Geometría Algebraica

Clase 20

Pedro Montero

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

16 de Octubre de 2023

§3.7 Divisor canónico y dimensión de Kodaira

El **fibrado en rectas canónico** de X variedad suave irreducible es

$$\omega_X \cong \mathscr{O}_X(K_X) \cong \det(\Omega^1_X).$$

Sea $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Si X proyectiva, definimos el m-ésimo **plurigénero** como

$$P_m(X) := \dim_k \mathrm{H}^0(X, \omega_X^{\otimes m}) \overset{\text{def}}{=} \dim_k \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(mK_X)).$$

Aquí, $p_g(X) := P_1(X) \overset{\text{def}}{=} \dim_k \mathrm{H}^0(X, \omega_X)$ es el **género geométrico** de X.

Para una **curva algebraica** C escribimos $g(C) := p_g(C)$, y decimos que

$$g(C) := \dim_k \mathrm{H}^0(C, \omega_C) \overset{\text{def}}{=} \dim_k \mathrm{H}^0(C, \Omega^1_C) \text{ es el **género** de } C.$$

Sean $X \sim_{\text{bir}} Y$ variedades proyectivas suaves irreducibles, y **birracionales**. Entonces, $\mathrm{H}^0(X, \omega_X^{\otimes m}) \cong \mathrm{H}^0(Y, \omega_Y^{\otimes m})$ para todo $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

Prueba: Separamos la demostración en 3 pasos independientes.

Paso 1: Sea $L \in \mathrm{Pic}(X)$ y $Z \subseteq X$ cerrado de $\mathrm{codim}_X(Z) \geq 2$, entonces $\mathrm{H}^0(X, L) \xrightarrow[\sim]{\text{res}} \mathrm{H}^0(X \smallsetminus Z, L|_{X \smallsetminus Z})$ es un isomorfismo (cf. Hartogs):

La inyectividad es consecuencia de pensar secciones como divisores de Weil efectivos. Para la sobreyectividad, sea $s \in \mathrm{H}^0(X \smallsetminus Z, L|_{X \smallsetminus Z})$ y sea $z \in Z$.

Trivializando $L|_U \cong U \times \mathbb{A}^1$ en una vecindad de $z \in U \subseteq X$, $s(x) \underset{\text{loc}}{=} (x, f(x))$ con $f : U \smallsetminus Z \to k$ regular que induce $f : U \dashrightarrow k$ racional. Notar que $\mathrm{div}(f) \geq 0$ es *efectivo* en $\mathrm{Div}(U)$ (pues los polos están en codimensión 1).

Así, el hecho que U es suave implica que $f : U \to k$ es regular. En otras palabras, existe $\sigma \in \mathrm{H}^0(X, L)$ tal que $\sigma|_{X \smallsetminus Z} = s$.

Invarianza birracional de P_m

Paso 2: Todo $f : U \xrightarrow{\sim} V$ morfismo birregular entre variedades suaves irreducibles induce un isomorfismo k-lineal $F : \mathrm{H}^0(V, \omega_V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(U, \omega_U)$:

Por functorialidad, f induce un isomorfismo $df : T_U \xrightarrow{\sim} f^*T_V$, y por ende ${}^{\mathrm{t}}df : f^*\Omega^1_V \xrightarrow{\sim} \Omega^1_U$ al dualizar. La functorialidad del producto exterior induce

$$\Lambda^d({}^{\mathrm{t}}df) : f^*\Omega^p_V \xrightarrow{\sim} \Omega^p_U \text{ isomorfismo para todo } p \geq 1.$$

Por último, f induce $\Gamma(f) : \mathrm{H}^0(V, \Omega^p_V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(U, f^*\Omega^p_V)$ para todo $p \geq 1$.

