Geometría Algebraica

Clase 16

Pedro Montero

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

27 de Septiembre de 2023

§3.3 Sistemas lineales y amplitud

- Un fibrado en rectas $p : L \to X$ es una fibración, localmente trivial en un cubrimiento $X = \bigcup_{i\in I} U_i$, de k-e.v. $p^{-1}(x) \stackrel{\text{def}}{=} L_x$ de dimensión 1.
- L está determinado por **funciones de transición** $\{g_{ij} : U_i \cap U_j \to k^*\}$.
- El producto tensorial permite definir el **grupo de Picard** $\mathrm{Pic}(X)$.
- Una **sección** de L es un morfismo regular $s : X \to L$ tal que $s(x) \in L_x$ para todo $x \in X$, i.e., $\{s_i \in \mathscr{O}_X(U_i)\}$ tales que $s_i = g_{ij} s_j$ en $U_i \cap U_j$.
- El conjunto de seccións $\mathrm{H}^0(X, L)$ es un k-espacio vectorial.
- **Ejemplo importante:** El fibrado tautológico $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ de $\mathbb{P}^n$ cumple $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)_{[\ell]} \cong \ell$ y $g_{ij}(x) = x_i/x_j$.

Aplicación asociada a $L \in \mathrm{Pic}(X)$

Sean $s_0, \dots, s_n \in \mathrm{H}^0(X, L) \setminus \{0\}$ con s_j definida por $s_{j,i} \in \mathscr{O}_X(U_i)$ en U_i. Así, para cada $x \in U_i$ definimos la aplicación racional

$$\varphi_L : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n,\ x \longmapsto [s_{0,i}(x), \dots, s_{n,i}(x)]$$

φ_L es **independiente** del abierto pues al pasar del abierto U_i a U_j cada coordenada de $\varphi_L(x)$ se multiplica por el mismo factor no-nulo $g_{ji}(x)$.

Luego, escribimos símplemente

$$\varphi_L : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n,\ x \longmapsto [s_0(x), \dots, s_n(x)],$$

bien definida fuera del cerrado $Z = \{x \in X,\ s_i(x) = 0\ \forall i \in \{1, \dots, n\}\} \subseteq X$.

Caso particular importante Si las secciones $s_0, \dots, s_n$ **no** tienen ceros comunes (i.e., $Z = \varnothing$), y por lo tanto

$$\varphi_L : X \longrightarrow \mathbb{P}^n \text{ es un } \textbf{morfismo regular}.$$

En el caso en que φ_L **es regular**, se tiene $\varphi_L^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \cong L$. En efecto:

Si $U_i \overset{\text{def}}{=} \{x_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^n$, $\varphi_L^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ se trivializa en los abiertos

$$X_i := \varphi_L^{-1}(U_i) \overset{\text{def}}{=} \{x \in X \text{ tal que } s_i(x) \neq 0\},$$

Dado que $\varphi_L(x) = \left[\frac{s_0(x)}{s_j(x)}, \ldots, \frac{s_n(x)}{s_j(x)}\right]$ para todo $x \in X_j$, las funciones de transición h_{ij} de $\varphi_L^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ para pasar de X_j a X_i están dadas por

$$h_{ij}(x) = \frac{s_j(x)}{s_i(x)} \overset{\text{def}}{=} \frac{s_j(x)}{g_{ij}(x)s_j(x)} = \frac{1}{g_{ij}(x)} \overset{\text{def}}{=} g_{ji}(x), \text{ i.e., } \varphi_L^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \cong L^\vee.$$

Recíprocamente: Dado $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^n$, $x \longmapsto [f_0(x), \ldots, f_n(x)]$ regular, consideramos $L := f^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$, junto con la aplicación k-lineal

$$\Gamma(f) : \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \longrightarrow \mathrm{H}^0(X, L),\ x_i \longmapsto \Gamma(f)(x_i) =: s_i$$

Luego, $f = \varphi_L$ ya que $s_j(x) \overset{\text{def}}{=} (x_j \circ f)(x) \overset{\text{def}}{=} f_j(x)$ para todo $j \in \{0, \ldots, n\}$.

