Geometría Algebraica

Clase 18

Pedro Montero

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

4 de Octubre de 2023

§3.4 Divisores de Weil y Divisores de Cartier

Cálculo explícito de $\mathrm{Pic}(X)$

Dado que $\mathrm{Cl}(X) \cong \mathrm{Pic}(X)$ para X suave e irreducible, calculamos:

1. Sea $U \subseteq \mathbb{A}^n$ un abierto no-vacío. Entonces, $\mathrm{Pic}(U) \cong \{0\}$ es trivial[1]
2. Si $H \subseteq \mathbb{P}^n$ hiperplano, entonces $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n) \cong \mathrm{Cl}(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}[H] \cong \mathbb{Z}$.

   Si $d \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ entonces $s \in \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \smallsetminus \{0\}$ define $Y := V(s) \subseteq \mathbb{P}^n$ de grado d. Así, $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(Y) \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ y $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n) = \langle \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(H) \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \rangle$. Más aún, el sistema lineal

   $$|Y| \overset{\text{def}}{=} \{E \geq 0 \text{ divisor efectivo tal que } E \sim Y\} \cong \mathbb{P}\,\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$$

   parametriza hipersuperficies de grado d en $\mathbb{P}^n$.

[1] El **Teorema de Quillen-Suslin** (1976) señala que *todo* fibrado vectorial (de rango arbitrario) en $\mathbb{A}^n$ es trivial. Por este resultado Quillen obtuvo la medalla Fields en 1978.

3. Sea X variedad suave e irreducible y $Z \subseteq X$ subvariedad suave e irreducible tal que $\mathrm{codim}_X(Z) \geq 2$. Sea $\varepsilon : \widetilde{X} := \mathrm{Bl}_Z(X) \to X$ el blow-up de $Z \subseteq X$, con divisor excepcional $E \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon^{-1}(Z)$. Entonces,

$$\mathrm{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathrm{Pic}(\widetilde{X}),\ (L, m) \longmapsto \varepsilon^* L \otimes \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(mE)$$

es sobreyectivo. Veamos que es inyectivo, i.e., para todo $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ se tiene que $\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(mE)$ no es trivial en $\mathrm{Pic}(\widetilde{X}) \cong \mathrm{Cl}(\widetilde{X})$:

Si $\exists g \in k(\widetilde{X})^*$ tal que $\mathrm{div}(g) = mE$ en $\mathrm{WDiv}(\widetilde{X})$, $\varepsilon^* : k(X) \xrightarrow{\sim} k(\widetilde{X})$ permite considerar $G := (\varepsilon^*)^{-1}(g) \in k(X)^*$ que por definición cumple que $\mathrm{div}(G) = 0$ en $\mathrm{WDiv}(X)$. Así, G función regular que no se anula, y luego $g \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon^*(G) = G \circ \varepsilon$ también, i.e., $m = 0$. En resumen, tenemos

$$\mathrm{Pic}(\widetilde{X}) = \varepsilon^* \mathrm{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z}[\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(E)] \cong \mathrm{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z}.$$

En particular, tenemos que $\mathrm{Pic}(\mathrm{Bl}_{p_1,\ldots,p_r}(\mathbb{P}^2)) \cong \mathbb{Z}^{r+1}$.

Hecho: Si $S \subseteq \mathbb{P}^3$ cúbica suave, $S \cong \mathrm{Bl}_{p_1,\ldots,p_6}(\mathbb{P}^2)$ y luego $\mathrm{Pic}(S) \cong \mathbb{Z}^7$.

4. Sea $S = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ con coord. $([x_0, x_1], [y_0, y_1])$ y $L_i := \mathrm{pr}_i^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ con
$$\mathrm{H}^0(S, L_1) \cong \mathrm{Vect}_k(x_0, x_1) \text{ y } \mathrm{H}^0(S, L_2) \cong \mathrm{Vect}_k(y_0, y_1).$$
Así, $L_i^{\otimes m} \neq 0$ en $\mathrm{Pic}(S)$ $\forall m \geq 1$ (pues $\mathrm{H}^0(S, \mathscr{O}_S) \cong k$). Además, si $s_i \in \mathrm{H}^0(S, L_i) \setminus \{0\}$ entonces $V(s_1) = \{p\} \times \mathbb{P}^1$ y $V(s_2) = \mathbb{P}^1 \times \{q\}$ son rectas que generan $\mathrm{Cl}(S) \cong \mathrm{Pic}(S)$. Así, hay un isomorfismo
$$\mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1),\ (a, b) \mapsto \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(a, b) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{pr}_1^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \otimes \mathrm{pr}_2^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(b)$$
De manera análoga se calcula (Ejercicio) que $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) \cong \mathbb{Z}^2$.

