Geometría Algebraica

Clase 15

Pedro Montero

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

25 de Septiembre de 2023

§3.1 Fibrados vectoriales y Grupo de Picard

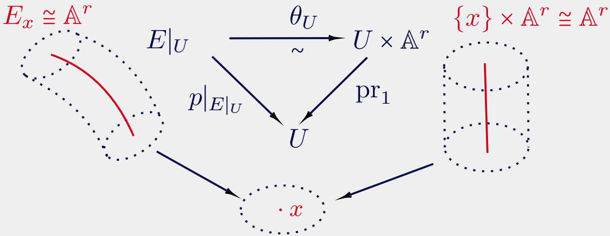
Los fibrados vectoriales y divisores conectan variedades abstractas y variedades clásicas (ceros de polinomios).

Sea X variedad algebraica. Un **fibrado vectorial de rango** $r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ en X es una variedad E con $p : E \twoheadrightarrow X$ regular sobreyectivo tal que:

1. Para todo $x \in X$, $p^{-1}(x) := E_x \cong k^r$ es un k-e.v. de $\dim_k(E_x) = r$.
2. Para todo $x \in X$, existe $x \in U \subseteq X$ abierto afín y un isomorfismo

   $\theta_U : p^{-1}(U) =: E|_U \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{A}^r$ **(trivialización de E sobre U)**

   tal que el diagrama siguiente conmuta



y $k^r \xrightarrow{\sim} E_x$, $v \longmapsto \theta_U^{-1}(x, v)$ es un isomorfismo lineal para todo $x \in U$.

Caso particular importante

Un **fibrado en rectas**[a] en X es un fibrado vectorial $L \xrightarrow{p} X$ de rango 1.

[a] En inglés, **line bundle**.

1. Sea V un k-e.v. de $\dim_k(V) = r$. El fibrado vectorial
$$V_X := X \times V \cong X \times \mathbb{A}^r \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} X$$
es llamado el **fibrado trivial** de rango r en X.

2. Sea V un k-e.v. de $\dim_k(V) = n+1$, sea $X = \mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^n$ su proyectivización. Dentro de $V_X \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}(V) \times V$, consideramos
$$L := \{([\ell], v) \in \mathbb{P}(V) \times V,\ v \in \ell\} \xrightarrow{p := \mathrm{pr}_1} \mathbb{P}(V),\ ([\ell], v) \longmapsto [\ell],$$
donde $[\ell] \in \mathbb{P}(V)$ es el *punto* del espacio proyectivo correspondiente a la recta vectorial $\ell \subseteq V$. En particular, $p^{-1}([\ell]) \overset{\text{def}}{=} \ell \cong \mathbb{A}^1$ es una recta.

Ejemplos (fibrados tautológicos)

Para trivializar $L \xrightarrow{p} \mathbb{P}(V)$ consideremos coord. $[x_0, \dots, x_n]$ en $\mathbb{P}^n \cong \mathbb{P}(V)$ y t una coord. en $\ell \cong \mathbb{A}^1$. Así, en $U_i \overset{\text{def}}{=} \{x_i \neq 0\}$ tenemos la trivialización

$$U_i \times \mathbb{A}^1 \xrightarrow[\sim]{\theta_i^{-1}} p^{-1}(U_i)$$

$$\Big(\underbrace{\Big[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\Big]}_{\text{genera una recta } \ell}, t\Big) \longmapsto \Big([x_0, \dots, x_n], \underbrace{\Big(\frac{tx_0}{x_i}, \dots, t, \dots, \frac{tx_n}{x_i}\Big)}_{\text{vector en } \ell}\Big)$$

El fibrado anterior será denotado por $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1)$ o por $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$, y es llamado el **fibrado en rectas tautológico** de $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^n$. En particular,

$\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1) \twoheadrightarrow \mathbb{P}(V)$ cumple $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1)_{[\ell]} \cong \ell$ para todo $[\ell] \in \mathbb{P}(V)$.