$$\left\{ \begin{array}{c} f : X \longrightarrow \mathbb{P}^n \\ \text{morfismo regular} \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} L \in \mathrm{Pic}(X) \text{ junto con secciones} \\ s_0, \ldots, s_n \in \mathrm{H}^0(X, L) \text{ sin ceros comunes} \end{array} \right\}$$

$$f \longmapsto L := f^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \text{ y } s_i := \Gamma(f)(x_i)$$

$$f := \varphi_L \longleftarrow (L,\ (s_0, \ldots, s_n))$$

Sea $L \in \mathrm{Pic}(X)$. Un **sistema lineal** M en X es un sub-espacio vectorial $M \subseteq \mathrm{H}^0(X, L)$ de *dimensión finita*. En particular, si $\dim_k \mathrm{H}^0(X, L) < +\infty$ decimos que el sistema lineal $\mathrm{H}^0(X, L)$ es un **sistema lineal completo**.

Dado $M \subseteq \mathrm{H}^0(X, L)$ sistema lineal, escribimos

$$|M| := \mathbb{P}(M^\vee) \overset{\text{def}}{=} \{\text{hiperplanos en } M\}.$$

el espacio proyectivo **dual** de M. Así, se tiene análogamente

$$\varphi_M : X \dashrightarrow |M| \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}(M^\vee),\ x \longmapsto M_x := \{s \in M \text{ tal que } s(x) = 0_{L_x}\}$$

y φ_M definida en $x \in X$ (i.e., $M_x \subseteq M$ hiperplano) $\Leftrightarrow \exists s \in M$ con $s(x) \neq 0$.

Si $s_0, \dots, s_n$ base de M y $s = \sum_{i=0}^n \lambda_i s_i$, entonces $M_x \in |M|$ está dado por

$$\lambda_0 s_0(x) + \cdots + \lambda_n s_n(x) = 0$$

y corresponde al punto $[s_0(x), \dots, s_n(x)] \in |M| \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}(M^\vee) \cong \mathbb{P}^n$, i.e.,

$$\varphi_M : X \dashrightarrow |M| \cong \mathbb{P}^n,\ x \longmapsto [s_0(x), \dots, s_n(x)] \text{ en coordenadas.}$$

Sea $M \subseteq \mathrm{H}^0(X, L)$ sistema lineal. El **lugar de base** de M es

$$\mathrm{Bs}(M) := \{x \in X \text{ tal que } s(x) = 0 \text{ para todo } s \in M\}.$$

Decimos que M es **libre de puntos de base** (o **globalmente generado**[1]) si $\mathrm{Bs}(M) = \varnothing$, i.e., $\varphi_M : X \longrightarrow |M| \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}(M^\vee)$ es un **morfismo regular**.

Equivalentemente, dado que $\dim_k L_x = 1$, el morfismo de evaluación

$$\mathrm{ev} : X \times M \twoheadrightarrow L,\ (x, s) \longmapsto s(x) \text{ es } \textbf{sobreyectivo}.$$

En particular, tenemos una biyección

$$\left\{ \begin{array}{c} f : X \longrightarrow \mathbb{P}^n \\ \text{morfismo regular} \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} L \in \mathrm{Pic}(X) \text{ junto con } M \subseteq \mathrm{H}^0(X, L) \text{ sistema} \\ \text{lineal de } \dim_k(M) = n + 1 \text{ sin puntos de base} \end{array} \right\}$$

[1] En inglés, *base point free* o bien *globally generated*.

1. Si $\dim_k(M) = 2$ (i.e., $|M| \cong \mathbb{P}^1$) decimos que
$$f : X \dashrightarrow |M| \cong \mathbb{P}^1$$
es un **pincel** de hipersuperficies en X.
2. Las inclusiones $M \subseteq N \subseteq \mathrm{H}^0(X, L)$ inducen aplicaciones racionales
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "\varphi_N"] \arrow[dr, dashed, "\varphi_M"'] & \mathbb{P}(N^\vee) \arrow[d, dashed, "\pi"] \\ & \mathbb{P}(M^\vee) \end{tikzcd}$$
donde π es la proyección lineal inducida por $N^\vee \twoheadrightarrow M^\vee$. Si $s_0, \ldots, s_n$ es una base de N tal que $s_0, \ldots, s_m$ es una base de $M \subseteq N$, entonces
$$\pi([s_0, \ldots, s_m, s_{m+1}, \ldots, s_n]) = [s_0, \ldots, s_m].$$