5. Sea X variedad **proyectiva suave** e irreducible **racional**, i.e., $\exists \varnothing \neq U \subseteq X$ abierto tal que $U \cong V$ para cierto $V \subseteq \mathbb{A}^n$ abierto.

   Supongamos que $D := X \setminus U$ es una **hipersuperficie irreducible**. Entonces, la sucesión exacta

   $$\mathbb{Z}[\mathscr{O}_X(D)] \xrightarrow{\iota} \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{\mathrm{res}} \mathrm{Pic}(U) \cong \{0\} \longrightarrow 0$$

   implica que $\mathrm{Pic}(X)$ está generado por $\mathscr{O}_X(D)$.

   Dado que X es **proyectiva**, existe $L \in \mathrm{Pic}(X)$ muy amplio y luego $L^{\otimes m} \neq 0$ en $\mathrm{Pic}(X)$ para todo $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Así,

   $$\mathrm{Pic}(X) \cong \mathbb{Z}[\mathscr{O}_X(D)] \cong \mathbb{Z}$$

   grupo cíclico infinito genarado por $\mathscr{O}_X(D)$. En particular, deducimos que $\mathscr{O}_X(D)$ es un fibrado en rectas **amplio**.

$\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n) \cong \mathrm{PGL}_{n+1}(k)$

Sea $f : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ un automorfismo de $\mathbb{P}^n$, i.e., un morfismo birregular.

Por un lado, f induce $f^* : \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n)$, $L \longmapsto f^*L$ automorfismo del grupo $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}$. Luego, $f^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1) = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(\pm 1)$ generador de $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n)$.

Por otro lado, f induce un isomorfismo de k-espacios vectoriales

$$\Gamma(f) : \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \cong k^{n+1} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, f^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1)).$$

Como $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)) = \{0\}$, necesariamente $f^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1) = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$.

Dado que f está determinado por $L = f^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1) = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ (ver Clase 16), tenemos que $f = \varphi_L$ es **lineal**. Así, obtenemos un morfismo sobreyectivo $\mathrm{GL}_{n+1}(k) \twoheadrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n)$ con kernel dado por $\{\lambda\, \mathrm{I}_{n+1},\ \lambda \in k^*\}$, i.e.,

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n) \cong \mathrm{PGL}_{n+1}(k).$$

Teorema de Abel-Jacobi

Sea C curva algebraica **proyectiva suave** irreducible. Un divisor de Weil es

$$D = \sum_{i=1}^{r} n_i p_i$$

donde $n_i \in \mathbb{Z}$ y donde $p_i \in C$ es un *punto*. Definimos el **grado** de D como

$$\deg(D) := \sum_{i=1}^{r} n_i \in \mathbb{Z}.$$

Si C' es otra curva algebraica proyectiva suave irreducible y $f : C \to C'$ morfismo regular sobreyectivo (i.e., dominante), definimos el **grado de** f

$$\deg(f) := [k(C) : k(C')] \overset{\text{def}}{=} \dim_{k(C')} k(C) < +\infty$$

como el grado de la extensión de cuerpos $f^* : k(C') \hookrightarrow k(C)$.

Hecho (ver Hartshorne, Chapter II, Proposition 6.9)

Si $f : C \to C'$ como antes, para todo $D \in \mathrm{WDiv}(C') \cong \mathrm{Div}(C')$ se tiene

$$\deg(f^* D) = \deg(f) \deg(D).$$

Sea C curva proyectiva suave irreducible y $D = \operatorname{div}(f) \in \operatorname{PDiv}(C)$ divisor principal. Entonces, $\deg(D) = 0$. En particular, $\deg$ induce un morfismo

$$\begin{aligned} \deg : \operatorname{Pic}(C) \cong \operatorname{Div}(C)/\operatorname{PDiv}(C) &\twoheadrightarrow \mathbb{Z} \\ L \cong \mathscr{O}_C(D) &\longmapsto \deg(L) := \deg(D) \end{aligned}$$

con kernel $\operatorname{Pic}^0(C) := \ker(\deg)$, i.e., hay una sucesión exacta de grupos

$$0 \longrightarrow \operatorname{Pic}^0(C) \hookrightarrow \operatorname{Pic}(C) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Prueba: Sea $f : C \dashrightarrow k \cong \mathbb{A}^1 \cong U_0 \subseteq \mathbb{P}^1$ una función racional no-nula, y sea $F : C \dashrightarrow \mathbb{P}^1$, $x \mapsto [f(x), 1]$ la aplicación racional inducida. Como C suave y $\mathbb{P}^1$ proyectiva, F es un morfismo **regular**. Veamos que $\deg(\operatorname{div}(f)) = 0$:

