p} \longmapsto \frac{1}{f^p}\cdot s|_{U_f}$$

Prueba: Al ser una afirmación local, podemos asumir que existe una sucesión exacta $\mathscr{O}_X^{\oplus m} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{O}_X^{\oplus n} \xrightarrow{\beta} \mathscr{F} \longrightarrow 0$ en X. Veamos entonces que:

φ_f **inyectiva** (para $s \in \Gamma(X,\mathscr{F})$ con $s|_{U_f} = 0\ \exists p \in \mathbb{N}$ tal que $sf^p = 0$ en X):

Sea $s \in \Gamma(X,\mathscr{F})$ con $s|_{U_f} = 0$. Como β sobreyectivo, existe un cubrimiento abierto $X = \cup_{i\in I} U_i$ y $\mathbf{g}_i \in \mathscr{O}_X(U_i)^{\oplus n}$ tal que $\beta(\mathbf{g}_i) = s|_{U_i}$.

Si $sf^p|_{U_i} = 0\ \forall i \in I$ entonces $sf^p = 0$ en X. Así, basta tratar considerar $s = \beta(g)$ con $g \in \mathscr{O}_X(X)^{\oplus n} \overset{\text{def}}{=} A^{\oplus n}$. Por otro lado, dado que

$$0 = s|_{U_f} = \beta(g)|_{U_f} \overset{\text{def}}{=} \beta(g|_{U_f})$$

tenemos $g|_{U_f} \in \ker(\beta) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Im}(\alpha)$.

$\Gamma(X,\mathscr{F})$ DETERMINA $\mathscr{F}$ SI X ES AFÍN

Luego, existe un cubrimiento abierto $U_f = \cup_{i\in I} U_{f_i}$ y $g_i \in A^{\oplus m}$ tales que

$$g|_{U_{f_i}} = \alpha\left(g_i/f_i^p\right), \text{ i.e., } f_i^p g - \alpha(g_i) = 0 \text{ en } U_f,$$

y por ende $f_i^p g = \alpha(g_i)$ en X pues U_f **abierto denso**.

Como los U_{f_i} cubren U_f, los f_i^p **no** poseen ceros comunes en U_f y luego existen $q \in \mathbb{N}$ y $h_i \in A$ tales que $\sum_i f_i^p \frac{h_i}{f^q} = 1$ en A_f (Nullstellensatz). Así,

$$f^q s = \beta(f^q g) = \beta(\sum_i f_i^p h_i g) = \beta(\sum_i \alpha(g_i) h_i) \underbrace{\overbrace{=}}_{\beta\circ\alpha=0} 0.$$

φ_f **sobreyectiva** (si $s \in \Gamma(U_f,\mathscr{F})$, $\exists p \in \mathbb{N}$ y $\exists \sigma \in \Gamma(X,\mathscr{F})$ con $sf^p = \sigma|_{U_f}$):

Veamos primero que $\Gamma(\beta) : A^{\oplus n} \to \Gamma(X,\mathscr{F})$ es sobreyectiva. Para ello, sea $s \in \Gamma(X,\mathscr{F})$ y, como β sobreyectivo, existe $X = \cup_{i\in I} U_i$ y $g_i \in A^{\oplus n}$ con $s|_{U_{f_i}} = \beta(\frac{g_i}{f_i^p})$ para cierto $p \in \mathbb{N}$.

Como las secciones $f_i^p s$ y $\beta(g_i)$ coinciden en U_{f_i}, la inyectividad de φ_f implica que $\exists q \in \mathbb{N}$ tal que $s f_i^{p+q} = \beta(g_i f_i^q)$.

Como antes, consideramos $\sum_i f_i^{p+q} h_i = 1$ partición de la unidad y concluímos

$$s = \sum_i f_i^{p+q} h_i s = \sum_i h_i \beta(g_i f_i^q) = \beta\left(\sum_i h_i g_i f_i^q\right),$$ i.e., $\Gamma(\beta)$ es sobreyectiva.

El mismo cálculo implica de hecho que

$$\Gamma(U_f, \mathscr{F}) = \beta\left(\Gamma(U_f, \mathscr{O}_X)^{\oplus n}\right) \overset{\text{def}}{=} \beta(A_f^{\oplus n}),$$

i.e., $s \in \Gamma(U_f, \mathscr{F})$ se escribe como $s = \beta(\frac{g}{f^p})$. Así, $\sigma := \beta(g) \in \Gamma(X, \mathscr{F})$ verifica que $\sigma|_{U_f} = s f^p$. □

El resultado anterior motiva la siguiente definición:

Construcción: Sea X variedad afín con $A = \mathscr{O}(X)$. Dado un A-módulo M, definimos un haz $\widetilde{M}$ de $\mathscr{O}_X$-módulos mediante:

Para todo $f \in A$, se define $\Gamma(U_f, \widetilde{M}) \overset{\text{def}}{=} \widetilde{M}(U_f) := M_f$.