3. Sea $X = \mathbb{P}^n$ y $L = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ con $d \geq 1$. Entonces,
$$\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \cong k[x_0, \dots, x_n]_d$$
Luego, $\varphi_L \overset{\text{def}}{=} \nu_d : \mathbb{P}^d \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d))^\vee) \cong \mathbb{P}^N$ es el incrustamiento de Veronese. Así, $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ es **globalmente generado**.
4. En $\mathbb{P}^2$, si $M := \mathrm{Vect}_k\langle yz, xz, xy\rangle \subseteq \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^2, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(2))$ entonces
$$\varphi_M : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2,\ [x, y, z] \longmapsto [yz, xz, xy]$$
es la involución de Cremona.

Si $f : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ incrustamiento cerrado, entonces denotamos
$$\mathscr{O}_X(1) := f^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \overset{\text{def}}{=} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1)|_X.$$
Es un abuso de notación, pues $\mathscr{O}_X(1)$ **depende** del incrustamiento f.

Hecho (Lema de Nakayama)

Sea $(A, \mathfrak{m})$ anillo local con $A/\mathfrak{m} \cong k$ y M un A-mód. finitamente generado.

Si $u_1, \ldots, u_m \in M$ son tales $[u_1], \ldots, [u_m] \in M/\mathfrak{m}M$ son generadores de dicho $k \cong A/\mathfrak{m}$-espacio vectorial cociente, entonces $u_1, \ldots, u_m$ generan M como A-módulo.

Así, si A noetheriano y $M = \mathfrak{m}$, generadores de $\mathfrak{m}$ se identifican en $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

Teorema

Sea $f : X \longrightarrow Y$ morfismo **finito**. Supongamos que:

1. f **separa puntos**, i.e., f es inyectivo.
2. f **separa tangentes**, i.e., $d_x f : T_x X \hookrightarrow T_{f(x)} Y$ inyectivo $\forall x \in X$.

Entonces, f es un incrustamiento cerrado (i.e., $X \cong f(X) \hookrightarrow Y$ cerrado).

Prueba: Asumimos f biyectivo (considerando $Y := f(X)$). Sea $g := f^{-1}$. Dado que f cerrado (pues f finito), g es continua. Veamos que g **regular**:

Podemos asumir X, Y afines. Así, basta probar que $f^* : \mathscr{O}(Y) \longrightarrow \mathscr{O}(X)$ es un isomorfismo. Como f dominante, f^* inyectivo. Veamos $\mathrm{Im}(f^*) = \mathscr{O}(X)$:

Por (2), la aplicación dual $f^* : \mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2 \twoheadrightarrow \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ es k-lineal **sobreyectiva**, donde $y := f(x)$. Si $u_1, \ldots, u_m \in \mathfrak{m}_y$ generadores, $[f^*(u_1)], \ldots, [f^*(u_m)]$ son generadores de $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$. **Lema de Nakayama:** $f^*(u_1), \ldots, f^*(u_m)$ generan $\mathfrak{m}_x \subseteq \mathscr{O}_{X,x}$, i.e., $\mathfrak{m}_x = \langle f^*(\mathfrak{m}_y)\rangle \subseteq \mathscr{O}_{X,x}$.

Como f finito, $\mathscr{O}_{X,x}$ es un $\mathscr{O}_{Y,y}$-módulo fin. gen. (vía f^*). Como $[1]$ genera $\mathscr{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x \cong k$ y $f^* : \mathscr{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_y \twoheadrightarrow \mathscr{O}_{X,x}/\langle f^*(\mathfrak{m}_y)\rangle = \mathscr{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ sobreyectivo, el Lema de Nayakama implica 1 genera $\mathscr{O}_{X,x}$ como $\mathscr{O}_{Y,y}$-módulo vía f^*, i.e., $\mathscr{O}_{X,x} = f^*\mathscr{O}_{Y,f(x)}$ para todo $x \in X$. Así, f^* isomorfismo a nivel de tallos.

