Geometría Algebraica

Clase 17

Pedro Montero

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

2 de Octubre de 2023

§3.4 Divisores de Weil y Divisores de Cartier

Secciones racionales

Por una parte, las **secciones** de fibrados en rectas $L \to X$ generalizan el concepto de función regular. Por otra parte, si $f \in k(X)^*$ función racional, $\operatorname{div}(f) := \sum_{\substack{Y \subseteq X \\ \text{hip. irred.}}} \nu_Y(f) \cdot Y$ es el **divisor** (de Weil) **principal** asociado.

Sea X variedad algebraica y $p : L \to X$ fibrado en rectas. Una **sección racional** es una aplicación racional

$$s : X \dashrightarrow L \text{ tal que } s(x) \in L_x \text{ para todo } x \in \operatorname{Dom}(s).$$

Así, una sección racional de $L \cong \mathscr{O}_X$ se identifica a una función racional.

Si $L \to X$ posee funciones de transición g_{ij} respecto al cubrimiento $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, y $s : X \dashrightarrow L$ una sección racional no-nula dada por $\{s_i\}_{i \in I}$ donde $s_i \in k(U_i)$ entonces $s_i = g_{ij} s_j$ en $U_i \cap U_j$. En particular,

$$\nu_Y|_{U_i \cap U_j}(s_i) = \underbrace{\nu_Y|_{U_i \cap U_j}(g_{ij})}_{= 0 \text{ pues } g_{ij}(x) \in k^*} + \nu_Y|_{U_i \cap U_j}(s_j) = \nu_Y|_{U_i \cap U_j}(s_j)$$

Divisor asociado a una sección racional

Sea $s : X \dashrightarrow L$ sección racional, definimos el divisor de Weil asociado a s (**no necesariamente principal**) como

$$\operatorname{div}(s) := \sum_{\substack{Y \subseteq X \\ \text{hip. irred.}}} \nu_Y(s) \cdot Y.$$

Ejemplos:

1. Sea X variedad suave e irreducible, y $f \in k(X)^*$. Entonces, $f \in \mathscr{O}(X)$ si y sólo si todos los coeficientes de $\operatorname{div}(f)$ son ≥ 0 (Ejercicio).
2. Sea X variedad proyectiva suave e irreducible (e.g. $\mathbb{P}^n$). Dado que $\mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X) \cong k$, si $Y \subseteq X$ hipersuperficie irreducible y $d \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ entonces $D := dY$ **no es** un divisor principal (por (1)).
3. En el cono singular
$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{A}^3 \text{ tal que } z^2 = xy\},$$
el divisor principal asociado a la función regular $f = x \in \mathscr{O}(X)$ es $\operatorname{div}(f) = 2L$, donde $L \subseteq X$ es la recta de ecuaciones $x = z = 0$.

Ejemplo importante: En $\mathbb{P}^n$, $H_i := \{x_i = 0\} \cong \mathbb{P}^{n-1}$ es el hiperplano asociado a $x_i \in \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$. Entonces, el divisor principal asociado a

$$f(x_0, \dots, x_n) = \frac{x_i}{x_j}$$

es $\operatorname{div}(f) \overset{\text{def}}{=} H_i - H_j$. Por otra parte, el divisor asociado a la **sección** regular $s = x_i \in \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$ es $\operatorname{div}(s) \overset{\text{def}}{=} H_i$, que **no es principal**.

Terminología

Sea $Y \subseteq X$ una hipersuperficie **irreducible**. Entonces, el divisor de Weil

$$Y := 1 \cdot Y \in \mathrm{WDiv}(X)$$

es llamado un **divisor primo**. Más aún, un divisor de Weil $D = \sum_{i=1}^r n_i Y_i$ es un **divisor efectivo** si $n_i \geq 0$ para todo $i \in \{1, \dots, r\}$, y escribimos $D \geq 0$.

