Geometría Algebraica

Clase 19

Pedro Montero

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

11 de Octubre de 2023

§3.6 Fibrado tangente, cotangente y normal

Construcción: Sea X variedad **suave** irreducible de $\dim(X) = n$, i.e., $\dim_k(T_x X) = \dim(X) = n$ para todo $x \in X$. Construyamos T_X fibrado vectorial tal que $(T_X)_x := T_{X,x} \cong T_x X \cong (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^\vee$:

Para todo $x \in X$ se define $\Omega^1_{X,x} := T^\vee_{X,x} \cong \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$.

Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ cubrimiento abierto de X y para $i \in I$ sean $u_1^i, \dots, u_n^i \in \mathscr{O}_X(U_i)$ **coordenadas locales**, i.e., funciones regulares tales que sus diferenciales $d_x u_1^i, \dots, d_x u_n^i$ forman una base de $\Omega^1_{X,x}$ para todo $x \in U_i$.

En $\varnothing \neq U_i \cap U_j$ consideramos $J_{ij}(x) \in \mathrm{GL}_n(k)$ que permite pasar de la base $\{d_x u_1^j, \dots, d_x u_n^j\}$ a $\{d_x u_1^i, \dots, d_x u_n^i\}$ para todo punto $x \in U_i \cap U_j$. En particular, dichas matrices (jacobianas) verifican la condición de cociclo

$$J_{ij} J_{jk} = J_{ik} \text{ en } U_i \cap U_j \cap U_k \quad \text{(regla de la cadena)}$$

y definen Ω^1_X fibrado vectorial, con $\Omega^1_{X,x} \cong$ espacio cotangente en $x \in X$. Así, $T_X := (\Omega^1_X)^\vee$ cumple $T_{X,x} \cong T_x X$ para todo $x \in X$.

Sea X variedad **suave** irreducible, el fibrado de rango $\dim(X)$ dado por:

1. T_X es llamado el **fibrado tangente** de X.
2. Ω_X^1 es llamado el **fibrado cotagente** de X.

Para $\varnothing \neq U \subseteq X$ abierto las secciones de $\mathrm{H}^0(U, T_X|_U)$ y $\mathrm{H}^0(U, \Omega_X^1|_U)$ son llamadas **campos de vectores** y 1-**formas diferenciales** en U, resp.

Ejemplo importante: Más generalmente, si $p \in \{1, \ldots, n\}$ el **fibrado de** p-**formas diferenciales** en X se define mediante $\Omega_X^p := \Lambda^p \Omega_X^1$.

Luego, si $u_1, \ldots, u_n \in \mathscr{O}_X(U)$ son coordenadas locales en $U \subseteq X$, entonces $s \in \mathrm{H}^0(U, \Omega_X^p|_U)$ es de la forma

$$s(x) = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n} f_{j_1, \ldots, j_p}(x)\, d_x u_{j_1} \wedge \cdots \wedge d_x u_{j_p} \text{ con } f_{j_1, \ldots, j_p}(x) \in \mathscr{O}_X(U).$$

En particular, $\mathrm{rg}(\Omega_X^p) = \binom{n}{p}$ donde $n = \dim(X)$.

El diferencial $df : T_X \to f^*T_Y$, T_f y Ω^1_f

La construcción de T_X es **functorial:**

Si $f : X \to Y$ morfismo regular entre variedades suaves irreducibles, entonces $d_x f : T_x X \to T_{f(x)} Y \overset{\text{def}}{=} (f^* T_Y)_x$ induce un morfismo de fibrados **en X**

$$df : T_X \longrightarrow f^* T_Y \text{ llamado la } \textbf{diferencial} \text{ de } f.$$

Así, $f : X \to Y$ **morfismo suave** si $df : T_X \twoheadrightarrow f^* T_Y$ sobreyectivo, i.e.,

$$0 \longrightarrow T_{X/Y} \longrightarrow T_X \overset{df}{\twoheadrightarrow} f^* T_Y \longrightarrow 0$$

es exacta, donde $T_{X/Y} \overset{\text{def}}{=} T_f := \ker(df)$ es el **fibrado tangente relativo** y cumple que $(T_f)_x \overset{\text{def}}{=} (T_{X/Y})_x \cong T_x(f^{-1}(f(x)))$ para todo $x \in X$.