De manera análoga, el **fibrado tautológico** de rango r en $\mathrm{Gr}(r, V)$ es

$$S := \{([\Lambda], v) \in \mathrm{Gr}(r, V) \times V \text{ tal que } v \in \Lambda\} \xrightarrow{p := \mathrm{pr}_1} \mathrm{Gr}(r, V)$$

Construcción:

Sea $E \xrightarrow{p} X$ un fibrado vectorial y sea $f : Y \to X$ un morfismo regular. Entonces, se define el **pullback** de E por f como

$$f^*E := \{(y,z) \in Y \times E \text{ tal que } f(y) = p(z)\} \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} Y,$$

un fibrado vectorial en Y, con $\mathrm{rg}(f^*E) = \mathrm{rg}(E)$ y $(f^*E)_y \overset{\text{def}}{=} E_{f(y)}$.

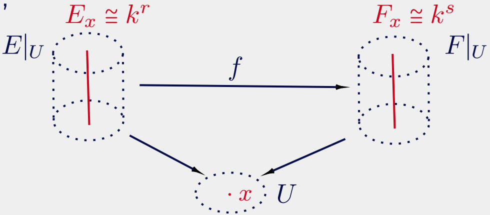
En particular, si $f : Y \hookrightarrow X$ incrustamiento cerrado (i.e., $Y \subseteq X$ subvariedad), entonces $f^*E \overset{\text{def}}{=} E|_Y$ es la **restricción** de E a Y.

En términos categóricos, f^*E es el **producto fibrado** del diagrama

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

La categoría $\mathbf{Vect}(X)$

Sean $E \xrightarrow{p} X$ y $F \xrightarrow{q} X$ fibrados vectoriales de $\mathrm{rg}(E) = r$ y $\mathrm{rg}(F) = s$. Un **morfismo de fibrados vectoriales** es un morfismo regular $f : E \to F$ tal que $q \circ f = p$, i.e.,



y para todo $x \in X$, la aplicación $f_x : E_x \cong k^r \to F_x \cong k^s$ es k-lineal. Así, obtenemos la **categoría $\mathbf{Vect}(X)$ de fibrados vectoriales en X**.

Ejemplo fundamental: Todo morfismo $f : X \times k^r \longrightarrow X \times k^s$ entre los **fibrados triviales** cumple $f(x,v) = (x, g(x)v)$, $g(x) \in M_{s\times r}(k)$ $\forall x \in X$.

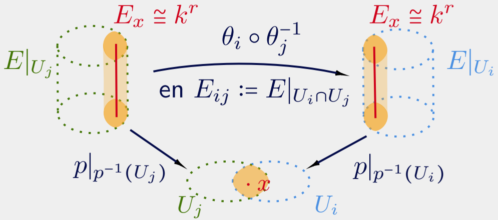
Notar que si $s = r$ y si $g(x_0)$ es invertible para cierto $x_0 \in X$, entonces $g(x) \in \mathrm{GL}_r(k)$ para todo $x \in U$, con U una vecindad abierta de x_0.

Matrices de transición

Sea $p : E \to X$ fibrado vectorial y $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ cubrimiento abierto tal que cada U_i trivializa E, i.e., $E|_{U_i} \overset{\text{def}}{=} p^{-1}(U_i) \xrightarrow[\theta_i]{\sim} U_i \times \mathbb{A}^r$. En cada $U_i \cap U_j \neq \varnothing$:

$$\begin{tikzcd}
& E|_{U_i\cap U_j} \overset{\text{def}}{=} p^{-1}(U_i\cap U_j) =: E_{ij} \arrow[dl, "\theta_j|_{E_{ij}}"', "\cong"] \arrow[dr, "\theta_i|_{E_{ij}}", "\cong"'] & \\
(U_i\cap U_j)\times\mathbb{A}^r \arrow[rr, "\theta_i\circ\theta_j^{-1}", "\sim"'] & & (U_i\cap U_j)\times\mathbb{A}^r \\
(x,v) \arrow[rr, mapsto] & & (x, g_{ij}(x)v)
\end{tikzcd}$$

donde $g_{ij}(x) \in \mathrm{GL}_r(k)$ $\forall x \in U_i \cap U_j$, son llamadas **matrices de transición**.