En Geometría Algebraica es muy común llamar divisores a las hipersuperficies

Sea X variedad irreducible **normal**. Su **grupo de clases** es el cociente

$$\mathrm{Cl}(X) := \mathrm{coker}(\mathrm{div}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{WDiv}(X)/\,\mathrm{PWDiv}(X).$$

$D_1, D_2 \in \mathrm{WDiv}(X)$ son **linealmente equivalentes** si $\exists f \in k(X)^*$ tal que

$$D_1 - D_2 = \mathrm{div}(f), \text{ i.e., } [D_1] = [D_2] \text{ en } \mathrm{Cl}(X),$$

y en tal caso escribimos $D_1 \sim D_2$ (o bien $D_1 \sim_{\text{lin}} D_2$).

Ejemplo: En $\mathbb{A}^n$, si $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ hipersuperficie irreducible entonces $\mathcal{I}(Y) = \langle u \rangle$ es un **ideal principal** (primo) de $\mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$. Por definición, tenemos que $\nu_Y(u) \stackrel{\text{def}}{=} 1$ y $\mathrm{div}(u) \stackrel{\text{def}}{=} Y$. Luego,

$$\text{Todo divisor de Weil de } \mathbb{A}^n \text{ es principal, i.e., } \mathrm{Cl}(\mathbb{A}^n) = \{0\}.$$

En general, si X es una variedad algebraica afín irreducible **normal**, entonces $\mathrm{Cl}(X) = \{0\} \Leftrightarrow \mathscr{O}(X)$ dominio de factorización única (UFD, en inglés).

$\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}$[Hiperplano]

Ejemplo importante: En $\mathbb{P}^n$, los hiperplanos $H_i \sim H_j$ son linealmente equivalentes. Más generalmente, si $Y = V(P) \subseteq \mathbb{P}^n$ es una hipersuperficie irreducible definida por un polinomio P homogéneo de grado $d \geq 1$, entonces

$$f(x_0, \ldots, x_n) = \frac{P(x_0, \ldots, x_n)}{x_0^d} \in k(\mathbb{P}^n)^*$$

es tal que $\mathrm{div}(f) \overset{\text{def}}{=} Y - dH_0$, i.e., $Y \sim dH_0$. En particular, $\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}[H_0]$ es un grupo cíclico generado por la clase del hiperplano H_0.

Como $[dH_0] \neq 0$ para todo $d \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}$ grupo cíclico infinito.

Sea X variedad algebraica irreducible **normal**. Sea $Z \subsetneq X$ un **cerrado propio** y $U = X \smallsetminus Z$ **abierto denso**. Entonces:

1. La restricción
$$\mathrm{Cl}(X) \overset{\text{res}}{\twoheadrightarrow} \mathrm{Cl}(U),\ D = \sum n_i Y_i \longmapsto D|_U := \sum n_i (Y_i \cap U)$$
es sobreyectiva, donde definimos $n_i = 0$ en $D|_U$ si $Y_i \cap U = \varnothing$.
2. Si $\operatorname{codim}_X(Z) \geq 2$, entonces $\mathrm{Cl}(X) \cong \mathrm{Cl}(U)$.
3. Si $Y_1, \ldots, Y_r$ son las componentes irreducibles de codimensión 1 de Z,
$$\bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}[Y_i] \xrightarrow{\iota} \mathrm{Cl}(X) \overset{\text{res}}{\twoheadrightarrow} \mathrm{Cl}(U) \longrightarrow 0$$
es exacta, donde $\mathbb{Z}[Y_i]$ es el grupo cíclico generado por $[Y_i] \in \mathrm{Cl}(X)$.

Si $f \in k(X)^*$ con $\operatorname{div}(f) = n_i Y_i$, entonces $f \in k(U)^* \cong k(X)^*$ con $\operatorname{div}(f) = \sum n_i (Y_i \cap U)$ en $\mathrm{WDiv}(U)$, y obtenemos $\mathrm{Cl}(X) \xrightarrow{\text{res}} \mathrm{Cl}(U)$. Si $Y_U \subseteq U$ divisor primo, $Y_U = Y|_U$ con $Y := \overline{Y_U} \subseteq X$, i.e., (1). (2)-(3) son directos. □