Así, componiendo $\Gamma(f)$ con $\Lambda^d({}^{\mathrm{t}}df)$, obtenemos isomorfismos

$$F : \mathrm{H}^0(V, \Omega^p_V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(U, \Omega^p_U) \text{ para todo } p \geq 1.$$

Luego, para $p = \dim(U) = \dim(V)$, obtenemos $F : \mathrm{H}^0(V, \omega_V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(U, \omega_U)$. Mejor aún, la functorialidad del producto tensorial implica que

$$(F)^{\otimes m} : \mathrm{H}^0(V, \omega_V^{\otimes m}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(U, \omega_U^{\otimes m})$$

es un isomorfismo para todo $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

Paso 3: La aplicación birracional $f : X \dashrightarrow Y$ induce un isomorfismo

$$\mathrm{H}^0(Y, \omega_Y^{\otimes m}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(X, \omega_X^{\otimes m}) \text{ para todo } m \geq 1 :$$

Con las hipótesis de suavidad y proyectividad, existe $Z \subseteq X$ cerrado de $\mathrm{codim}_X(Z) \geq 2$ tal que si $U := X \setminus Z$, entonces $f|_U : U \to Y$ es regular. Así, $f|_U$ induce un morfismo

$$\mathrm{H}^0(Y, \omega_Y^{\otimes m}) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{H}^0(U, \omega_U^{\otimes m}) \cong \mathrm{H}^0(X, \omega_X^{\otimes m}).$$

Lo anterior aplicado a $g = f^{-1} : Y \dashrightarrow X$ nos da $\mathrm{H}^0(X, \omega_X^{\otimes m}) \xrightarrow{\psi} \mathrm{H}^0(Y, \omega_Y^{\otimes m})$, y la functorialidad de la construcción implica que $\psi = \varphi^{-1}$. $\square$

La demostración implica que $\mathrm{H}^0(X, \Omega_X^p)$ son invariantes birracionales.

Ejemplo: Como $\omega_{\mathbb{P}^n}^\vee \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(n+1)$ amplio (i.e., $\mathbb{P}^n$ variedad de Fano), $P_m(\mathbb{P}^n) = 0$ para todo $m \geq 1$. Por otro lado, si $X_d \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$ hipersuperficie suave de grado $d \geq n+2$ entonces $P_m(X_d) \neq 0$ para todo $m \geq 1$ (adjunción).

Así, $X_d \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$ de grado $d \geq n+2$ **no es racional** (i.e., $X_d \not\sim_{\text{bir}} \mathbb{P}^n$).

Dimensión de Kodaira

Recuerdo: Sea X variedad y $L \in \mathrm{Pic}(X)$ tal que[a] $\dim_k \mathrm{H}^0(X, L^{\otimes m}) < +\infty$ para todo $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. La **dimensión de Iitaka** de L es

$$\kappa(L) = \begin{cases} \max\limits_{m \in \mathbb{N}^{\geq 1}} \dim\left(\overline{\varphi_{L^{\otimes m}}(X)}\right) & \text{si } \exists m_0 \in \mathbb{N}^{\geq 1} \text{ con } \mathrm{H}^0(X, L^{\otimes m_0}) \neq \{0\} \\ -\infty & \text{si } \mathrm{H}^0(X, L^{\otimes m}) = \{0\} \text{ para todo } m \in \mathbb{N}^{\geq 1} \end{cases}$$

Luego, $\kappa(L) \in \{-\infty, 0, 1, \ldots, \dim(X)\}$.

[a] Más adelante veremos que esto es automático si X es proyectiva.

El caso particular siguiente es fundamental en Geometría Birracional.

La **dimensión de Kodaira** de X variedad proyectiva suave irreducible es

$$\kappa(X) := \kappa(\omega_X) \in \{-\infty, 0, 1, \ldots, \dim(X)\} \text{ dimensión de Iitaka de } \omega_X.$$

Más aún, decimos que X es **de tipo general** si tiene dimensión de Kodaira maximal $\kappa(X) = \dim(X)$, i.e., si ω_X es un fibrado en rectas big.