Luego, f^* isomorfismo a nivel de haces y en particular $\mathscr{O}(X) = \mathrm{Im}(f^*)$. $\square$

Usando técnicas de **cohomología**, más adelante probaremos:

Teorema de Grauert-Grothendieck

Si $f : X \to Y$ regular cuyas fibras $f^{-1}(y)$ son conjuntos finitos (e.g. f inyectivo) y X variedad proyectiva, entonces f es un **morfismo finito**.

Sea X variedad proyectiva y $M \subseteq \mathrm{H}^0(X, L)$ sistema lineal. Entonces,

$$\varphi_M : X \hookrightarrow |M| \cong \mathbb{P}(M^\vee)$$

es un incrustamiento cerrado si y sólo si

1. M **separa puntos**, i.e., para todos $x, y \in X$ con $x \neq y$ existe $s \in M$ tal que $s(x) = 0$ y $s(y) \neq 0$. En particular, M es libre de puntos de base.
2. M **separa tangentes**, i.e., para todo $x \in X$ y todo vector tangente $v \in T_x X$ existe $s \in M$ tal que $s(x) = 0$ y $(d_x s)(v) \neq 0$.

Prueba: La condición (1) implica que φ_M es regular inyectivo y luego (**Grauert-Grothendieck**), un morfismo finito. Por el resultado anterior, basta probar que (2) equivale a que $d_x\varphi_M$ es inyectiva $\forall x \in X$:

Sea $x_0 \in X$ y $s_0, \dots, s_n$ base de M con $s_0(x_0) \neq 0$ y $s_i(x_0) = 0$ para todo $i > 0$, i.e., $\varphi_M(x_0) = [1, 0, \dots, 0]$. Así, en $X_{s_0} := \{x \in X \text{ tal que } s_0(x) \neq 0\}$ tenemos $\varphi_M(x) \overset{\text{def}}{=} \left[1, \frac{s_1(x)}{s_0(x)}, \dots, \frac{s_n(x)}{s_0(x)}\right] \in U_0 \overset{\text{def}}{=} \{x_0 \neq 0\} \cong \mathbb{A}^n$, i.e.,

$$\varphi_M : X_{s_0} \longrightarrow \mathbb{A}^n,\ x \longmapsto \left(\frac{s_1(x)}{s_0(x)}, \dots, \frac{s_n(x)}{s_0(x)}\right)$$

con $d_{x_0}\varphi_M : T_{x_0}X \cong T_{x_0}X_{s_0} \longrightarrow T_{\varphi_M(x_0)}\mathbb{A}^n,\ v \longmapsto (d_{x_0}\varphi_M)(v)$.

Si $j > 0$, $s_i = g_{ij}s_j$ y $s_j(x_0) = 0$ implican que $(d_{x_0}s_i)(v)$ bien definido:

$$(d_{x_0}s_i)(v) = g_{ij}(x_0)(d_{x_0}s_j)(v) + (d_{x_0}g_{ij})(v) \cdot s_j(x_0) = g_{ij}(x_0)(d_{x_0}s_j)(v)$$

Leibniz: $$(d_{x_0}\varphi_M)(v) = \left(\frac{(d_{x_0}s_1)(v)}{s_0(x_0)}, \dots, \frac{(d_{x_0}s_n)(v)}{s_0(x_0)}\right).$$

Así $d_{x_0}\varphi_M$ es inyectivo si y sólo si el sistema lineal M separa tangentes. □

Teorema de Bertini

Teorema de Bertini general ($\mathrm{car}(k) = 0$)

Sea X suave e irreducible, y $M \subseteq \mathrm{H}^0(X, L)$ sistema lineal **libre de puntos de base**. Entonces, para $s \in M$ sección **general** la variedad

$$V(s) := \{x \in X \text{ tal que } s(x) = 0\} \subseteq X \text{ es suave.}$$

Consideramos $I := \{(s, x) \in M \times X$ tal que $s(x) = 0\}$. Como M libre de puntos de base, $\mathrm{pr}_2^{-1}(x) \overset{\text{def}}{=} M_x \in |M| \cong \mathbb{P}^n$ es un hiperplano $\cong \mathbb{P}^{n-1}$ $\forall x \in X$.