1. Sea $U \subseteq \mathbb{A}^n$ abierto no-vacío, entonces $\{0\} = \mathrm{Cl}(\mathbb{A}^n) \twoheadrightarrow \mathrm{Cl}(U) = \{0\}$.
2. Sea $Y_d \subseteq \mathbb{P}^n$ hipersuperficie de grado $d \geq 1$, con $Y_d \sim dH$. Luego
$$\mathbb{Z}[Y_d] \cong d\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Cl}(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathrm{Cl}(\mathbb{P}^n \smallsetminus Y_d) \longrightarrow 0$$
implica que $\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^n \smallsetminus Y_d) \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.
3. Sea X variedad suave e irreducible, y $Z \subseteq X$ una subvariedad suave irreducible con $\operatorname{codim}_X(Z) \geq 2$, y así $\mathrm{Cl}(X) \cong \mathrm{Cl}(X \smallsetminus Z)$. El blow-up
$$\varepsilon : \mathrm{Bl}_Z(X) \longrightarrow X \text{ con } \textbf{divisor excepcional } E \overset{\text{def}}{=} \varepsilon^{-1}(Z)$$
cumple $\mathrm{Cl}(X \smallsetminus Z) \cong \mathrm{Cl}(\mathrm{Bl}_Z(X) \smallsetminus E)$ y $\mathrm{Cl}(\mathrm{Bl}_Z(X)) \cong \mathrm{Cl}(X) \oplus \mathbb{Z}[E]$.
4. Sean $p, q \in \mathbb{P}^1$. En $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, consideramos las rectas
$$L_1 := \{p\} \times \mathbb{P}^1 \text{ y } L_2 := \mathbb{P}^1 \times \{q\}.$$
Entonces, $(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \smallsetminus (L_1 \cup L_2) =: U \cong \mathbb{A}^2$. Luego,
$$\{0\} = \mathrm{Cl}(U) \cong \mathrm{Cl}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)/(\mathbb{Z}[L_1] \oplus \mathbb{Z}[L_2]),$$
i.e., $\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ está generado[1] por $[L_1]$ y $[L_2]$.

[1] Más adelante veremos que $\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) \cong \mathbb{Z}^2$.

Sea X variedad irreducible. Una familia $\{(f_i, U_i)\}_{i\in I}$, donde $\{U_i\}_{i\in I}$ cubrimiento abierto de X y $f_i \in k(U_i)^*$, es **admisible** si

$$g_{ij} := f_i/f_j \in \mathscr{O}_X^*(U_i \cap U_j) \text{ para todos } i, j \in I,$$

i.e., f_i/f_j función regular que no se anula en $U_i \cap U_j$. Además, decimos que $\{(f_i, U_i)\}_{i\in I}$ y $\{(g_j, V_j)\}_{j\in J}$ son **equivalentes** si su unión

$$\{(f_i, U_i)\}_{i\in I} \cup \{(g_j, V_j)\}_{j\in J} \text{ es admisible.}$$

Un **divisor de Cartier** en X es $D = [(f_i, U_i)_{i\in I}]$, una clase de equivalencia de familias admisibles.

Denotamos por $\mathrm{Div}(X)$ al conjunto de divisores de Cartier en X.

Un divisor de Cartier es una colección de ecuaciones locales tales que en las intersecciones las ecuaciones difieren por una función g_{ij} sin ceros ni polos.

$\mathrm{Div}(X)$ es un grupo abeliano

Sea $D = [(f_i, U_i)_{i\in I}]$ divisor de Cartier en X y $\cup_{j\in J} V_j = X$ otro cubrimiento abierto de X, entonces $\{(f_i, U_i)\}_{i\in I} \sim \{(f_i|_{U_i\cap V_j}, U_i \cap V_j)\}_{(i,j)\in I\times J}$.

Así, *siempre* podemos suponer que dos divisores de Cartier $D = [(f_i, U_i)_{i\in I}]$ y $D' = [(g_i, U_i)_{i\in I}]$ están definidos en el mismo cubrimiento, y definir:

- $-D := [(1/f_i, U_i)_{i\in I}]$.
- $D + D' := [(f_i g_i, U_i)_{i\in I}]$.
- $0 := [(1, X)]$. Luego, $D = 0$ en $\mathrm{Div}(X) \Leftrightarrow f_i \in \mathscr{O}_X^*(U_i)\ \forall i \in I$.