Si f constante $\operatorname{div}(f) = 0$. Si f no-constante entonces F es sobreyectiva (pues es dominante y cerrada). Si probamos que $\operatorname{div}(f) = F^*(0 - \infty)$ con $0 := [1, 0]$ y $\infty := [0, 1]$, el **Hecho** anterior permite concluir que

$$\deg(\operatorname{div}(f)) = \deg(F) \cdot \deg(0 - \infty) = \deg(F) \cdot 0 = 0.$$

Basta chequear que $\mathrm{div}(f) = F^*(0 - \infty)$ con $0 := [1,0]$ y $\infty := [0,1]$:

Sean $\mathbb{A}^1 \cong U_i = \{x_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^1$ con $i \in \{0,1\}$. El divisor de Cartier $0 \overset{\text{def}}{=} [1,0]$ en $\mathbb{P}^1$ está definido por la familia admisible $\{(\frac{x_1}{x_0}, U_0), (1, U_1)\}$, y por ende F^*0 está definido por $\{(f, F^{-1}(U_0)), (1, F^{-1}(U_1))\}$.

Similar: $F^*\infty$ está dado por $\{(1, F^{-1}(U_0)), (\frac{1}{f}, F^{-1}(U_1))\}$. Así, $F^*(0-\infty)$ está dado por $\{(f, F^{-1}(U_0)), (f, F^{-1}(U_1))\}$, i.e., $F^*(0 - \infty) = \mathrm{div}(f)$. $\square$

Cultura general

El grupo $\mathrm{Pic}^0(C) \cong \mathrm{Jac}(C)^\vee$ es el dual de la **variedad jacobiana** $\mathrm{Jac}(C)$ de la curva C, una variedad abeliana canónicamente asociada a C.

Teorema de Abel-Jacobi

Sea C una curva algebraica proyectiva suave e irreducible. Entonces,

1. $\deg : \mathrm{Pic}(C) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ es un isomorfismo si y sólo si $C \cong \mathbb{P}^1$.
2. Si $C \ncong \mathbb{P}^1$ y $p_0 \in C$ fijo, la **aplicación de Abel-Jacobi**

$$\varphi : C \hookrightarrow \mathrm{Pic}^0(C),\ p \longmapsto \mathscr{O}_C(p - p_0) \text{ es inyectiva.}$$

Prueba: Si $\deg$ es inyectivo y $p, q \in C$ distintos, entonces $\deg(\mathscr{O}_C(p-q)) = 0$ implica que $p \sim q$, i.e., $\exists f : C \dashrightarrow k$ con $\mathrm{div}(f) = p - q$. Tal como antes, $F : C \to \mathbb{P}^1$ verifica $F^*0 = p$ y $F^*\infty = q$. Así, el **Hecho** anterior implica

$$\underbrace{\deg(F^*0)}_{\deg(p)=1} = \deg(F)\underbrace{\deg(0)}_{=1}, \text{ i.e., } \deg(F) = 1,$$

i.e., $k(C) \cong k(\mathbb{P}^1)$, i.e., $C \sim_{\mathrm{bir}} \mathbb{P}^1$. Así, $C \cong \mathbb{P}^1$ (curvas proyectivas suaves).