Sean X e Y variedades proyectivas suaves irreducibles:

1. Si $X \sim_{\text{bir}} Y$, $\kappa(X) = \kappa(Y)$. En particular, $\kappa(\mathrm{Bl}_Z(X)) = \kappa(X)$.
2. Si $X \sim_{\text{bir}} \mathbb{P}^n$ es una variedad racional, entonces $\kappa(X) = -\infty$.
3. Se tiene que (Ejercicio) $\omega_{X\times Y} \cong \omega_X \boxtimes \omega_Y$ en $\mathrm{Pic}(X \times Y)$, y así $\kappa(X \times Y) = \kappa(X) + \kappa(Y)$, donde $-\infty + d := -\infty$ para $d \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$.
4. $\kappa(X \times \mathbb{P}^n) = -\infty$.
5. Sea $C \subseteq \mathbb{P}^2$ curva proyectiva suave de grado $d \geq 1$. Entonces,

$$\kappa(C) = \begin{cases} -\infty & \text{si } d \leq 2 \\ 0 & \text{si } d = 3 \\ 1 & \text{si } d \geq 4 \end{cases}$$

pues $\omega_C \cong \mathscr{O}_C(d-3) \overset{\text{def}}{=} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}(d-3)|_C$.

Sea $X = V(f) \subseteq \mathbb{P}^n$ hipersuperficie suave de grado d. Entonces,

$$p_g(X) \overset{\text{def}}{=} \dim_k \mathrm{H}^0(X, \omega_X) = \begin{cases} 0 & \text{si } d \leq n \\ \binom{d-1}{n} & \text{si } d \geq n+1 \end{cases}$$

En particular, si $C \subseteq \mathbb{P}^2$ curva plana suave entonces

$$g(C) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} \quad \textbf{(Fórmula de Plücker)}$$

Prueba $(n = 2)$: Sea $C = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2,\ f(x, y, z) = 0\} \subseteq \mathbb{P}^2$. En el abierto $U := U_x \overset{\text{def}}{=} \{x \neq 0\} \cong \mathbb{A}^2_{y,z}$, $C \cap U = V(g)$ con $g(y, z) \overset{\text{def}}{=} f(1, y, z)$. Sean

$$V_y := \left\{p \in U,\ \frac{\partial g}{\partial y}(p) \neq 0\right\} \text{ y } V_z := \left\{p \in U,\ \frac{\partial g}{\partial z}(p) \neq 0\right\},$$

con $U = V_y \cup V_z$ pues C suave. La identidad de Euler (E) $\frac{\partial g}{\partial y}\, dy + \frac{\partial g}{\partial z}\, dz = 0$ expresa dy (resp. dz) en términos de dz (resp. dy) en V_y (resp. V_z).

Así, dz genera el $\mathscr{O}_C(C\cap V_y)$-módulo $\mathrm{H}^0(C\cap V_y,\omega_{C\cap V_y})$ y dy el $\mathscr{O}_C(C\cap V_z)$-módulo $\mathrm{H}^0(C\cap V_z,\omega_{C\cap V_z})$. Reescalemos convenientemente

$$\omega_y := \omega_{U,y} := \frac{1}{\partial g/\partial y}dz \quad \text{y} \quad \omega_z := \omega_{U,z} := -\frac{1}{\partial g/\partial z}dy.$$

Así $(E) \Leftrightarrow \omega_{U,y} = \omega_{U,z}$ y luego se pegan en $\omega_U \in \mathrm{H}^0(C\cap U,\omega_{C\cap U})$.

Sea $W := U_y \overset{\text{def}}{=} \{y \neq 0\} \cong \mathbb{A}^2_{s,t}$ donde $s = \frac{1}{y}$ y $t = \frac{z}{y}$ en $U \cap W$. Luego,

$$ds = -\frac{1}{y^2}dy \quad \text{y} \quad dt = \frac{1}{y}dz - \frac{z}{y^2}dy$$

Sea $C\cap W = V(h)$ con $h(s,t) \overset{\text{def}}{=} f(s,1,t)$. Como antes, podemos definir $\omega_W \in \mathrm{H}^0(C\cap W,\omega_{C\cap W})$ y en el abierto $\{y\in W,\ \frac{\partial h}{\partial t}(y)\neq 0\}$ está dada por

$$\omega_{W,t} := -\frac{1}{\partial h/\partial t}ds \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\partial h/\partial t}\cdot\frac{1}{y^2}dy = \frac{y^{d-1}}{\partial g/\partial z}\cdot\frac{1}{y^2}dy = -y^{d-3}\frac{1}{\partial g/\partial z}dy$$

pues $h(s,t) \overset{\text{def}}{=} f(s,1,t) = s^d f(1,\frac{1}{s},\frac{t}{s}) \overset{\text{def}}{=} s^d f(1,y,z) = s^d g(y,z)$.