Luego, $\mathrm{Div}(X)$ es un **grupo abeliano** y decimos que:

1. $D = [(f_i, U_i)_{i\in I}]$ es un **divisor efectivo** si $f_i \in \mathscr{O}_X(U_i)$ es una función regular para todo $i \in I$. En tal caso, escribimos $D \geq 0$.
2. Un **divisor de Cartier principal** es $D = [(f, X)]$ para una $f \in k(X)^*$.
3. $\mathrm{PDiv}(X)$ es el sub-grupo de **divisores de Cartier principales** de X.

$D \sim D'$ son **linealmente equivalentes** si $D - D'$ es un divisor principal.

Weil versus Cartier

Sea X variedad irreducible **normal**. Entonces, hay un morfismo *inyectivo*

$$\varphi : \mathrm{Div}(X) \hookrightarrow \mathrm{WDiv}(X)$$

que cumple que $\varphi(\mathrm{PDiv}(X)) \subseteq \mathrm{PWDiv}(X)$. Más aún,

Si X es **suave**, entonces $\mathrm{Div}(X) \cong \mathrm{WDiv}(X)$.

Sea $D = [(f_i, U_i)_{i \in I}] \in \mathrm{Div}(X)$ y consideremos $\widehat{D} \in \mathrm{WDiv}(X)$ definido por

$$\widehat{D} := \sum_{\substack{Y \subseteq X \\ \text{hip. irred.}}} \nu_Y(f_i) \cdot Y$$

para **cualquier** $i \in I$ tal que $Y \cap U_i \neq \varnothing$ (es independiente de $i \in I$ pues $f_i / f_j \in \mathscr{O}_X^*(U_i \cap U_j)$). Así, obtenemos un morfismo de grupos

$$\varphi : \mathrm{Div}(X) \longrightarrow \mathrm{WDiv}(X),\ D \longmapsto \widehat{D}.$$

Si $D = [(f, X)]$ es un divisor de Cartier principal, $\widehat{D} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{div}(f)$ es principal.

Weil versus Cartier

Como $\operatorname{codim}_X \operatorname{Sing}(X) \geq 2$, si $\nu_Y(f_i) = 0$ para todo $Y \subseteq X$ divisor primo, $f_i \in \mathscr{O}_X^*(U_i)$ para todo $i \in I$, i.e., $D = 0$ en $\operatorname{Div}(X)$. Así, φ inyectivo.

Si X variedad **suave** y $Y \subseteq X$ divisor primo, como $\mathscr{O}_{X,x}$ anillo factorial $\forall x \in X$ existe un cubrimiento abierto $\{U_i\}_{i \in I}$ de X tal que $\mathcal{I}(Y \cap U_i) = \langle f_i \rangle$ es un ideal principal para todo $i \in I$. Así, el divisor de Cartier

$$D_Y := [(f_i, U_i)_{i \in I}] \text{ verifica que } \varphi(D_Y) \overset{\text{def}}{=} Y.$$

En particular, todo divisor de Weil **efectivo** es de Cartier (al ser suma de divisores primos).

Dado que todo divisor de Weil es diferencia de divisores de Weil efectivos, deducimos que $\operatorname{Div}(X) \cong \operatorname{WDiv}(\mathrm{X})$ en este caso. $\square$

Cultura general

Una variedad irreducible normal es $\mathbb{Q}$-**factorial** si para todo divisor de Weil $D \in \operatorname{WDiv}(X)$ existe $m = m(D) \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tal que mD es un divisor de Cartier.