La condición de cociclo

Las matrices de transición verifican que $g_{ii}(x) = \mathrm{I}_r$ para todo $x \in U_i$ y en la triple intersección $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \varnothing$ se verifica la **condición de cociclo**

$$g_{ij} g_{jk} = g_{ik} \text{ en } U_i \cap U_j \cap U_k.$$

Esta condición es muy importante pues implica que (módulo isomorfismo[1]) E **está completamente determinado** por un cubrimiento abierto y por las matrices de transición:

Construimos E usando el atlas algebraico[2] obtenido al pegar los $U_i \times \mathbb{A}^r$ usando los isomorfismos siguientes como cambio de carta para todo $i, j \in I$

$$\begin{aligned} (U_i \cap U_j) \times \mathbb{A}^r &\xrightarrow{\sim} (U_i \cap U_j) \times \mathbb{A}^r \\ (x, v) &\longmapsto (x, g_{ij}(x) v) \end{aligned}$$

Ejercicio: Sea $V_X \stackrel{\text{def}}{=} X \times \mathbb{A}^r$. Verificar que $g_{ij}(x) = \mathrm{I}_r \ \forall i, j \in I$ son matrices de transición para V_X. En particular, $g_{ij}(x) \equiv 1$ para $k_X := X \times \mathbb{A}^1$.

[1] Las matrices no son únicas: dependen del cubrimiento abierto y las trivializaciones.

[2] La condición de cociclo implica que de hecho es un atlas algebraico (ver Clase 6).

Funciones de transición

Todo $L \xrightarrow{p} X$ fibrado en rectas (i.e., $\mathrm{rg}(L) = 1$) está determinado (módulo isomorfismo) **funciones de transición** $g_{ij}(x) \in k^*$ para todo $x \in U_i \cap U_j$.

Si $\mathscr{O}_X^*$ es el haz de funciones regulares que no se anulan, $g_{ij} \in \mathscr{O}_X^*(U_i \cap U_j)$.

Ejemplo: Para el fibrado tautológico $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ de $\mathbb{P}^n$, tenemos que

$$\theta_j^{-1}(x,t) = \left(x, \left(\frac{tx_0}{x_j}, \dots, \frac{tx_n}{x_j}\right)\right) \quad \text{y} \quad \theta_i^{-1}(x,s) = \left(x, \left(\frac{sx_0}{x_i}, \dots, \frac{sx_n}{x_i}\right)\right),$$

de donde obtenemos (igualando coordenadas) el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& p^{-1}(U_i \cap U_j) \arrow[dr, "\theta_i", "\cong"'] & \\
(U_i \cap U_j) \times \mathbb{A}^1 \arrow[ur, "\theta_j^{-1}", "\cong"'] \arrow[rr, "\theta_i \circ \theta_j^{-1}", "\sim"'] & & (U_i \cap U_j) \times \mathbb{A}^1 \\
(x,t) \arrow[rr, mapsto] & & \left(x, \frac{x_i}{x_j}t\right) \overset{\text{def}}{=} (x,s)
\end{tikzcd}$$

En particular, deducimos que $g_{ij}(x) = \frac{x_i}{x_j}$ para todo $x \in U_i \cap U_j$.