Para (2), notar que si $\mathscr{O}_C(p - p_0) \cong \mathscr{O}_C(q - p_0)$ entonces $\mathscr{O}_C(p - q) \cong \mathscr{O}_C$, i.e., $p \sim q$ y tendríamos que $C \cong \mathbb{P}^1$ por la demostración de (1). $\square$

Sea C curva proyectiva suave irreducible y $L \cong \mathscr{O}_C(D) \in \operatorname{Pic}(C)$. Entonces,

$$|D| \overset{\text{def}}{=} \{E \geq 0 \text{ divisor efectivo tal que } D \sim E\} \cong \mathbb{P}\,\mathrm{H}^0(C, L).$$

Luego, si $\varphi_L : C \dashrightarrow \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(C,L)^\vee) \overset{\text{def}}{=} |D|^\vee$ entonces **si** L **es**:

1. **globalmente generado**, entonces $\dim_k \mathrm{H}^0(C,L) \geq 1$. Luego, existe $E \geq 0$ tal que $E \sim D$, y por ende $\deg(L) \overset{\text{def}}{=} \deg(D) = \deg(E) \geq 0$.
2. **muy amplio**, entonces $\dim_k \mathrm{H}^0(C,L) \geq 2$. Luego, existe $E \geq 0$ **no-nulo** tal que $E \sim D$, y por ende $\deg(L) \overset{\text{def}}{=} \deg(D) = \deg(E) > 0$.
3. **amplio**, entonces $\deg(L) > 0$. En efecto, dado que

$$\deg(L^{\otimes m}) = m \deg(L) \text{ para todo } m \in \mathbb{Z},$$

basta considerar $m_0 \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tal que $L^{\otimes m_0}$ sea muy amplio.

Más adelante probaremos que todo $L \in \operatorname{Pic}(C)$ con $\deg(L) > 0$ es amplio.

Sea X variedad **proyectiva** irreducible. Dado $D \in \mathrm{Div}(X)$ un divisor de Cartier y $C \subseteq X$ curva **suave** irreducible, su **número de intersección** es

$$D \cdot C := \deg(\mathscr{O}_X(D)|_C) \in \mathbb{Z}.$$

Si C curva irreducible no necesariamente suave y $\nu : C^\nu \to C$ su normalización, se define[2] $D \cdot C := \deg(\nu^*(\mathscr{O}_X(D)|_C)) \in \mathbb{Z}$. En particular,

Si $D_1 \sim D_2$ entonces $D_1 \cdot C = D_2 \cdot C$ para toda curva irreducible $C \subseteq X$.

Sea X variedad proyectiva irreducible. Decimos que $D_1, D_2 \in \mathrm{Div}(X)$ son **numéricamente equivalentes** si

$$D_1 \cdot C = D_2 \cdot C \text{ para toda curva irreducible } C \subseteq X,$$

y escribimos $D_1 \equiv D_2$ (o bien $D_1 \sim_{\text{num}} D_2$). El grupo abeliano cociente $\mathrm{NS}(X) := \mathrm{Div}(X)/\equiv$ es el **grupo de Néron-Severi** de X.

[2] Bien definido pues C^ν es proyectiva en este caso, algo que probaremos más adelante.

A diferencia de $\mathrm{Pic}(X)$, el grupo de Néron-Severi es mucho más tratable.

Teorema (Néron 1952, Severi 1934)

Sea X variedad algebraica proyectiva irreducible. Entonces, el grupo abeliano $\mathrm{NS}(X)$ es **finitamente generado**. En particular,

$$\mathrm{NS}(X) \cong \mathbb{Z}^r \oplus T,$$

donde T es el grupo *finito* de torsión y donde $r \overset{\text{def}}{=} \mathrm{rg}(\mathrm{NS}(X)) =: \rho(X)$ es el **número de Picard** de X.

Por ejemplo, tenemos que:

1. Si C curva proyectiva suave irreducible, $\mathrm{NS}(C) \cong \mathbb{Z}$ y luego $\rho(C) = 1$.
2. $\rho(\mathbb{P}^n) = 1$.
3. $\rho(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) = 2$.
4. $\rho(\mathrm{Bl}_Z(X)) = \rho(X) + 1$.

Divisores nef

Si X variedad proyectiva irreducible y $L \cong \mathscr{O}_X(D) \in \operatorname{Pic}(X)$ es **amplio**, entonces $L|_C$ es amplio para toda curva irreducible $C \subseteq X$.

Usando métodos de cohomología, probaremos que como $\nu : C^\nu \to C$ es **finito** entonces $\nu^* L$ es amplio en C^ν. Luego,

Si $\mathscr{O}_X(D)$ es **amplio**, $D \cdot C > 0$ para toda curva irreducible $C \subseteq X$.

Lo anterior motiva la siguiente definición en geometría birracional.