Si L localmente trivial en el cubrimiento $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ entonces $\mathrm{pr}_2 : I \to X$ cumple que $\mathrm{pr}_2^{-1}(U_i) \cong U_i \times \mathbb{P}^{n-1}$ para todo $i \in I$ (Ejercicio).

Luego, I variedad suave. Así, el Teorema de suavidad genérica aplicado a $\mathrm{pr}_1 : I \to M$ implica que $\mathrm{pr}_1^{-1}(s) \overset{\text{def}}{=} V(s)$ suave si $s \in M \cong \mathbb{A}^{n+1}$ general. $\square$

Considerando $f : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ y $L := f^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$, se deduce el Teorema de Bertini clásico (ver Clase 13) a partir de lo anterior (Ejercicio).

Las siguientes nociones son **fundamentales** en Geometría Algebraica.

Sea X variedad algebraica y $L \in \mathrm{Pic}(X)$ tal que $\dim_k \mathrm{H}^0(X, L) < +\infty$, con

$$\varphi_L : X \dashrightarrow \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(X, L)^\vee)$$

la aplicación racional asociada. Decimos que L es:

1. **globalmente generado** si φ_L es un morfismo regular, i.e.,
   $$\mathrm{Bs}(L) := \{x \in X \text{ tal que } s(x) = 0 \text{ para todo } s \in \mathrm{H}^0(X, L)\} \text{ es vacío.}$$
2. **semi-amplio** si $L^{\otimes m}$ es globalmente generado para cierto $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.
3. **muy amplio** si $\varphi_L : X \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(X, L)^\vee)$ es un incrustamiento cerrado, i.e., si L separa puntos y tangentes.
4. **amplio** si $L^{\otimes m}$ es muy amplio para cierto $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

Así, X es **proyectiva** $\Leftrightarrow$ Existe $L \in \mathrm{Pic}(X)$ fibrado en rectas **amplio**.

La siguiente definición fue introducida por Shigeru Iitaka en 1970.

Sea X variedad algebraica y $L \in \mathrm{Pic}(X)$ tal que[a] $\dim_k \mathrm{H}^0(X, L^{\otimes m}) < +\infty$ para todo $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Definimos la **dimensión de Iitaka** de L mediante

$$\kappa(L) = \begin{cases} \max\limits_{m \in \mathbb{N}^{\geq 1}} \dim\left(\overline{\varphi_{L^{\otimes m}}(X)}\right) & \text{si } \exists m_0 \in \mathbb{N}^{\geq 1} \text{ con } \mathrm{H}^0(X, L^{\otimes m_0}) \neq \{0\} \\ -\infty & \text{si } \mathrm{H}^0(X, L^{\otimes m}) = \{0\} \text{ para todo } m \in \mathbb{N}^{\geq 1} \end{cases}$$

Luego, $\kappa(L) \in \{-\infty, 0, 1, \ldots, \dim(X)\}$.

[a] Más adelante veremos que esto es automático si X es proyectiva.

Así, $\kappa(L)$ mide la máxima dimensión que puede tener la imagen $\varphi_{L^{\otimes m}}(X)$.

Decimos que el fibrado en rectas L es **big** si tiene dimensión de Iitaka maximal, i.e., si $\kappa(L) = \dim(X)$.

Sea X variedad algebraica y $L \in \mathrm{Pic}(X)$ tal que $\dim_k \mathrm{H}^0(X, L^{\otimes m}) < +\infty$ para todo $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Entonces se tienen las implicancias (Ejercicio):

$$
\begin{tikzcd}
L \text{ globalmente generado} \arrow[r, Rightarrow] & L \text{ semi-amplio} \arrow[r, Rightarrow] & \kappa(L) \geq 0 \\
L \text{ muy amplio} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[u, Rightarrow] & L \text{ amplio} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[u, Rightarrow] & L \text{ big} \arrow[u, Rightarrow]
\end{tikzcd}
$$

Hecho (Zariski, 1962)

Sea X una variedad algebraica proyectiva **normal**, y sea $L \in \mathrm{Pic}(X)$ un fibrado en rectas tal que el lugar de base $\mathrm{Bs}(L)$ es un **conjunto finito**. Entonces, L es semi-amplio.