Sean $E \xrightarrow{p} X$ y $F \xrightarrow{q} X$ fibrados vectoriales de $\operatorname{rg}(E) = r$ y $\operatorname{rg}(F) = s$, dados por matrices de transición $g_{ij}(x) \in \mathrm{GL}_r(k)$ y $h_{ij}(x) \in \mathrm{GL}_s(k)$ en un cubrimiento abierto común. Definimos, mediante matrices de transición:

1. $E \oplus F$, con $\operatorname{rg}(E \oplus F) = r + s$, mediante
$$\begin{pmatrix} g_{ij}(x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & h_{ij}(x) \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{r+s}(k).$$
2. $E \otimes F$, con $\operatorname{rg}(E \otimes F) = rs$, mediante $g_{ij}(x) \otimes h_{ij}(x) \in \mathrm{GL}_{rs}(k)$.
3. El **dual** $E^\vee$, con $\operatorname{rg}(E^\vee) = r$, mediante $g_{ij}^\vee := ({}^{\mathrm{t}}g_{ij}{}^{-1})(x) \in \mathrm{GL}_r(k)$.
4. $\mathbf{Hom}(E, F) := E^\vee \otimes F$, con $\operatorname{rg}(\mathbf{Hom}(E, F)) = rs$.
5. Para $d \in \mathbb{N}$, $S^d E$, con $\operatorname{rg}(S^d E) = \binom{r+d-1}{d}$, mediante $S^d g_{ij}(x)$.
6. Para $d \in \{0, \dots, r\}$, $\Lambda^d E$, con $\operatorname{rg}(\Lambda^d E) = \binom{r}{d}$, mediante $\Lambda^d g_{ij}(x)$.
7. El determinante $\det : \mathrm{GL}_r(k) \to k^*$ determina un *fibrado en rectas* $\det(E) \cong \Lambda^r E$, con funciones de transición $\det(g_{ij}(x))$.

Caso particular importante: Sean $L \to X$ y $M \to X$ **fibrados en recta**, dados por funciones de transición g_{ij} y h_{ij}, respectivamente. Entonces:

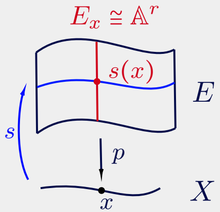
1. Las funciones $k_{ij} := g_{ij}h_{ij} = h_{ij}g_{ij}$ definen el fibrado en rectas
$$L \otimes M \cong M \otimes L.$$
2. El fibrado en rectas trivial $k_X \overset{\text{def}}{=} X \times \mathbb{A}^1$, con $k_{ij} = 1$, verifica
$$k_X \otimes L \cong L \otimes k_X \cong L.$$
3. El dual $L^\vee$, con $g_{ij}^\vee \overset{\text{def}}{=} 1/g_{ij}$, verifica $L \otimes L^\vee \cong L^\vee \otimes L \cong k_X$.

El **grupo de Picard** de una variedad algebraica X es el grupo abeliano
$$\mathrm{Pic}(X) := \{\text{Fibrados en rectas en } X\}/\cong.$$

Ejemplo importante: Sea $d \in \mathbb{Z}$. En $\mathbb{P}^n$ definimos el fibrado en rectas
$$\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d) \text{ mediante las funciones de transición } g_{ij}(x) = \left(\frac{x_j}{x_i}\right)^d.$$
En particular, $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \overset{\text{def}}{=} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^\vee$ con $g_{ij} = \frac{x_j}{x_i}$.

§3.2 Secciones y haces localmente libres

Sea $E \xrightarrow{p} X$ fibrado de rango r. Una **sección** de E es un morfismo regular $s : X \to E$, $x \mapsto s(x)$ con $p \circ s = \mathrm{Id}_X$, i.e., $s(x) \in E_x \cong k^r$ para todo $x \in X$.



El conjunto de **secciones globales** de E, dado por

$$\Gamma(X,E) := \mathrm{H}^0(X,E) := \{s : X \to E \text{ sección de } E \xrightarrow{p} X\},$$

es un $\Gamma(X,\mathscr{O}_X)$-módulo: si $s,t \in \mathrm{H}^0(X,E)$ y $\lambda \in \Gamma(X,\mathscr{O}_X) \overset{\text{def}}{=} \mathscr{O}_X(X)$

$$(s+t)(x) := s(x) + t(x) \quad \text{y} \quad (\lambda s)(x) := \lambda(x)s(x).$$

En particular, $\mathrm{H}^0(X,E)$ es un k-espacio vectorial.

