Geometría Algebraica

Clase 14

Pedro Montero

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

13 de Septiembre de 2023

§2.15 Normalización y Teorema principal de Zariski

Si $\varphi : A \to B$ morfismo de anillos, $x \in B$ es **entero sobre** A (resp. a φ) si:

1. $\exists$ relación *mónica* $x^n + \varphi(a_1)x^{n-1} + \cdots + \varphi(a_{n-1})x + \varphi(a_n) = 0$, i.e.,
2. $A[x] \subseteq B$ es un A-módulo finitamente generado.

Así, si $x, y \in B$ enteros sobre A entonces $x \pm y$, xy también (por 2). Luego,

$\overline{A} := \{b \in B,\ b$ es entero sobre $A\} \subseteq B$ es una A-álgebra,

llamada la **clausura integral** de A en B. Decimos que A es **integralmente cerrado** en B si $\overline{A} = \varphi(A)$ (i.e., "$\overline{A} = A$" si φ inyectivo). Explícitamente,

Todo $b \in B$ entero sobre A verifica $b = \varphi(a)$ para cierto $a \in A$.

(a) Sea B una A-álgebra y C una B-álgebra (e.g. $A \subseteq B \subseteq C$). Si $x \in C$:
 (i) Si $x \in C$ es entero sobre A, entonces $x \in C$ es entero sobre B.
 (ii) Si B es A-módulo f. g. y $x \in C$ entero sobre B, $x \in C$ entero sobre A.

(b) Tenemos que $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.

Ejemplos:

1. El anillo $\mathbb{Z}$ es integralmente cerrado sobre $\mathbb{Q}$.
2. Más generalmente, si K es un *cuerpo de números* (i.e., una extensión finita $\mathbb{Q}$) entonces $\overline{\mathbb{Z}} := \mathscr{O}_K$ es el **anillo de enteros** del cuerpo K.
3. En la curva nodal

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 \text{ tal que } y^2 = x^2 + x^3\},$$

la función racional $t := \frac{y}{x} \in k(X)$ es entera sobre $\mathscr{O}(X)$, ya que $t^2 \overset{\text{def}}{=} 1 + x$, pero $t \notin \mathscr{O}(X)$.

Definición (Zariski, 1939)

Sea A **dominio entero** y $\mathrm{Fr}(A)$ su cuerpo de fracciones. La clausura integral $\overline{A}$ en $\mathrm{Fr}(A)$ es llamada la **normalización** de A, denotada A^ν.

Diremos que A es un **anillo normal** si $A = A^\nu$, i.e., todo $x \in \mathrm{Fr}(A)$ entero sobre A *pertenece a* A.

La definición anterior se geometriza naturalmente:

Sea X variedad algebraica **irreducible**. Decimos que $x \in X$ es un **punto normal** si el anillo local $\mathscr{O}_{X,x}$ es normal (i.e., si $\mathscr{O}_{X,x}$ es integralmente cerrado en $k(X)$). Decimos que X es **normal** si todo $x \in X$ es normal.

Sea X variedad algebraica **afín** e irreducible. Entonces,

$$X \text{ es normal} \Leftrightarrow \mathscr{O}(X) \text{ es integralmente cerrado en } k(X).$$

($\Leftarrow$) Sea $u \in k(X)$ tal que para *cierto* $x \in X$ existen $a_i \in \mathscr{O}_{X,x}$ con

$$u^n + a_1 u^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \text{ en } k(X).$$

Si $a_i = \frac{p_i}{q_i}$ con $p_i, q_i \in \mathscr{O}(X)$ y $q_i(x) \neq 0$, entonces $v := uq_1 \cdots q_n$ es entero sobre $\mathscr{O}(X)$, y así $v \in \mathscr{O}(X)$. Luego, $u \overset{\text{def}}{=} \frac{v}{q_1 \cdots q_n} \in \mathscr{O}_{X,x}$ ya que $q_i(x) \neq 0\ \forall i$.

($\Rightarrow$) Sea $u \in k(X)$ tal que existen $a_i \in \mathscr{O}(X)$ con

$$u^n + a_1 u^{n-1} + \cdots + a_n = 0.$$

Como $a_i \in \mathscr{O}_{X,x}\ \forall x \in X$, tenemos que $u \in \mathscr{O}_{X,x}\ \forall x \in X$. En otras palabras, $u \in \bigcap_{x \in X} \mathscr{O}_{X,x} \overset{\text{def}}{=} \mathscr{O}(X)$ es regular. □

Ejemplo: La curva nodal $X = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2,\ y^2 = x^2 + x^3\}$ **no** es normal, pues $t := \frac{y}{x} \in k(X)$ es entero pero no regular.