Cultura general

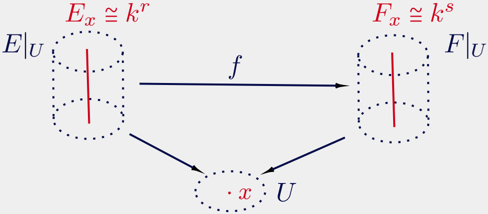
Sea X variedad proyectiva irreducible. Decimos que $L \cong \mathscr{O}_X(D) \in \operatorname{Pic}(X)$ es **nef** si[a]

$$D \cdot C \geq 0 \text{ para toda curva irreducible } C \subseteq X.$$

[a] Aquí, **nef** es la abreviación de *numerically eventually free*.

§3.5 Sub-fibrados y fibrados cocientes

Recuerdo: Sean $E \xrightarrow{p} X$ y $F \xrightarrow{q} X$ fibrados vectoriales de $\mathrm{rg}(E) = r$ y $\mathrm{rg}(F) = s$. Un **morfismo de fibrados vectoriales** es un morfismo regular $f : E \to F$ tal que $q \circ f = p$, i.e.,



y $f_x : E_x \cong k^r \to F_x \cong k^s$ es k-lineal $\forall x \in X$. En este caso, definimos

$$\ker(f) := \bigcup_{x \in X} \ker(f_x) \subseteq E, \qquad \mathrm{Im}(f) := \bigcup_{x \in X} \mathrm{Im}(f_x) \subseteq F$$

Estas subvariedades pueden **no** ser fibrados vectoriales (Ejercicio).
En términos categóricos, $\mathbf{Vect}(X)$ *no es una categoría abeliana*.

Hecho (Ejercicio de Lectura)

Sea $f : E \to F$ morfismo de fibrados vectoriales en X tal que

$$\mathrm{rg}(f) := \mathrm{rg}(f_x) \text{ es constante para todo } x \in X.$$

Entonces, $\ker(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ son fibrados vectoriales en X.

Caso particular importante: Sea $f : E \to F$ morfismo de fibrados tal que

1. f es **inyectivo**: En tal caso, $\mathrm{Im}(f) \cong E$ es un fibrado vectorial, y decimos que E es un **sub-fibrado** de F, y escribimos

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{f} F \text{ o simplemente } E \subseteq F.$$

2. f es **sobreyectivo**: En tal caso, $\ker(f)$ sub-fibrado vectorial de E, y escribimos $E \xrightarrow{f} F \longrightarrow 0$.

Si $\iota : E \hookrightarrow F$ sub-fibrado y si trivializamos E y F simultaneamente obtenemos matrices de transición de F dadas por matrices por bloques

$$g_{ij} = \left(\begin{array}{c:c} a_{ij} & b_{ij} \\ \hdashline 0 & c_{ij} \end{array}\right)$$

con a_{ij} matriz de transición de E. La condición $g_{ij}g_{jk} = g_{ik}$ se reduce a:

1. $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$, la condición de cociclo de E.
2. $a_{ij}b_{jk} + b_{ij}c_{jk} = b_{ik}$, una condición mixta.
3. $c_{ij}c_{jk} = c_{ik}$, una nueva condición de cociclo que define un fibrado vectorial Q de rango $\mathrm{rg}(Q) = \mathrm{rg}(F) - \mathrm{rg}(E)$.

El fibrado vectorial Q es el **fibrado cociente** $Q := F/E$. Más aún, hay una proyección natural $\pi : F \twoheadrightarrow Q$ sobreyectiva que cumple $\ker(\pi) \cong E$.

Así, hay una **sucesión exacta** (S) de fibrados vectoriales en X

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow F \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 0. \qquad (S)$$

La escritura de g_{ij} implica que $\det(g_{ij}) = \det(a_{ij})\det(c_{ij})$ y luego

$$\det(F) \cong \det(E) \otimes \det(Q) \text{ en } \operatorname{Pic}(X).$$

De manera similar, si $L \in \operatorname{Pic}(X)$ tiene **funciones** de transición h_{ij} entonces (en una trivialización común) las matrices de transición de $F \otimes L$ son

$$g_{ij} \otimes h_{ij} = \left(\begin{array}{c:c} a_{ij}h_{ij} & b_{ij}h_{ij} \\ \hdashline 0 & c_{ij}h_{ij} \end{array}\right)$$

y luego obtenemos una sucesión exacta $(S) \otimes L$ dada por

$$0 \longrightarrow E \otimes L \hookrightarrow F \otimes L \twoheadrightarrow Q \otimes L \longrightarrow 0.$$