En términos de matrices de transición, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} E|_{U_i} \overset{\mathsf{def}}{=} p^{-1}(U_i) \arrow[rr, "\sim", "\theta_i"'] \arrow[dr, "p"] & & U_i \times \mathbb{A}^r \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"'] \\ & U_i \arrow[ul, bend left, "s|_{U_i}"] \arrow[ur, bend right, "\sigma_i := \theta_i \circ s|_{U_i}"'] & \end{tikzcd}$$

donde $\sigma_i(x) = (x, s_i(x))$ para todo $x \in U_i$, con

$$s_i(x) = (s_{i,1}(x), \ldots, s_{i,r}(x)) \in \mathscr{O}_X(U_i)^{\oplus r}.$$

Más aún, en la intersección $U_i \cap U_j$ tenemos que

$$\begin{tikzcd} (x, s_j(x)) \arrow[rr, bend right, "g_{ij}(x)"'] & s(x) \arrow[l, "\theta_j"'] \arrow[r, "\theta_i"] & (x, s_i(x)) \end{tikzcd}$$

de donde deducimos que $s_i(x) = g_{ij}(x)s_j(x)$ para todo $x \in U_i \cap U_j$.

La relación fundamental $s_i(x) = g_{ij}(x)s_j(x)$ implica que:

1. Si $L \cong X \times \mathbb{A}^1$ fibrado en rectas trivial en X, con $g_{ij} = 1$. Entonces, $\mathrm{H}^0(X, L) \cong \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ se identifica a las secciones globales de $\mathscr{O}_X$.
2. De manera similar, si $E \cong X \times \mathbb{A}^r$ entonces $\mathrm{H}^0(X, E) \cong \Gamma(X, \mathscr{O}_X)^{\oplus r}$.

Las secciones de fibrados en rectas **generalizan** el concepto de función regular. En general, pueden haber **muchas** más secciones que funciones.

Ejercicio: Sea $f : Y \to X$ regular y $E \xrightarrow{p} X$ un fibrado vectorial. Probar que

$$\Gamma(f) : \mathrm{H}^0(X, E) \longrightarrow \mathrm{H}^0(Y, f^*E), \; s \longmapsto \Gamma(f)(s)$$
$$y \mapsto (\Gamma(f)(s))(y) := (y, s(f(y)))$$

está bien definida y es k-lineal.

$\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \simeq k[x_0, \dots, x_n]_d$

Sea $d \in \mathbb{Z}$ y sea $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d) \to \mathbb{P}^n$ definido por $g_{ij}(x) = \left(\frac{x_j}{x_i}\right)^d$.

Sea $s_i \in \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(U_i)$ regular en $U_i \overset{\text{def}}{=} \{x_i \neq 0\} \cong \mathbb{A}^n$, el abierto estándar con coordenadas $\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}$. Así, $s_i = \frac{P_i}{x_i^{m_i}}$ donde P_i polinomio homogéneo de grado m_i. Luego, $s_i = g_{ij} s_j$ en $U_i \cap U_j$ si y sólamente si

$$\frac{P_i}{x_i^{m_i}} = \frac{x_j^d P_j}{x_i^d x_j^{m_j}}, \text{ i.e., } P_i x_i^{d-m_i} = P_j x_j^{d-m_j}.$$

Luego, si $d \geq 0$ entonces $P := P_i x_i^{d-m_i}$ polinomio homogéneo de grado d tal que $s_i = \frac{P}{x_i^d}$ para todo $i \in \{0, \dots, n\}$. Así, hay un isomorfismo

$$k[x_0, \dots, x_n]_d \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)),\ P \longmapsto \left\{ s_i = \frac{P}{x_i^d} \right\}_{i=0,\dots,n}$$

entre polinomios homogéneos de grado d y las secciones globales de $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$.

Del mismo modo, $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = \{0\}$ si $d < 0$ (Ejercicio).