En particular, $\widetilde{M}$ es **coherente** $\Leftrightarrow$ M es un A-módulo finitamente generado. Además, $\widetilde{A} \cong \mathscr{O}_X$ (Ejercicio).

Haces coherentes versus $\mathscr{O}(X)$-módulos

Lo anterior se resume en el siguiente resultado fundamental.

Sea X variedad **afín**. Las construcciones $\mathscr{F} \mapsto \Gamma(X, \mathscr{F})$ y $M \mapsto \widetilde{M}$ son inversas una de la otra. En particular,

$$\mathscr{F} \cong \Gamma\widetilde{(X, \mathscr{F})} \quad \text{y} \quad \Gamma(X, \widetilde{M}) \cong M$$

para $\mathscr{F}$ haz coherente en X y M un A-módulo finitamente generado.

Más aún, la correspondencia anterior sigue siendo válida para A-módulos arbitrarios si reemplazamos la palabra coherente por **quasi-coherente**.

Ejemplo: Sea X variedad algebraica y $\iota : Y \hookrightarrow X$ sub-variedad. Entonces $\mathcal{I}_Y$ y $\iota_*\mathscr{O}_Y$ son haces coherentes en X:

En un abierto afín $U \subseteq X$ tal que $\mathscr{O}_X(U) = A$ y tal que $\mathcal{I}(Y \cap U) = I$, $\mathscr{O}(Y \cap U) \cong A/I =: B$ e I son A-módulos finitamente generados. Así,

$$\mathcal{I}_Y|_U \cong \widetilde{I} \text{ y } (\iota_*\mathscr{O}_Y)|_U \cong \widetilde{B}$$

son haces coherentes para todo abierto afín $U \subseteq X$.

Análogamente al ejemplo anterior, tenemos el siguiente resultado.

Sea $f : X \longrightarrow Y$ morfismo regular entre variedades algebraicas. Entonces:

1. Si $\mathscr{G}$ haz coherente (resp. quasi-coherente) en Y, entonces $f^*\mathscr{G}$ haz coherente (resp. quasi-coherente) en X.
2. Si $\mathscr{F}$ haz quasi-coherente en X, entonces $f_*\mathscr{F}$ quasi-coherente en X. Si f es **finito** y $\mathscr{F}$ es coherente en X, $f_*\mathscr{F}$ es coherente en Y.

Si $\mathbf{Coh}(X)$ es la categoría de haces coherentes en X, entonces:

3. Si $\mathscr{F}, \mathscr{G} \in \mathbf{Coh}(X)$, $\mathscr{F} \oplus \mathscr{G}$ y $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{G}$ son coherentes.
4. Si $\mathscr{F}, \mathscr{G} \in \mathbf{Coh}(X)$ y $\varphi : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ es un morfismo de $\mathscr{O}_X$-módulos, entonces $\ker(\varphi)$, $\mathrm{Im}(\varphi)$ y $\mathrm{coker}(\varphi) \overset{\text{def}}{=} \mathscr{G}/\mathrm{Im}(\varphi)$ son coherentes[a].

[a] Esto se traducirá en que $\mathbf{Coh}(X)$ es una **categoría abeliana** (cf. $\mathbf{Vect}(X)$).

Exactitud de Γ en el caso afín

Sea X variedad **afín** con $A = \mathscr{O}(X)$. Entonces,

$$\Gamma : \mathbf{Coh}(X) \longrightarrow A\text{-}\mathbf{Mod},\ \mathscr{F} \longmapsto \Gamma(X,\mathscr{F}) \text{ es un } \textbf{functor exacto},$$

i.e., para toda sucesión exacta $0 \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{G} \xrightarrow{\beta} \mathscr{H} \longrightarrow 0$ en $\mathbf{Coh}(X)$ la sucesión de A-módulos

$$0 \longrightarrow \Gamma(X,\mathscr{F}) \xrightarrow{\Gamma(\alpha)} \Gamma(X,\mathscr{G}) \xrightarrow{\Gamma(\beta)} \Gamma(X,\mathscr{H}) \longrightarrow 0 \text{ es exacta.}$$