Así, $\omega_W = -y^{d-3}\omega_U$ en $U \cap W$. Finalmente, basta notar que si $s \in \mathrm{H}^0(C, \omega_C)$ entonces $s|_{X\cap U} = P_U \omega_U$ y $s|_{X\cap W} = P_W \omega_W$, donde $P_U(x_1, x_2)$ y $P_W(x_1, x_2)$ son polinomios en dos variables que cumplen

$$P_U(x_1, x_2) = -x_1^{d-3} P_W\left(\frac{1}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}\right) =: -x_1^{d-3} \frac{Q(x_2)}{x_1^{\deg(P_W)}}$$

donde Q es un polinomio en la variables x_2. Así, P_U regular si y sólo si $\deg(P_W) \leq d-3$ y luego

$$\mathrm{H}^0(C, \omega_C) \cong \left\{ \begin{array}{c} \text{polinomios homogéneos en } 2 \\ \text{variables de grado } \leq d-3 \end{array} \right\}$$

de donde se calcula $g(C) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$. $\square$

El siguiente resultado señala que la Geometría Birracional en característica cero puede reducirse al estudio de **blow-ups**.

Teorema (Włodarczyk, 1999)

$(\mathrm{car}(k) = 0)$ **Toda** aplicación birracional $f : X \dashrightarrow Y$ entre variedades proyectivas suaves irreducibles posee una **factorización débil**, i.e.,

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & W_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & W_2 \arrow[dl] \arrow[dr] & & \cdots \arrow[dl] \arrow[dr] & & W_r \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X =: X_0 & & X_1 & & X_2 \quad \cdots & & X_{r-1} & & X_r := Y \end{tikzcd}$$

donde cada $W_i \to X_i$ y $W_i \to X_{i-1}$ es el blow-up de una subvariedad **suave** disjunta de la transformada estricta de $U := \mathrm{Dom}(f) \subseteq X$, y donde cada X_i y W_i es proyectiva suave e irreducible.

Divisor canónico de $\mathrm{Bl}_Z(X)$

Sea X variedad suave irreducible y $Z \subseteq X$ sub-variedad suave irreducible de $\mathrm{codim}_X(Z) = r \geq 2$. Sea $\varepsilon : \widetilde{X} := \mathrm{Bl}_Z(X) \longrightarrow X$ el blow-up de $Z \subseteq X$, con $E \overset{\text{def}}{=} \varepsilon^{-}(Z) \subseteq \widetilde{X}$ divisor excepcional. Entonces,

$$\omega_{\widetilde{X}} \cong \varepsilon^* \omega_X \otimes \mathscr{O}_{\widetilde{X}}((r-1)E), \text{ i.e., } K_{\widetilde{X}} = \varepsilon^* K_X + (r-1)E.$$

Prueba: Como $\mathrm{Pic}(\widetilde{X}) = \varepsilon^* \mathrm{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z}\mathscr{O}_X(E)$, tenemos $\omega_{\widetilde{X}} \cong \varepsilon^* L \otimes \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(mE)$ para cierto $L \in \mathrm{Pic}(X)$ y cierto $m \in \mathbb{Z}$. Como $\mathrm{codim}_X(Z) \geq 2$ y $\omega_X|_{X \smallsetminus Z} \cong \omega_{\widetilde{X}}|_{\widetilde{X} \smallsetminus E} \cong \varepsilon^* L|_{\widetilde{X} \smallsetminus E} \cong L|_{X \smallsetminus Z}$, tenemos $L \cong \omega_X$.