Sean $E \to X$ y $F \to X$ fibrados dados por matrices de transición g_{ij} y h_{ij}, respectivamente. Dadas $s \in \mathrm{H}^0(X, E)$ y $t \in \mathrm{H}^0(X, F)$ definidas por $s_i = g_{ij} s_j$ y $t_i = h_{ij} t_j$, entonces

$$s_i \otimes t_i = (g_{ij} s_j) \otimes (h_{ij} t_j) \stackrel{\text{def}}{=} (g_{ij} \otimes h_{ij})(s_j \otimes t_j),$$

por lo que obtenemos una sección $s \otimes t \in \mathrm{H}^0(X, E \otimes F)$.

En general $(s, t) \mapsto s \otimes t$ no es inyectiva ni sobreyectiva. E.g. si $X = \mathbb{P}^n$, $E = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ y $F = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$, entonces $E \otimes F \cong k_X$. En particular,

$$\mathrm{H}^0(X, E \otimes F) \cong \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}) \cong k \neq \mathrm{H}^0(X, E) \otimes_k \mathrm{H}^0(X, F) = \{0\}.$$

Ejercicio* **(fórmula de Künneth)**: Probar que

$$\mathrm{H}^0(X, E) \otimes_k \mathrm{H}^0(Y, F) \cong \mathrm{H}^0(X \times Y, E \boxtimes F),$$

con $E \boxtimes F := \mathrm{pr}_X^*(E) \otimes \mathrm{pr}_Y^*(F)$ el **producto tensorial exterior** de E y F.

Criterio de trivialidad para $L \in \operatorname{Pic}(X)$

Sea $L \in \operatorname{Pic}(X)$. Entonces, L es **trivial** (i.e., $L \cong X \times \mathbb{A}^1$) si y sólo si $\exists s \in \mathrm{H}^0(X, L)$ *que no se anula nunca*, i.e., $s(x) \neq 0$ en $L_x \cong k\ \forall x \in X$.

En efecto, en tal caso podemos trivializar L **globalmente** usando s:

$$\begin{tikzcd}
(x,t) \arrow[rr, mapsto] & & ts(x) \\
X \times \mathbb{A}^1 \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & & L \arrow[dl, "p"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Caso particular importante: Sea X variedad irreducible con $\Gamma(X, \mathscr{O}_X) \cong k$ (e.g. proyectiva). En tal caso, si $L \to X$ es un fibrado en rectas tal que

1. $\exists s \in \mathrm{H}^0(X, L) \smallsetminus \{0\}$ (i.e., $\exists x_0 \in X$ tal que $s(x_0) \neq 0$).
2. $\exists t \in \mathrm{H}^0(X, L^\vee) \smallsetminus \{0\}$ (i.e., $\exists x_1 \in X$ tal que $t(x_1) \neq 0$).

Entonces, $L \cong k_X$ es el fibrado en rectas trivial.

En efecto, $\mathrm{H}^0(X, L) \otimes_k \mathrm{H}^0(X, L^\vee) \longrightarrow \mathrm{H}^0(X, L \otimes L^\vee) \cong \Gamma(X, \mathscr{O}_X) \cong k$ define $\sigma(x) := s(x) \otimes t(x) \overset{\text{def}}{=} s(x)t(x)$ sección constante nunca nula. $\square$

Construcción: Sea $E \xrightarrow{p} X$ un fibrado vectorial de rango r. Definimos el **haz de secciones** de E asociando a cada $U \subseteq X$ abierto no-vacío

$$\mathscr{E}(U) := \mathrm{H}^0(U, E|_U) \overset{\text{def}}{=} \{s : U \to E|_U \text{ morfismo regular tal que } p \circ s = \mathrm{Id}_U\}.$$

Como $\mathscr{E}(U)$ es un $\Gamma(U, \mathscr{O}_U) \overset{\text{def}}{=} \mathscr{O}_X(U)$-módulo, el haz $\mathscr{E}$ es un $\mathscr{O}_X$-módulo.