§3.4 Divisores de Weil y Divisores de Cartier

Recordemos que si X es una variedad irreducible **normal** entonces

$$\operatorname{codim}_X \operatorname{Sing}(X) \geq 2 \tag{†}$$

Si $Y \subseteq X$ hipersuperficie irreducible entonces $X_{\text{reg}} \cap Y \neq \varnothing$, i.e., $\exists y \in Y$ punto suave en X. Así, $\exists y \in U \subseteq X$ abierto afín y $u \in \mathscr{O}(U) \smallsetminus \{0\}$ irreducible con

$$\mathcal{I}(Y \cap U) = \langle u \rangle, \text{ i.e., } u \text{ es una ecuación local de } Y.$$

Como $k(X) \cong k(U) \cong \operatorname{Fr}(\mathscr{O}(U))$, **toda** $f : X \dashrightarrow k$ racional no-nula cumple

$$f = \frac{g}{h} = \frac{u^a g'}{u^b h'} = u^m \frac{g'}{h'}, \text{ donde } m := a - b \in \mathbb{Z} \text{ y donde } g', h' \notin \mathcal{I}(Y \cap U).$$

Más aún, $m \geq 0$ si $f \in \mathscr{O}_{X,y}$ es regular en $y \in X$.

Definimos la **multiplicidad** de $f \in k(X) \smallsetminus \{0\}$ a lo largo de Y como dicho $\nu_Y(f) := m \in \mathbb{Z}$. Además, decimos que:

1. f tiene un **cero** a lo largo de Y si $\nu_Y(f) > 0$.
2. f tiene un **polo** a lo largo de Y si $\nu_Y(f) < 0$.

Definición (Divisor de Weil)

Sea X variedad irreducible **normal**. Un **divisor de Weil** es una expresión

$$D = \sum_{\text{finita}} n_Y \cdot Y, \text{ donde } n_Y \in \mathbb{Z} \text{ y donde } Y \subseteq X \text{ hipersuperficie irreducible,}$$

i.e., es una **suma formal** obtenida como combinación lineal entera de hipersuperficies irreducibles de X.

Denotamos por $\mathrm{WDiv}(X)$ al grupo abeliano de divisores de Weil en X.

Si $f \in k(X)^*$ hay **finitas** hipersuperficies irreducibles $Y \subseteq X$ con $\nu_Y(f) \neq 0$.

En efecto, si $U = \mathrm{Dom}(f) \subseteq X$ y $Z := X \setminus U$, entonces para toda $Y \subseteq X$:

1. Si $Y \subseteq Z$, Y es una de las **finitas** componentes irreducibles de Z.
2. Si $Y \cap U \neq \varnothing$, $\nu_Y(f) \geq 0$ por definición. Además, $\nu_Y(f) > 0$ implica $Y \subseteq V(f)$, y este último tiene *finitas* componentes irreducibles. $\square$

Divisores de Weil

Ejemplo fundamental: Sea X variedad irreducible **normal** y $f \in k(X)^*$. Definimos el **divisor de Weil asociado a** f mediante

$$\operatorname{div}(f) := \sum_{\substack{Y \subseteq X \\ \text{hip. irred.}}} \nu_Y(f) \cdot Y \overset{\text{def}}{=} \operatorname{div}(f)_+ - \operatorname{div}(f)_-,$$

donde $\operatorname{div}(f)_+$ (resp. $\operatorname{div}(f)_-$) es el divisor de ceros (resp. polos) de f.

Notar que si $f, g \in k(X)^*$, entonces $\operatorname{div}(fg) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(g)$.

Luego, obtenemos un morfismo de grupos abelianos

$$\operatorname{div} : k(X)^* \longrightarrow \operatorname{WDiv}(X),\ f \longmapsto \operatorname{div}(f)$$

cuya imagen

$$\operatorname{PWDiv}(X) := \{D \in \operatorname{WDiv}(X),\ \exists f \in k(X)^* \text{ tal que } D = \operatorname{div}(f)\}$$

es el sub-grupo (normal) de **divisores de Weil principales** de X.