El **fibrado cotangente relativo** $\Omega^1_f \overset{\text{def}}{=} \Omega^1_{X/Y} := (T_{X/Y})^\vee$ de un morfismo suave $f : X \to Y$ cumple $0 \longrightarrow f^*\Omega^1_Y \longrightarrow \Omega^1_X \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow 0$.

1. Si X e Y variedades suaves irreducibles, $T_{X\times Y} \cong \mathrm{pr}_X^* T_X \oplus \mathrm{pr}_Y^* T_Y$.
2. $T_{\mathbb{A}^n} \cong \mathbb{A}^n \times k^n$ es el **fibrado trivial** de rango n: identificando $T_{\mathbb{A}^n}$ con su haz de secciones y consideramos coordenadas **globales** $x_1, \ldots, x_n$ de $\mathbb{A}^n$, los campos de vectores $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \in \mathrm{H}^0(\mathbb{A}^n, T_{\mathbb{A}^n})$ dados por
$$\frac{\partial}{\partial x_i} : \mathscr{O}_{\mathbb{A}^n,p} \longrightarrow k,\ f \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \text{ para todo } p \in \mathbb{A}^n$$
generan $\mathrm{H}^0(U, T_{\mathbb{A}^n}|_U)$ para todo abierto $U \subseteq \mathbb{A}^n$. Así, $T_{\mathbb{A}^n} \cong \mathscr{O}_{\mathbb{A}^n}^{\oplus n}$.

La siguiente definición proviene de la Geometría Diferencial.

Una variedad suave irreducible X es **paralelizable** si $T_X \cong X \times k^{\dim(X)}$ es el fibrado trivial, i.e., $T_X \cong \mathscr{O}_X^{\oplus \dim(X)}$ en términos de haces de secciones.

Sea G un grupo algebraico **irreducible**. Entonces, G es paralelizable.

Prueba (Mumford): G es **suave** (al ser un espacio homogéneo). Sea $e \in G$ neutro y $\mathfrak{g} := T_eG$. Para $g \in G$ consideramos el morfismo regular

$$L_g : G \longrightarrow G,\ h \longmapsto gh \text{ con diferencial } d_eL_g : \mathfrak{g} \longrightarrow T_gG$$

Veamos que $\varphi : G\times\mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} T_G,\ (g,v) \longmapsto (d_eL_g)(v)$ isomorfismo de fibrados:

Sea $E := G \times \mathfrak{g}$ trivial y $F := T_G$, con haces respectivos $\mathscr{E}$ y $\mathscr{F}$, entonces $\varphi_x : E_x \cong \mathscr{E}_x/\mathfrak{m}_x\mathscr{E}_x \xrightarrow{\sim} F_x \cong \mathscr{F}_x/\mathfrak{m}_x\mathscr{F}_x$ isomorfismo de k-e.v. (G suave).

El **Lema de Nakayama** implica que $\varphi_x : \mathscr{E}_x \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}_x$ isomorfismo de tallos $\forall x \in G$. Así, $\varphi : \mathscr{E} \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}$ isomorfismo de haces, i.e., $T_G \cong G \times \mathfrak{g}$ trivial. □

Caso particular: $\mathbb{G}_a^n \overset{\text{def}}{=} (k^n, +) \cong \mathbb{A}^n$, $\mathbb{G}_m^n \overset{\text{def}}{=} ((k^*)^n, \times)$, $\mathrm{GL}_n(k)$, $\mathrm{SL}_n(k)$, $\mathrm{PGL}_n(k)$, etc. son paralelizables. Si A es una **variedad abeliana** (i.e., grupo algebraico irreducible proyectivo), entonces $T_A \cong \mathscr{O}_A^{\oplus \dim(A)}$ trivial.