El fibrado en rectas $\mathscr{O}_X(D)$

Construcción: Sea X variedad irreducible y $D = [(f_i, U_i)_{i \in I}] \in \mathrm{Div}(X)$ divisor de Cartier. En $U_i \cap U_j$, las funciones

$$g_{ij} := f_i / f_j \in \mathscr{O}_X^*(U_i \cap U_j)$$

son regulares sin ceros. Más aún, verifican la **condición de cociclo**

$$g_{ij} g_{jk} = g_{ik} \text{ en } U_i \cap U_j \cap U_k.$$

Luego, D define[2] $\mathscr{O}_X(D) \in \mathrm{Pic}(X)$ con funciones de transición $g_{ij} \overset{\text{def}}{=} f_i / f_j$.

Recordar que una **sección racional** de $L = \mathscr{O}_X(D)$ es una aplicación racional

$$s : X \dashrightarrow \mathscr{O}_X(D)$$

dada por $\{s_i\}_{i \in I}$ con $s_i \in k(U_i)$ verificando que $s_i = g_{ij} s_j \overset{\text{def}}{=} \frac{f_i}{f_j} s_j$ en $U_i \cap U_j$. Luego, las $s_i := f_i \in k(U_i)$ definen *tautológicamente* una sección racional

$$s_D : X \dashrightarrow \mathscr{O}_X(D) \text{ puesto que } f_i \overset{\text{def}}{=} g_{ij} f_j \text{ en } U_i \cap U_j.$$

[2] Que en la literatura clásica también se denota por $\mathscr{L}_D$ o por $\mathscr{L}(D)$.

Sea X variedad algebraica **irreducible**. Entonces, el morfismo

$$\pi : \mathrm{Div}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X),\ D \longmapsto \mathscr{O}_X(D)$$

induce un **isomorfismo** $\widehat{\pi} : \mathrm{Div}(X)/\mathrm{PDiv}(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(X)$. En particular,

$D_1 \sim D_2$ si y sólamente si $\mathscr{O}_X(D_1) \cong \mathscr{O}_X(D_2)$.

Prueba: Si $D = [(f, X)]$ es un divisor de Cartier principal, entonces $g_{ij} \overset{\text{def}}{=} 1$, i.e., $\mathscr{O}_X(D) \cong \mathscr{O}_X$ es el fibrado trivial en $\mathrm{Pic}(X)$. Así, la propiedad universal del cociente nos dice que π induce un morfismo de grupos

$$\widehat{\pi} : \mathrm{Div}(X)/\mathrm{PDiv}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X),\ [D] \longmapsto \mathscr{O}_X(D).$$

1. $\widehat{\pi}$ **inyectivo:** Sea $D = [(f_i, U_i)_{i\in I}] \in \mathrm{Div}(X)$ tal que $\mathscr{O}_X(D) \cong \mathscr{O}_X$. Entonces, $\exists s \in \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(D))$ que *no se anula nunca*, dada por $\{s_i\}_{i\in I}$ con $s_i \in \mathscr{O}_X^*(U_i)$ y tales que $s_i = g_{ij} s_j \overset{\text{def}}{=} \frac{f_i}{f_j} s_j$ en $U_i \cap U_j$. Así, $f := \frac{f_i}{s_i} = \frac{f_j}{s_j}$ define $f \in k(X)^*$ con $[(f, X)] \overset{\text{def}}{=} D$, i.e., D principal.

2. $\widehat{\pi}$ **sobreyectivo:** Sea $L \in \mathrm{Pic}(X)$ dado por funciones de transición $g_{ij} \in \mathscr{O}_X^*(U_i \cap U_j)$ en una trivialización $\{U_i\}_{i\in I}$. Si fijamos un indice $\ell \in I$ y definimos $f_i := g_{i\ell} \in k(U_i)^*$, entonces al divisor de Cartier
$$D := [(f_i, U_i)_{i\in I}]$$
le asociamos el fibrado en rectas $\mathscr{O}_X(D)$ con funciones de transición
$$h_{ij} \overset{\text{def}}{=} \frac{f_i}{f_j} \overset{\text{def}}{=} \frac{g_{i\ell}}{g_{j\ell}} = g_{ij},$$
gracias a la condición de cociclo. Así, $\mathscr{O}_X(D) \cong L$.