Sea X una variedad algebraica irreducible. Entonces,

Si $x \in X_{\text{reg}}$ es un punto **suave**, entonces $x \in X$ es **normal**.

En efecto, basta asumir X afín y consider $u \in k(X) \cong \mathrm{Fr}(\mathscr{O}(X))$ tal que

$$u^n + a_1 u^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

con $a_i \in \mathscr{O}_{X,x}$. Dado que $\mathscr{O}_{X,x}$ es un **anillo factorial** (Nagata), podemos escribir $u = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathscr{O}_{X,x}$ relativamente primos. Luego,

$$p^n + a_1 p^{n-1} q + \cdots + a_n q^n = 0$$

por lo que q divide a p^n, y luego q es una unidad (dado que p y q son relativamente primos), i.e., $q(x) \neq 0$. Así, $u \overset{\text{def}}{=} \frac{p}{q}$ pertenece a $\mathscr{O}_{X,x}$. $\square$

Sea X variedad irreducible **normal** y sea $Y \subseteq X$ sub-variedad cerrada de codimensión pura 1. Entonces, existe $U \subseteq X$ abierto afín con $U \cap Y \neq \varnothing$ y $f : U \to k$ regular tal que $\mathcal{I}(U \cap Y) = \langle f \rangle$.

Notar que no podemos considerar $U := X_{\mathrm{reg}}$ y aplicar el resultado en el caso suave (consecuencia de Nagata), pues podría ocurrir que $Y \subseteq X_{\mathrm{sing}}$.

Supongamos X afín e $Y = V(\mathfrak{p})$ irreducible, donde $\mathfrak{p} \subseteq \mathscr{O}(X)$ ideal primo. Sea $g \in \mathfrak{p}$ no-nulo, con $Y \subseteq V(g)$ y luego $Y = V(g)$ (Krull). Entonces,

$$\mathcal{I}(Y) = \sqrt{\langle g \rangle}, \text{ i.e., } \mathcal{I}(Y)^{\ell} \subseteq \langle g \rangle \subseteq \mathcal{I}(Y) \quad \text{(Nullstellensatz)}$$

para cierto $\ell \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ minimal. Veamos que *localmente* $\ell = 1$:

Supongamos $\ell \geq 2$ y sean $u_1, \ldots, u_{\ell-1} \in \mathcal{I}(Y)$ tales que $h := u_1 \cdots u_{\ell-1} \notin \langle g \rangle$ pero $ah \in \langle g \rangle$ para todo $a \in \mathcal{I}(Y)$. Así, la función racional $u := \frac{h}{g} \notin \mathscr{O}(X)$ no es regular, pero $u\mathcal{I}(Y) \subseteq \mathscr{O}(X)$.

Notar que $u\mathcal{I}(Y) \nsubseteq \mathcal{I}(Y)$, pues en caso contrario existirían generadores $p_1, \ldots, p_N \in \mathcal{I}(Y)$ de $\mathcal{I}(Y)$ tales que $up_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} p_j$ con $a_{ij} \in \mathscr{O}(X)$. Matricialmente, esto último equivale a

$$(u\,\mathrm{I}_N - (a_{ij})_{i,j}) \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \end{pmatrix} = 0, \text{ de donde deducimos } \det(u\,\mathrm{I}_N - (a_{ij})_{i,j}) = 0.$$

Esta ecuación *mónica* implica $u \in \mathscr{O}(X)$ (X normal), lo cual es imposible.

Luego, existe $f \in \mathcal{I}(Y)$ tal que $s := fu \notin \mathcal{I}(Y)$, i.e., $Y \nsubseteq V(s) \subseteq X$. Así, el abierto siguiente intersecta Y

$$U := \{x \in X \text{ tal que } s(x) \neq 0\}$$

y se tiene $f^{-1}\mathcal{I}(Y) \stackrel{\text{def}}{=} s^{-1}u\mathcal{I}(Y) \subseteq \mathscr{O}(U)$, i.e., $\mathcal{I}(U \cap Y) = \langle f \rangle$. $\square$

Sea X variedad irreducible **normal**. Entonces, $\operatorname{codim}_X \operatorname{Sing}(X) \geq 2$.