Sucesión exacta de Euler

Sea $V \cong k^{n+1}$ un k-e.v. y $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^n$. Entonces, hay una sucesión exacta de fibrados vectoriales en $\mathbb{P}(V)$, llamada la **sucesión exacta de Euler**

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)} \longrightarrow V \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1) \twoheadrightarrow T_{\mathbb{P}(V)} \longrightarrow 0,$$

o equivalentemente $0 \longrightarrow \Omega^1_{\mathbb{P}(V)} \longrightarrow V \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1) \twoheadrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)} \longrightarrow 0$.

Aquí, $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}$ es el fibrado en rectas trivial y $V \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1) \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus(n+1)}$.

Prueba: En $V \cong \mathbb{A}^{n+1}$ con coord. $x_0, \ldots, x_n$, $\frac{\partial}{\partial x_0}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ son generadores de $T_{\mathbb{A}^{n+1}}$. Sin embargo, si $f, g \in \mathscr{O}(\mathbb{A}^{n+1})$ homogéneos de grado d, entonces (como $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ y $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ homogéneos de grado $d-1$) la fórmula de Leibniz implica

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f}{g}\right)(\lambda x) = \frac{\lambda^{d+d-1}}{\lambda^{2d}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$$

y luego $\frac{\partial}{\partial x_i}$ **no está bien definido** en $\mathbb{P}^n$, pero $x_i\frac{\partial}{\partial x_i}$ **sí lo está**.

Sea $x = [\ell] \in \mathbb{P}(V)$. Como $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1)_{[\ell]} \overset{\text{def}}{=} \ell$, tenemos $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)_{[\ell]} \overset{\text{def}}{=} \ell^\vee = \{\varphi : \ell \to k \text{ lineal}\}$ dual de $\ell \cong k$. Construyamos $\Phi : V \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1) \to T_{\mathbb{P}(V)}$:

Para $v \in V$ y $\varphi \in \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)_{[\ell]} \overset{\text{def}}{=} \ell^\vee$, sea $\Phi(v \otimes \varphi) := \partial_{v\otimes\varphi} \in T_{\mathbb{P}(V),[\ell]}$ la aplicación lineal $\partial_{v\otimes\varphi}(f) := \varphi(x)\frac{\partial f}{\partial v}(x)$ para todo germen $f \in \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V),[\ell]}$, la cual es independiente del vector $x \in \ell \setminus \{0\}$ escogido.

Φ **sobreyectivo:** En $U_0 = \{x_0 \neq 0\}$ notar que $\varphi_0 = x_0 = 1$ y los $\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial x_i}$ con $v = e_i$ generan $T_{U_0} \cong T_{\mathbb{A}^n}$ via Φ. Análogamente para cada $U_i \cong \{x_i \neq 0\}$.

$L := \ker(\Phi) \in \operatorname{Pic}(\mathbb{P}(V))$ **es trivial:** Sea $s := \sum_{i=0}^n e_i \otimes e_i^*$ sección global nunca nula, con $\Phi(s) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} = 0$ por la fórmula de Euler (Clase 12):

$$\sum_{i=0}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \deg(f) \cdot f \overset{\text{def}}{=} 0 \cdot f = 0 \text{ para todo } f \underset{\text{loc}}{=} \frac{g_d}{h_d} \in \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V),[\ell]}.$$

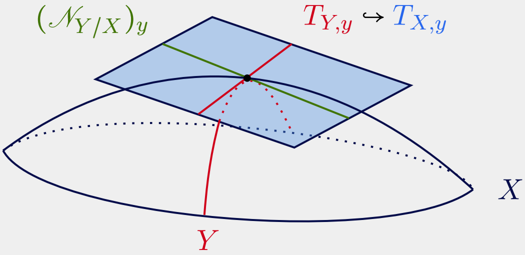
Así, $s \in \mathrm{H}^0(\mathbb{P}(V), L)$ sección global nunca nula, i.e., $L \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}$ trivial. $\square$

Sea $\iota : Y \hookrightarrow X$ sub-variedad suave irreducible de X (que también lo es). Así, para todo $y \in Y$ el diferencial

$$d_y\iota : T_yY \longrightarrow T_yX \overset{\mathsf{def}}{=} (\iota^*T_X)_y \overset{\mathsf{def}}{=} (T_X|_Y)_y$$

es **inyectivo**, i.e., $d\iota : T_Y \hookrightarrow T_X|_Y$ es un sub-fibrado vectorial.