Más aún, las trivializaciones

$$\theta_i : E|_{U_i} \xrightarrow{\sim} U_i \times \mathbb{A}^r$$

inducen isomorfismos de $\mathscr{O}_{U_i}$-módulos $\mathscr{E}|_{U_i} \cong \mathscr{O}_{U_i}^{\oplus r}$, i.e., $\mathscr{E}$ es un $\mathscr{O}_X$-módulo **localmente libre** de rango r (ver Clase 3).

En particular, si $L \to X$ es un fibrado en rectas, entonces su haz de secciones $\mathscr{L}$ es un **haz invertible** (i.e., un $\mathscr{O}_X$-módulo localmente libre de rango 1).

Ejemplo importante: Si $L = k_X \overset{\text{def}}{=} X \times \mathbb{A}^1$ es el fibrado en rectas **trivial**. Entonces, por definición $\mathscr{L} \cong \mathscr{O}_X$.

En todo lo que sigue del curso, $\mathscr{O}_X$ denota el haz de funciones regulares o bien el fibrado en rectas trivial $X \times \mathbb{A}^1$ (dependiendo del contexto).

Sea X variedad algebraica conexa (e.g. irreducible). Entonces la aplicación $E \mapsto \mathscr{E}$ define (módulo isomorfismo) una equivalencia entre $\mathbf{Vect}(X)$ y la categoría de $\mathscr{O}_X$-módulos localmente libres de rango finito.

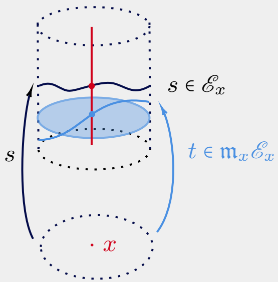
En efecto, dado $\mathscr{E}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo localmente libre de rango r, y un cubrimiento abierto $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ tal que $\varphi_i : \mathscr{E}|_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_{U_i}^{\oplus r}$ es un isomorfismo de $\mathscr{O}_{U_i}$-módulos, entonces en $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ tenemos

$$\begin{tikzcd} \mathscr{O}_{U_i\cap U_j}^{\oplus r} = (\mathscr{O}_{U_j}^{\oplus r})|_{U_i\cap U_j} \arrow[r, "\varphi_j^{-1}", "\sim"'] \arrow[rr, bend right, "g_{ij}"'] & \mathscr{E}|_{U_i\cap U_j} \arrow[r, "\varphi_i", "\sim"'] & (\mathscr{O}_{U_i}^{\oplus r})|_{U_i\cap U_j} = \mathscr{O}_{U_i\cap U_j}^{\oplus r} \end{tikzcd}$$

donde las $g_{ij} \overset{\text{def}}{=} \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \in \mathrm{GL}_r(\mathscr{O}_{U_i\cap U_j})$ verifican claramente la condición de cociclo $g_{ij}g_{jk} = g_{ik}$ en $U_i \cap U_j \cap U_k$.

Así, podemos definir un fibrado $E \to X$ a partir de las matrices de transición $g_{ij}(x)$, y por construcción el haz de secciones de E es isomorfo a $\mathscr{E}$. □

Sea $E \to X$ un fibrado vectorial, y sea $\mathscr{E}$ el haz de secciones asociado.



Para $x \in X$, sea $\mathfrak{m}_x\mathscr{E}_x \subseteq \mathscr{E}_x$ el ideal de gérmenes de secciones que se anulan en $x \in X$. Entonces, tenemos una aplicación k-lineal sobreyectiva

$$\mathrm{ev}_x : \mathscr{E}_x \twoheadrightarrow E_x,\ s \longmapsto s(x)$$

con $\ker(\mathrm{ev}_x) \overset{\text{def}}{=} \mathfrak{m}_x\mathscr{E}_x$, de donde deducimos que

$$\mathscr{E}_x/\mathfrak{m}_x\mathscr{E}_x \cong E_x \text{ para todo } x \in X.$$