Ejercicio útil: Dada $0 \longrightarrow E \xrightarrow{\iota} F \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 0$ (S). Probar que

1. La **sucesión dual** $(S^\vee)$ siguiente es exacta:
$$0 \longrightarrow Q^\vee \xrightarrow{{}^t\pi} F^\vee \xrightarrow{{}^t\iota} E^\vee \longrightarrow 0$$
2. Para todo $\varphi : Y \to X$ regular, el **pullback** $\varphi^*(S)$ es exacta en Y:
$$0 \longrightarrow \varphi^*E \longrightarrow \varphi^*F \longrightarrow \varphi^*Q \longrightarrow 0$$

Fibrado cociente tautológico en $\mathrm{Gr}(r, V)$

Sea $V \cong k^n$ un k-e.v. y $1 \leq r \leq n-1$. En $G = \mathrm{Gr}(r, V)$ se tiene el **subfibrado tautológico** $S \subseteq V_G$, donde $V_G \overset{\text{def}}{=} G \times V$ es el fibrado trivial y donde

$$S \overset{\text{def}}{=} \{([\Lambda], v) \in \mathrm{Gr}(r, V) \times V \text{ tal que } v \in \Lambda\} \xrightarrow{p := \mathrm{pr}_1} \mathrm{Gr}(r, V)$$

con $\mathrm{rg}(S) = r$. Lo anterior permite definir el **fibrado cociente tautológico** $Q := V_G / S$, de $\mathrm{rg}(Q) = n - r$ y con $Q_{[\Lambda]} \cong V / \Lambda$. Hay una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow V_G \twoheadrightarrow Q \longrightarrow 0.$$

Construcción: Sea $E \to X$ fibrado $\mathrm{rg}(E) = r$ y sea $V \subseteq H^0(X,E)$ tal que $\dim_k(V) = n > r$. Entonces, podemos definir una aplicación racional

$$\varphi_V : X \dashrightarrow \mathrm{Gr}(n-r,V),\ x \longmapsto K_x := \{s \in V \text{ tal que } s(x) = 0_{E_x}\}$$

donde $0_{E_x} \in E_x \cong k^r$ impone "típicamente" r condiciones independientes.

Más formalmente, φ_V es regular en $x \in X$ si y sólo si la aplicación

$$\mathrm{ev}_x : V \longrightarrow E_x,\ s \longmapsto s(x)$$

verifica $\dim_k(\ker(\mathrm{ev}_x)) = n-r$, i.e., $\mathrm{rg}(\mathrm{ev}_x) = r$, i.e., cuando

$$0 \longrightarrow K_x \overset{\text{def}}{=} \ker(\mathrm{ev}_x) \longrightarrow V \xrightarrow{\mathrm{ev}_x} E_x \longrightarrow 0 \text{ es exacta.}$$

Decimos que V es **globalmente generado** si

$$\mathrm{ev}_x : V \twoheadrightarrow E_x \text{ sobreyectiva } \forall x \in X, \text{ i.e., } \varphi_V : X \to \mathrm{Gr}(n-r,V) \text{ regular.}$$

Decimos que E es un **globalmente generado** si $\dim_k \mathrm{H}^0(X,E)$ es finita y $\mathrm{H}^0(X,E)$ es globalmente generado.

Relación con sucesiones exactas

Sea $V \subseteq \mathrm{H}^0(X,E)$ globalmente generado con $\varphi_V : X \longrightarrow \mathrm{Gr}(n-r,V)$. Consideremos la sucesión exacta tautológica en $G = \mathrm{Gr}(n-r,V)$ dada por

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow V_G \twoheadrightarrow Q \longrightarrow 0, \text{ donde } \mathrm{rg}(Q) = r.$$

El pullback de esta sucesión por φ_V nos da una sucesión exacta en X

$$0 \longrightarrow \varphi_V^* S \overset{\text{def}}{=} K = \ker(\mathrm{ev}) \longrightarrow \varphi_V^* V_G \overset{\text{def}}{=} V_X \twoheadrightarrow \varphi_V^* Q \longrightarrow 0,$$

y en particular tenemos que $\varphi_V^* Q \cong E$.

Si $E = L \in \mathrm{Pic}(X)$ y $V \subseteq \mathrm{H}^0(X,L)$ sistema lineal globalmente generado, lo anterior da una demostración alternativa del hecho que $\varphi_V^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V^\vee)}(1) \cong L$.