El **fibrado normal** de Y en X es el cociente $\mathcal{N}_{Y/X} := (T_X|_Y)/T_Y$, donde $\mathrm{rg}(\mathcal{N}_{Y/X}) = \dim(X) - \dim(Y) \overset{\mathsf{def}}{=} \mathrm{codim}_X(Y)$.



Como $\mathscr{N}_{Y/X} := \operatorname{coker}(d\iota) \stackrel{\text{def}}{=} (T_X|_Y)/T_Y$, hay una sucesión exacta **<u>en Y</u>**:

$$0 \longrightarrow T_Y \xrightarrow{d\iota} T_X|_Y \twoheadrightarrow \mathscr{N}_{Y/X} \longrightarrow 0$$

o equivalentemente se tiene la sucesión exacta dual

$$0 \longrightarrow \mathscr{N}_{Y/X}^{\vee} \longrightarrow \Omega_X^1|_Y \xrightarrow{{}^{\mathrm{t}}d\iota} \Omega_Y^1 \longrightarrow 0,$$

donde $\mathscr{N}_{Y/X}^{\vee}$ es el **fibrado conormal** de Y en X.

Veremos que el fibrado normal es especialmente fácil de comprender en el caso de sub-variedades definidas por secciones de un fibrado vectorial.

Caso $V(s)$ con $s \in \mathrm{H}^0(X, E)$

Construcción: Sea $E \to X$ fibrado de $\mathrm{rg}(E) = r$ y $s \in \mathrm{H}^0(X, E) \smallsetminus \{0\}$. En una trivialización $E|_U \cong U \times \mathbb{A}^r$ escogemos secciones $(e_1, \dots, e_r)$ tal que $(e_1(x), \dots, e_r(x))$ base de $E_x \cong k^r$ para todo $x \in U$, y escribimos

$$s = \sum_{i=1}^{r} f_i e_i \text{ donde } f_i \in \mathscr{O}_X(U) \text{ función regular.}$$

Luego $V(s) \overset{\text{def}}{=} \{x \in X \text{ tal que } s(x) = 0\} \subseteq X$ está dado localmente por $V(s)|_U = V(f_1, \dots, f_r)$. Así, para $x \in V(s)$ definimos la aplicación k-lineal

$$d_x s : T_x X \longrightarrow E_x$$

mediante $d_x s := \sum_{i=1}^{r} d_x f_i \cdot e_i(x)$ (localmente en U), donde $d_x f_i : T_x X \to T_{f_i(x)} \mathbb{A}^1 \cong k$, la cual es independiente de los f_i y e_i siempre que $x \in V(s)$.

Decimos que $s : X \to E$ es **transversal a la sección nula** si

$$d_x s : T_x X \twoheadrightarrow E_x \text{ es sobreyectiva para todo } x \in V(s).$$

En particular, $\mathrm{rg}(E) \leq \dim(X) = n$ en tal caso.

Caso $V(s)$ con $s \in \mathrm{H}^0(X, E)$

Sea $E \to X$ fibrado de $\mathrm{rg}(E) = r \leq n$ y $s \in \mathrm{H}^0(X, E) \setminus \{0\}$. Entonces:

1. s es transversal a la sección nula $\Leftrightarrow V(s) \subseteq X$ sub-variedad **suave** de $\dim(V(s)) = n - r$. Más aún, en tal caso $\mathcal{N}_{V(s)/X} \cong E|_{V(s)}$.
2. $(\mathrm{car}(k) = 0)$: Sea $M \subseteq \mathrm{H}^0(X, E)$ globalmente generado[a]. Entonces, para $s \in M$ **sección general** la sub-variedad $V(s) \subseteq X$ es suave.