Sean $u_1, \ldots, u_n$ coord. locales en X con $Z \underset{\text{loc}}{=} V(u_1, \ldots, u_r)$. Entonces, $\widetilde{X} \underset{\text{loc}}{=} \{u_i y_j = u_j y_i\}$ con $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ y donde $y = [y_1, \ldots, y_r] \in \mathbb{P}^{r-1}$. Así, para $y_1 \neq 0$ tenemos $u_j = y_j u_1 \ \forall j \geq 2$ y $E \underset{\text{loc}}{=} V(u_1)$, de donde calculamos:

$$\begin{aligned} \varepsilon^*(du_1 \wedge \cdots \wedge du_n) &\overset{\text{def}}{=} du_1 \wedge d(y_2 u_1) \wedge \cdots \wedge d(y_r u_1) \wedge du_{r+1} \wedge \cdots \wedge du_n \\ &= u_1^{r-1} du_1 \wedge dy_2 \wedge \cdots \wedge dy_r \wedge \cdots du_n, \end{aligned}$$

i.e., $m = r - 1$. $\square$

1. Sea S superficie suave irreducible y $\varepsilon : \widetilde{S} := \mathrm{Bl}_{p_1,\dots,p_r}(S) \longrightarrow S$ el blow-up de S en r puntos, entonces
$$K_{\widetilde{S}} = \varepsilon^* K_S + E_1 + \cdots + E_r,$$
donde $E_i \cong \mathbb{P}^1$ es una **curva excepcional**.

2. Si $\dim(X) = n \geq 2$ y $Z = \{p\}$ es un punto, $E \overset{\text{def}}{=} \varepsilon^{-1}(p) \cong \mathbb{P}^{n-1}$ y luego
$$\omega_E \cong \omega_{\mathbb{P}^{n-1}} \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-n).$$
Por otro lado, la fórmula de adjunción nos dice que
$$\omega_E \cong (\omega_{\widetilde{X}} \otimes \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(E))|_E \overset{\text{def}}{=} \omega_{\widetilde{X}}|_E \otimes \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(E)|_E.$$
Finalmente, el resultado anterior implica que
$$\omega_{\widetilde{X}}|_E \cong (\varepsilon^* \omega_X \otimes \mathscr{O}_{\widetilde{X}}((n-1)E))|_E \cong \mathscr{O}_{\widetilde{X}}((n-1)E)|_E.$$
Así, $\omega_E \cong \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(nE)|_E \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-n)$ y por ende tenemos que
$$\mathscr{O}_E(E) := \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(E)|_E \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1) \cong \mathscr{N}_{E/\widetilde{X}}.$$

Caso particular importante: Sea S superficie proyectiva suave irreducible y $\varepsilon : \widetilde{S} := \mathrm{Bl}_p(S) \to S$ blow-up de un punto $p \in S$, donde $E = \varepsilon^{-1}(p) \cong \mathbb{P}^1$. En tal caso, tenemos que

$$\mathscr{O}_{\widetilde{S}}(E)|_E \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$$

y luego podemos calcular la **auto-intersección**

$$E^2 := E \cdot E \overset{\text{def}}{=} \deg(\mathscr{O}_{\widetilde{S}}(E)|_E) = \deg(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) = -1.$$

Teorema (Castelnuovo, 1901)

Sea S una superficie proyectiva suave irreducible, y sea $C \subseteq S$ una curva tal que $C \cong \mathbb{P}^1$ y $C^2 = -1$. Entonces, existe una superficie proyectiva **suave** irreducible S' y $p \in S'$ tal que $S \cong \mathrm{Bl}_p(S')$ y $C = E \overset{\text{def}}{=} \varepsilon^{-1}(p)$ excepcional.

§3.8 Fibrados proyectivos

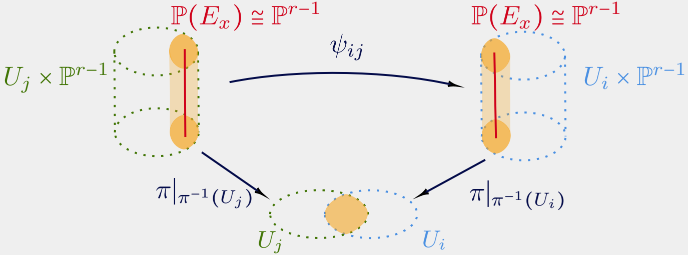
Fibrados proyectivos

Sea X variedad suave irreducible y $E \to X$ fibrado vectorial de $\mathrm{rg}(E) = r$.

Construcción: Sea $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ cubrimiento abierto tal que $E|_{U_i} \cong U_i \times k^r$.