Luego, $\widehat{\pi} : \mathrm{Div}(X)/\mathrm{PDiv}(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(X)$ es un isomorfismo. □

Caso particular importante

Si X es **suave**, tenemos que $\mathrm{Cl}(X) \cong \mathrm{Div}(X)/\mathrm{PDiv}(X) \cong \mathrm{Pic}(X)$.

¡Podemos interpretar los fibrados en rectas como divisores de Cartier (e incluso como divisores de Weil, en variedades suaves)!

Pullback de divisores de Cartier

Sean X e Y variedades irreducibles y $\varphi : Y \to X$ morfismo regular.

Si $D = [(f_i, U_i)_{i\in I}] \in \mathrm{Div}(X)$ un divisor de Cartier en X, podemos considerar el pullback $\varphi^*\mathscr{O}_X(D) \in \mathrm{Pic}(Y)$ como fibrado en rectas.

Por otro lado, la familia $\{\varphi^*(f_i), \varphi^{-1}(U_i)\}_{i\in I}$ define un divisor de Cartier $\varphi^* D \in \mathrm{Div}(Y)$ en Y siempre y cuando

$$\varphi^*(f_i) \overset{\text{def}}{=} f_i \circ \varphi \neq 0 \text{ en } \varphi^{-1}(U_i).$$

E.g. si φ es dominante (ya que $\varphi^* : k(X) \hookrightarrow k(Y)$ es inyectivo en tal caso).

Por construcción, si $\varphi^* D$ está bien definido entonces (Ejercicio)

$$\varphi^*\mathscr{O}_X(D) \cong \mathscr{O}_Y(\varphi^* D) \text{ en } \mathrm{Pic}(Y).$$

Espacio de Riemann-Roch $\mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(D))$

Sea $D = [(f_i, U_i)_{i\in I}] \in \mathrm{Div}(X)$ y sea $\mathscr{O}_X(D) \in \mathrm{Pic}(X)$. Históricamente, el k-e.v. $\mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(D))$ es llamado el **espacio de Riemann-Roch de D**, pues el **Teorema de Riemann-Roch** busca estimar $\dim_k \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(D))$.

Explícitamente, sea $s \in \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(D)) \smallsetminus \{0\}$ sección dada por $\{s_i\}_{i\in I}$ con $s_i \in \mathscr{O}_X(U_i)$ tales que $s_i = g_{ij} s_j \overset{\text{def}}{=} \frac{f_i}{f_j} s_j$ en $U_i \cap U_j$.

Así, obtenemos $f := \frac{s_i}{f_i} = \frac{s_j}{f_j} \in k(X)^*$ que por definición es tal que $f = s/s_D$. Si X variedad **normal**, el morfismo de grupos

$$\mathrm{Div}(X) \hookrightarrow \mathrm{WDiv}(X),\ D \longmapsto \widehat{D} := D$$

es inyectivo, y en tal caso la relación $f = s/s_D$ implica que

$$\mathrm{div}(f) = \mathrm{div}(s) - \mathrm{div}(s_D) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{div}(s) - D.$$

Así, $D \sim \mathrm{div}(s) \geq 0$ y en particular $\mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(D)) \cong \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(\mathrm{div}(s)))$.

Si $s \in \mathrm{H}^0(X, L)$ entonces $\mathscr{O}_X(\mathrm{div}(s)) \cong L$.

Recíprocamente, si $D \sim D'$ entonces existe $\exists f \in k(X)^*$ tal que $D' - D = \mathrm{div}(f)$, y luego $s := f s_D$ es una **sección racional** de $\mathscr{O}_X(D)$ que verifica

$$\mathrm{div}(s) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(s_D) \overset{\text{def}}{=} D' - D + D = D'.$$

Además, s es una *sección regular* si y sólo si $\mathrm{div}(s) \geq 0$ es un divisor efectivo.

En resumen:

La aplicación $s \mapsto f := s/s_D$ induce un isomorfismo

$$\mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(D)) \cong \{f \in k(X)^* \text{ tal que } \mathrm{div}(f) + D \geq 0\} \cup \{0\}$$

con inversa $f \mapsto s := f s_D$.