[a] i.e., la aplicación $\mathrm{ev}_x : M \twoheadrightarrow E_x,\ s \longmapsto s(x)$ sobreyectiva para todo $x \in X$

Prueba: Para (1), sea $V(s)|_U = V(f_1, \ldots, f_r)$ como antes y sea $s : X \to E$ con $d_x s : T_x X \twoheadrightarrow E_x,\ v \mapsto \sum_{i=1}^r d_x f_i(v) \cdot e_i(x)$ sobreyectiva $\forall x \in V(s)$. Así, los $d_x f_i$ son l.i. y $\exists u_1 = f_1, \ldots, u_r = f_r, u_{r+1}, \ldots, u_n$ coord. locales en U. Luego, $V(f_1, \ldots, f_r)$ es suave de dimensión $n - r$.

Si $Y := V(s)$ suave de dimensión $\dim(Y) = n - r$, entonces

$$\dim_k T_y Y = n - r \text{ para todo } y \in Y, \text{ donde } T_y Y \cong \ker(d_y s).$$

Luego, el teorema del rango implica que $d_y s$ es sobreyectiva para todo $y \in Y$.

Así, en el caso (1) tenemos isomorfismos canónicos

$$E_y = \mathrm{Im}(d_y s) \cong T_y Y / \ker(d_y s) \cong T_y X / T_y Y \overset{\text{def}}{=} (\mathscr{N}_{Y/X})_y \text{ para todo } y \in Y,$$

i.e., $\mathscr{N}_{Y/X} \cong E|_Y$. El ítem (2) se tiene por suavidad genérica (Ejercicio). □

Ejemplo importante

Sea $E := L_1 \oplus \cdots \oplus L_r$ con $L_i \in \mathrm{Pic}(X)$ y $s_i \in \mathrm{H}^0(X, L_i) \smallsetminus \{0\}$ tales que

$$Y := V(s_1, \ldots, s_r) \subseteq X \text{ suave irreducible de } \operatorname{codim}_X(Y) = r,$$

entonces $\mathscr{N}_{Y/X} \cong (L_1 \oplus \cdots \oplus L_r)|_Y \cong L_1|_Y \oplus \cdots \oplus L_r|_Y$. En particular, si $r = 1$ e $Y = V(s)$ es una hipersuperficie suave entonces

$$\mathscr{N}_{Y/X} \cong L|_Y, \text{ donde } L \cong \mathscr{O}_X(Y).$$

Es común el abuso de notación "$Y|_Y$" para referirse a $\mathscr{O}_X(Y)|_Y \in \mathrm{Pic}(Y)$.

§3.7 Divisor canónico y dimensión de Kodaira

El **fibrado en rectas canónico** de X variedad suave irreducible es

$$\omega_X := \det(\Omega^1_X) \cong \Lambda^{\dim(X)}\Omega^1_X.$$

Un **divisor canónico** es cualquier $K_X \in \mathrm{Div}(X) \cong \mathrm{WDiv}(X)$ tal que

$$\omega_X \cong \mathscr{O}_X(K_X) \text{ en } \mathrm{Pic}(X).$$

El dual $\omega_X^\vee \cong \mathscr{O}_X(-K_X)$ es el **fibrado anti-canónico**, y $-K_X$ es llamado un **divisor anti-canónico**.