El **fibrado proyectivo** $\mathbb{P}(E)$ (o $\mathbb{P}_X(E)$) es la variedad obtenida mediante el atlas dado por las cartas $U_i \times \mathbb{P}(k^r) \cong U_i \times \mathbb{P}^{r-1}$ pegadas usando

$$(U_i \cap U_j) \times \mathbb{P}^{r-1} \xrightarrow[\sim]{\psi_{ij}} (U_i \cap U_j) \times \mathbb{P}^{r-1},\ (x, [v]) \longmapsto (x, [g_{ij}(x)v]).$$



la cual sólo depende de las clases $[g_{ij}(x)] \in \mathrm{PGL}_r(k)$, y admite una proyección

$$\pi : \mathbb{P}(E) \longrightarrow X \text{ donde } \pi^{-1}(x) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}(E_x) \cong \mathbb{P}^{r-1}.$$

PROPIEDADES DE $\mathbb{P}(E)$

1. Para todo $L \in \mathrm{Pic}(X)$ se tiene que $\mathbb{P}(L) \cong X$ y que $\mathbb{P}(E \otimes L) \cong \mathbb{P}(E)$.
2. $\mathbb{P}(E) \sim_{\text{bir}} X \times \mathbb{P}^{r-1}$ y por ende $\kappa(\mathbb{P}(E)) = -\infty$ si $r \geq 2$.
3. Si $E \cong \mathscr{O}_X^{\oplus r}$ fibrado trivial de rango r, entonces $\mathbb{P}(E) \cong X \times \mathbb{P}^{r-1}$.
4. (Ejercicio) $\mathbb{P}(E)$ es una variedad algebraica suave e irreducible de

$$\dim(\mathbb{P}(E)) = \dim(X) + r - 1.$$

Si $\pi : \mathbb{P}(E) \to X$ con $\pi^{-1}(x) \cong \mathbb{P}^{r-1}$, decimos que $\mathrm{rg}(\mathbb{P}(E)) := r - 1$.

Sea $X = \mathbb{P}^1$ y $E = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$, con matrices de transición

$$g_{ij}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{x_i}{x_j} \end{pmatrix}.$$

La superficie algebraica $S := \mathbb{P}(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-1))$ se obtiene pegando los $V_i := U_i \times \mathbb{P}^1 \cong \mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1$, con $i \in \{0,1\}$, usando el cambio de cartas

$$\psi : (\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}) \times \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\sim} (\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}) \times \mathbb{P}^1,\ (s,[u,v]) \longmapsto \left(\frac{1}{s},[u,sv]\right)$$

Veamos que $S \cong \mathrm{Bl}_p(\mathbb{P}^2)$. En efecto, si $p = [1,0,0]$ entonces

$$\mathrm{Bl}_p(\mathbb{P}^2) \overset{\text{def}}{=} \{([x,y,z],[t_1,t_2]) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \text{ tal que } yt_2 = zt_1\} \subseteq \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1.$$

Por otra parte, hay isomorfismos

$$V_0 \cong \mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\sim} \{t_2 \neq 0\} \cap \mathrm{Bl}_p(\mathbb{P}^2),\ (s,[u,v]) \mapsto ([u,sv,v],[s,1])\ (y = zt_1)$$
$$V_1 \cong \mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\sim} \{t_1 \neq 0\} \cap \mathrm{Bl}_p(\mathbb{P}^2),\ (s,[u,v]) \mapsto ([u,v,sv],[1,s])\ (z = yt_2)$$

que son compatibles con ψ, i.e., $\mathbb{P}(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) \cong \mathrm{Bl}_p(\mathbb{P}^2)$.

$\mathscr{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ y Sucesión de Euler relativa

Construcción: Sea $\pi : \mathbb{P}(E) \longrightarrow X$ fibrado proyectivo con $\mathrm{rg}(E) = r \geq 2$, y sea $\pi^* E$ fibrado vectorial de rango r en $\mathbb{P}(E)$ obtenido por pullback. Así,

$$(\pi^* E)_y \overset{\text{def}}{=} E_x, \text{ donde } y = (x, [\ell]) \in \pi^{-1}(x) \cong \mathbb{P}(E_x).$$

El **fibrado en rectas tautológico** $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1)$ de $\mathbb{P}(E)$ es el sub-fibrado en rectas de $\pi^* E$ definido por $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1)_{(x,[\ell])} := \ell \cong k$.