Prueba: Sea $N := \mathrm{Im}(\Gamma(\beta)) \subseteq \Gamma(X,\mathscr{H})$. Entonces, la sucesión

$$0 \longrightarrow \Gamma(X,\mathscr{F}) \xrightarrow{\Gamma(\alpha)} \Gamma(X,\mathscr{G}) \xrightarrow{\Gamma(\beta)} N \longrightarrow 0$$

es exacta, y luego (¡la localización es exacta!) la sucesión en $\mathbf{Coh}(X)$

$$0 \longrightarrow \Gamma\widetilde{(X,\mathscr{F})} \cong \mathscr{F} \xrightarrow{\alpha} \Gamma\widetilde{(X,\mathscr{G})} \cong \mathscr{G} \xrightarrow{\beta} \widetilde{N} \longrightarrow 0$$

es exacta. En particular, $\widetilde{N} \cong \mathscr{H}$ y por ende $N \cong \Gamma(X,\widetilde{N}) \cong \Gamma(X,\mathscr{H})$. $\square$

Intuitivamente, los haces coherentes en variedades afines no tienen H^1.

Teorema de Serre y H^p versus $\check{\mathrm{H}}^p$

Más adelante demostraremos el siguiente resultado de Jean-Pierre Serre.

Teorema (Serre, 1955)

Sea X variedad algebraica **afín** y $\mathscr{F}$ haz **coherente** en X. Entonces,

$$\mathrm{H}^p(X, \mathscr{F}) = 0 \text{ para todo } p \geq 1.$$

Consecuencia importante (Teorema de Serre y Teorema de Leray)

Sea X variedad algebraica y $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}(X)$. Para todo cubrimiento finito $\mathscr{U}$ de **abiertos afines** de X hay isomorfismos canónicos (functoriales)

$$\check{\mathrm{H}}^p_{\mathscr{U}}(X, \mathscr{F}) \cong \mathrm{H}^p(X, \mathscr{F}) \text{ para todo } p \geq 0.$$

Prueba: Sea $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ con $U_i \subseteq X$ afín. Como X es una variedad **separada**, $U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_k}$ es también afín. Luego, el Teorema de Serre implica

$$\mathrm{H}^p(U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_k}, \mathscr{F}) = 0 \text{ para todo } p \geq 1,$$

y por ende el Teorema de Leray nos da el isomorfismo deseado. □

La cohomología de $Y \subseteq X$ se calcula en X

Sea X variedad algebraica y $\iota : Y \hookrightarrow X$ sub-variedad cerrada. Para todo haz coherente $\mathscr{F}$ en Y se tiene que $\iota_* \mathscr{F}$ es coherente en X y además

$$\mathrm{H}^p(X, \iota_* \mathscr{F}) \cong \mathrm{H}^p(Y, \mathscr{F}) \text{ para todo } p \geq 0.$$

Prueba: La inclusión $\iota : Y \hookrightarrow X$ es un morfismo **finito** y así $\iota_* \mathscr{F} \in \mathbf{Coh}(X)$.

Explícitamente: si $U \subseteq X$ abierto afín con $A = \mathscr{O}(U)$ y $\mathcal{I}(Y \cap U) = I \subseteq A$ ideal, entonces $M := \Gamma(Y \cap U, \mathscr{F})$ es un A/I-módulo fin. gen. y para $f \in A$

$$\Gamma(U_f, \iota_* \mathscr{F}) \overset{\text{def}}{=} \Gamma(Y \cap U_f, \mathscr{F}) = M_f, \qquad (\star)$$

i.e., $(\iota_* \mathscr{F})|_U \cong \widetilde{M}$, donde M es un A-módulo fin. gen., i.e., $\iota_* \mathscr{F}$ coherente.

Si $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ cubrimiento afín de X, $\mathscr{V} = \{V_i\}_{i \in I}$, con $V_i := Y \cap U_i$, es cubimiento afín de Y. Luego, basta verificar que $\check{\mathrm{H}}^p_{\mathscr{U}}(X, \iota_* \mathscr{F}) \cong \check{\mathrm{H}}^p_{\mathscr{V}}(Y, \mathscr{F})$. Esto último se obtiene del hecho que las restricciones de p-cocadenas

$$C^p(\mathscr{U}, \iota_* \mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} C^p(\mathscr{V}, \mathscr{F}) \text{ son isomorfismos (por } (\star)). \quad \square$$