1. Como $T_{\mathbb{A}^n} \cong \Omega^1_{\mathbb{A}^n} \cong \mathscr{O}_{\mathbb{A}^n}^{\oplus n}$, $\omega_{\mathbb{A}^n} \cong \mathscr{O}_{\mathbb{A}^n}$ y $K_{\mathbb{A}^n} = 0$ es un divisor canónico.
2. Si G grupo algebraico irreducible (e.g. variedad abeliana), $\omega_G \cong \mathscr{O}_G$.
3. La sucesión de Euler $0 \longrightarrow \Omega^1_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{\oplus(n+1)} \twoheadrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow 0$ implica que $\det(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{\oplus(n+1)}) \cong \det(\Omega^1_{\mathbb{P}^n}) \otimes \det(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n})$, i.e.,

$$\omega_{\mathbb{P}^n} \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1) \text{ en } \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}$$

y $K_{\mathbb{P}^n} = -(n+1)H$ un divisor canónico, con $H \cong \mathbb{P}^{n-1}$ hiperplano.

Fórmula de Adjunción

Sea $E \to X$ fibrado de $\mathrm{rg}(E) = r \leq n$ y $s \in \mathrm{H}^0(X, E) \smallsetminus \{0\}$ tal que $Y := V(s) \subseteq X$ sub-variedad suave de $\dim(Y) = n - r$. Entonces,

$$\omega_Y \cong \omega_X|_Y \otimes \det(\mathscr{N}_{Y/X}) \cong (\omega_X \otimes \det(E))|_Y.$$

Luego, si $Y \subseteq X$ **hipersuperficie** y $L \cong \mathscr{O}_X(Y)$ en $\mathrm{Pic}(X)$, entonces

$$\omega_Y \cong (\omega_X \otimes L)|_Y \text{ en } \mathrm{Pic}(Y),$$

i.e., $K_Y = (K_X + Y)|_Y$ en $\mathrm{Div}(Y) \cong \mathrm{WDiv}(Y)$.

Prueba: Como s transversal a la sección nula, $\mathscr{N}_{Y/X} \cong E|_Y$. La sucesión

$$0 \longrightarrow \mathscr{N}_{Y/X}^{\vee} \longrightarrow \Omega_X^1|_Y \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \Omega_Y^1 \longrightarrow 0$$

implica que tenemos que

$$\omega_X|_Y \overset{\text{def}}{=} \det(\Omega_X^1|_Y) \cong \det(\mathscr{N}_{Y/X}^{\vee}) \otimes \det(\Omega_Y^1) \overset{\text{def}}{=} \det(\mathscr{N}_{Y/X})^{\vee} \otimes \omega_Y,$$

i.e., $\omega_Y \cong \omega_X|_Y \otimes \det(\mathscr{N}_{Y/X})$. $\square$

Si $X \subseteq \mathbb{P}^n$ proyectiva irreducible, definimos $\mathscr{O}_X(d) := \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)|_X$ en $\mathrm{Pic}(X)$.

Ejemplo importante: Sea $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una hipersuperficie suave irreducible de grado d. Por la fórmula de adjunción tenemos que

$$\omega_X \cong (\omega_{\mathbb{P}^n} \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(X))|_X \cong (\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1) \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d))|_X \overset{\text{def}}{=} \mathscr{O}_X(d-n-1).$$

Inductivamente (Ejercicio), si $X = X_{d_1,\ldots,d_r} \subseteq \mathbb{P}^n$ **intersección completa** suave irreducible dada por $V(f_1,\ldots,f_r)$ con $\deg(f_i) = d_i$, entonces

$$\omega_X \cong \mathscr{O}_X\left(-n-1+\sum_{i=1}^{r} d_i\right).$$

E.g. si $C \subseteq \mathbb{P}^2$ curva suave de grado d entonces $\omega_C \overset{\text{def}}{=} \Omega_C^1 \cong \mathscr{O}_C(d-3)$.

Si C posee estructura de grupo (i.e., es una **variedad abeliana**) entonces $d = 3$. El Teorema de Abel-Jacobi implica que si $d = 3$ entonces C posee estructura de grupo abeliano. Decimos que C es una **curva elíptica**.

Los bloques de la Geometría Algebraica

La positividad de K_X permite distinguir 3 tipos importantes de variedades.