Caso particular importante: Dadas $f, g \in k(X)^*$, $\mathrm{div}(f) = \mathrm{div}(g)$ si y sólo si $\mathrm{div}(f/g) = 0$, i.e., f/g es una función regular que nunca se anula.

Luego, si X variedad algebraica **proyectiva normal** entonces $\Gamma(X, \mathscr{O}_X) \cong k$ implica que $\mathrm{div}(f) = \mathrm{div}(g)$ si y sólo si $f = \lambda g$ para cierto $\lambda \in k^*$.

Así, $s \mapsto \mathrm{div}(s)$ induce un isomorfismo

$$\mathbb{P}\,\mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(D)) \cong |D| := \{E \geq 0 \text{ divisor efectivo tal que } E \sim D\}.$$

Clásicamente, el conjunto $|D| \overset{\text{def}}{=} \{E \geq 0 \text{ divisor efectivo tal que } E \sim D\}$ es llamado el **sistema lineal** asociado al divisor de Cartier D.

Sucesión exacta asociada al divisor $D \subseteq X$

Sea $\iota : Y \hookrightarrow X$ divisor primo (i.e., una hipersuperficie irreducible). Entonces, hay una sucesión exacta de $\mathscr{O}_X$-módulos

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_Y \longrightarrow \mathscr{O}_X \longrightarrow \mathscr{O}_Y \longrightarrow 0,$$

donde $\mathscr{O}_Y := \iota_* \mathscr{O}_Y$ por abuso de notación.

Si X variedad **suave**, consideramos el divisor de Cartier $D = [(f_i, U_i)_{i \in I}]$ asociado a Y, donde $\mathcal{I}(U_i \cap Y) = \langle f_i \rangle$ por construcción.

Entonces, $\mathscr{O}_X(D) \cong \mathscr{O}_X(Y)$ tiene funciones de transición $g_{ij} \overset{\text{def}}{=} \frac{f_i}{f_j}$ y su dual $L := \mathscr{O}_X(-D)$ tiene funciones de transición $h_{ij} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{g_{ij}} = \frac{f_j}{f_i}$. En particular,

$$s \in \mathscr{L}(U) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{H}^0(U, L|_U) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{H}^0(U, \mathscr{O}_X(-D)|_U)$$

está dada por $\{s_i\}_{i \in I}$, con $s_i \in \mathscr{O}_X(U \cap U_i)$ tales que $s_i = h_{ij} s_j \overset{\text{def}}{=} \frac{f_j}{f_i} s_j$.

Sucesión exacta asociada al divisor $D \subseteq X$

La relación $s_i = h_{ij} s_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f_j}{f_i} s_j$ implica que $f_s := s_i f_i = s_j f_j$ definida en U.

Así, toda $s \in \mathscr{L}(U)$ permite definir

$$f_s \in \mathscr{O}_X(U) \text{ función } \textbf{regular} \text{ que se anula en } Y, \text{ i.e., } f_s \in \mathcal{I}_Y(U)$$

Así, obtenemos un morfismo inyectivo de $\mathscr{O}_X$-módulos

$$\mathscr{L} \hookrightarrow \mathscr{O}_X, \; s \longmapsto f_s \text{ en cada abierto } U \subseteq X,$$

cuya imagen es $\mathcal{I}_Y$. En particular, $\mathcal{I}_Y \cong \mathscr{L} \cong \mathscr{O}_X(-D)$ y así obtenemos

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_X(-D) \longrightarrow \mathscr{O}_X \longrightarrow \mathscr{O}_D \longrightarrow 0.$$

Si $D = \sum n_i Y_i$ **divisor efectivo** (i.e., $n_i \geq 0$ para todo i) entonces la **sucesión exacta asociada a** $D \geq 0$ está dada por

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_X(-D) \longrightarrow \mathscr{O}_X \longrightarrow \mathscr{O}_D \longrightarrow 0,$$

Aquí, $\mathscr{O}_D$ es el haz dado por el cociente de $\mathscr{O}_X$ por el ideal de funciones regulares que se anulan en Y_i con multiplicidad $\geq n_i$.