Si $E|_U \cong U \times k^r$, $\pi^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{P}^{r-1}$ y $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1)|_{\pi^{-1}(U)} \cong \mathrm{pr}_2^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{r-1}}(-1)$.

Sea $\pi : \mathbb{P}(E) \to X$ fibrado proyectivo con $\mathrm{rg}(E) = r \geq 2$. Entonces,

$$\omega_{\mathbb{P}(E)} \cong \pi^*(\omega_X \otimes \det(E^\vee)) \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(E)}(-r) \text{ en } \mathrm{Pic}(\mathbb{P}(E)).$$

Prueba: Como $\pi : \mathbb{P}(E) \to X$ morfismo suave, hay una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow T_{\mathbb{P}(E)/X} \longrightarrow T_{\mathbb{P}(E)} \xrightarrow{d\pi} \pi^* T_X \longrightarrow 0, \qquad (\star)$$

donde $(T_{\mathbb{P}(E)/X})|_{\mathbb{P}(E_x)} \cong T_{\mathbb{P}(E_x)} \cong T_{\mathbb{P}^{r-1}}$.

$\mathscr{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ y Sucesión de Euler relativa

La sucesión exacta de Euler en cada $\mathbb{P}(E_x) \cong \mathbb{P}^{r-1}$ está dada por

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}(E_x)} \longrightarrow E_x \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(E_x)}(1) \twoheadrightarrow T_{\mathbb{P}(E_x)} \longrightarrow 0,$$

y se reescribe (¡por definición!) como

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}(E)}|_{\mathbb{P}(E_x)} \longrightarrow (\pi^* E \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(E)}(1))|_{\mathbb{P}(E_x)} \twoheadrightarrow (T_{\mathbb{P}(E)/X})|_{\mathbb{P}(E_x)} \longrightarrow 0,$$

de donde obtenemos la **sucesión de Euler relativa**

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}(E)} \longrightarrow \pi^* E \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(E)}(1) \twoheadrightarrow T_{\mathbb{P}(E)/X} \longrightarrow 0, \qquad (\star\star)$$

de donde $\det(T_{\mathbb{P}(E)/X}) \cong \det(\pi^* E \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)) \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}(E)}(r) \otimes \det(\pi^* E) \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}(E)}(r) \otimes \pi^*(\det E)$. Al tomar determinante en $(\star)$ obtenemos

$$\omega^\vee_{\mathbb{P}(E)} \overset{\text{def}}{=} \det(T_{\mathbb{P}(E)}) \cong \det(T_{\mathbb{P}(E)/X}) \otimes \det(\pi^* T_X).$$

Juntando ambas fórmulas tenemos $\omega^\vee_{\mathbb{P}(E)} \cong (\mathscr{O}_{\mathbb{P}(E)}(r) \otimes \pi^*(\det E)) \otimes \pi^* \omega^\vee_X$ y así $\omega_{\mathbb{P}(E)} \cong \pi^*(\omega_X \otimes \det(E^\vee)) \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(E)}(-r)$. □

Conjectura de Hartshorne

En **muchos** textos se utiliza la convención de Grothendieck

$$\mathbb{P}(E_x) := \{\text{hiperplanos en } E_x\},$$

que corresponde a nuestro $\mathbb{P}(E_x^\vee)$. La fórmula anterior se reescribe como

$$\omega_{\mathbb{P}(E)} \cong \pi^*(\omega_X \otimes \det(E)) \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(E)}(-r).$$

Usando la convención de Grothendieck, decimos que $E \to X$ es un **fibrado vectorial amplio** si el fibrado en rectas $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(E)}(1) \in \mathrm{Pic}(\mathbb{P}(E))$ lo es.

Teorema (Mori, 1979): Solución de la Conjectura de Hartshorne

Sea X una variedad proyectiva suave irreducible de $\dim(X) = n$. Entonces,

$$T_X \text{ es amplio si y sólo si } X \cong \mathbb{P}^n.$$