Sea X variedad proyectiva suave irreducible. Decimos que X es una

1. **Variedad de Fano** si $\omega_X^\vee \cong \mathscr{O}_X(-K_X)$ es amplio.
2. **Variedad de Calabi-Yau**[a] si $\omega_X \cong \mathscr{O}_X$ es trivial.
3. **Variedad canónicamente polarizada** si $\omega_X \cong \mathscr{O}_X(K_X)$ es amplio.

[a] Es común relajar la definición de variedad de Calabi-Yau piendo simplemente que K_X sea *numéricamente trivial*, i.e., $K_X \cdot C = 0$ para toda curva irreducible $C \subseteq X$.

Ejemplo: Sea $X = X_{d_1,\dots,d_r} = V(f_1,\dots,f_r) \subseteq \mathbb{P}^n$ es una **intersección completa** suave irreducible con $\deg(f_i) = d_i$. Por la fórmula de adjunción:

1. X variedad de Fano $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^r d_i \leq n$.
2. X variedad de Calabi-Yau $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^r d_i = n+1$.
3. X variedad canónicamente polarizada $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^r d_i \geq n+2$.

Ejercicio: Si X Fano y si $Y \in |-K_X|$ suave irreducible, Y es Calabi-Yau.

Plurigéneros

Sea X variedad proyectiva suave irreducible. Para $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, el m-**ésimo plurigénero** de X está dado por

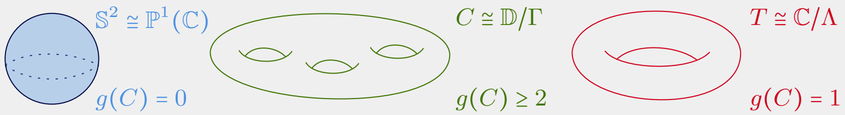
$$P_m(X) := \dim_k \mathrm{H}^0(X, \omega_X^{\otimes m}) \stackrel{\text{def}}{=} \dim_k \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(mK_X)).$$

Decimos que $p_g(X) := P_1(X) \stackrel{\text{def}}{=} \dim_k \mathrm{H}^0(X, \omega_X) \stackrel{\text{def}}{=} \dim_k \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(K_X))$ es el **género geométrico** de X.

Para una **curva algebraica** C escribimos $g(C) := p_g(C)$, y decimos que

$g(C) := \dim_k \mathrm{H}^0(C, \omega_C) \stackrel{\text{def}}{=} \dim_k \mathrm{H}^0(C, \Omega_C^1)$ es el **género** de C.

Si $k = \mathbb{C}$, la **Teoría de Hodge** implica que el género $g(C)$ es la cantidad de "agujeros" de C como superficie **real** compacta orientable.



Sea X variedad proyectiva suave irreducible de $\dim(X) \geq 1$ y $L \cong \mathscr{O}_X(D)$ **amplio**, entonces $\mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(-mD)) = 0$ para todo $m \geq 1$.

Prueba: Sea $m_0 \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ con $M := \mathscr{O}_X(m_0 D)$ muy amplio y sea $\varphi_M : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$. Por definición, $\varphi_{M^{\otimes m}} : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n \xrightarrow{\nu_m} \mathbb{P}^N$ es la composición con el incrustamiento de Veronese. Así, $\mathscr{O}_X(mm_0 D)$ es muy amplio.

Por otra parte, si existiera $s \in \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(-mD))$ no-nula, entonces $s^{\otimes m_0} \in \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(-mm_0 D)) \setminus \{0\}$ y $\mathscr{O}_X(mm_0 D)$ sería trivial, contradicción. $\square$

Ejemplos: Sea X variedad proyectica suave irreducible.

1. Si X Fano, $P_m(X) = 0$ para todo $m \geq 1$ pues $\mathscr{O}_X(-K_X)$ amplio.
2. Si X Calabi-Yau, $P_m(X) = 1$ para todo $m \geq 1$ pues $\mathscr{O}_X(K_X) \cong \mathscr{O}_X$.