Supongamos que $Y \subseteq \operatorname{Sing}(X)$ componente irreducible de codimensión 1. Luego, podemos suponer X afín y $\mathcal{I}(Y) = \langle f \rangle$. Así, para $y \in Y$ tenemos

$$\begin{tikzcd} \mathscr{O}_{X,y} \arrow[r, two heads] & \mathscr{O}_{Y,y} = \mathscr{O}_{X,y}/\langle f \rangle \\ \mathfrak{m}_{X,y} \arrow[r, two heads] \arrow[u, hook] & \mathfrak{m}_{Y,y} = \mathfrak{m}_{X,y}/\langle f \rangle \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Sea $y \in Y_{\text{reg}}$ suave, y supongamos que $y \in \operatorname{Sing}(X)$. Notar que si $\mathfrak{m}_{Y,y}$ está generado por $v_1, \ldots, v_{n-1}$ (coord. locales en Y) entonces $\mathfrak{m}_{X,y}$ está generado por $v_1, \ldots, v_{n-1}, f$. En particular,

$$\dim_k(T_y X) = \dim_k(\mathfrak{m}_{X,y}/\mathfrak{m}_{X,y}^2) \leq n \overset{\text{def}}{=} \dim_y(X),$$

i.e., $y \in Y$ es suave en X, una contradicción. □

Si C curva algebraica irreducible, entonces C es suave $\Leftrightarrow$ C es normal.

Sea X variedad **afín** irreducible, y consideramos la clausura integral

$$\mathscr{O}(X) \subseteq A \subseteq k(X) \text{ con } A := \overline{\mathscr{O}(X)}.$$

Aquí, A es una k-álgebra finitamente generada y reducida. Definimos

$$X^\nu := \mathrm{Specm}(A), \text{ que cumple } \mathscr{O}(X^\nu) \cong A.$$

La inclusión $\mathscr{O}(X) \subseteq \mathscr{O}(X^\nu)$ induce $\nu : X^\nu \to X$ regular sobreyectivo, la **normalización** de X. Las propiedades de la clausura integral implican:

1. X^ν es normal y $\nu : X^\nu \to X$ es un isomorfismo en una vecindad de cada punto normal $x \in X$ (cf. resolución de singularidades).
2. $\nu : X^\nu \to X$ morfismo finito y birracional, pues $\mathrm{Fr}(A) = k(X)$.
3. Si $g : Y \to X$ finito y birracional con Y irreducible, $k(X) \cong k(Y)$ y

$$\mathscr{O}(X) \subseteq \mathscr{O}(Y) \subseteq k(Y) \cong k(X),$$

con $\mathscr{O}(Y)$ entero sobre $\mathscr{O}(X)$, y así $\mathscr{O}(Y) \subseteq \overline{\mathscr{O}(X)} \overset{\text{def}}{=} \mathscr{O}(X^\nu)$, de donde se obtiene $\widehat{g} : X^\nu \to Y$. En resumen, se tiene:

Para todo $g : Y \to X$ finito birracional con Y irreducible,
$\exists!\, \widehat{g} : X^\nu \to Y$ tal que $g \circ \widehat{g} = \nu$, i.e., g *factoriza a la normalización*.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "g"] & & X \\ & X^\nu \arrow[ul, "\exists!\, \widehat{g}"] \arrow[ur, "\nu"'] & \end{tikzcd}$$

4. Si $h : Z \to X$ dominante con Z afín irreducible **normal**, entonces $u \in \mathscr{O}(X^\nu)$ es entero sobre $\mathscr{O}(X) \subseteq k(X) \subseteq k(Z)$ (via h^*).

$$\begin{tikzcd} \mathscr{O}(X) \subseteq \mathscr{O}(X^\nu) \subseteq k(X) \arrow[r, hook, "h^*"] \arrow[dr, hook] & k(Z) \\ & \mathscr{O}(Z) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Como $\mathscr{O}(X) \subseteq \mathscr{O}(Z)$ via h^*, a posteriori u es entero sobre $\mathscr{O}(Z)$ y, como $\mathscr{O}(Z)$ es integralmente cerrado, $u \in \mathscr{O}(Z)$, i.e., $\mathscr{O}(X^\nu) \subseteq \mathscr{O}(Z)$, de donde se obtiene $\widehat{h} : Z \to X^\nu$. En resumen, se tiene:

Para todo $h : Z \to X$ dominante con Z afín irreducible **normal**, $\exists!\, \widehat{h} : Z \to X^\nu$ tal que $g = \nu \circ \widehat{h}$, i.e., h *se factoriza por la normalización*.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\exists!\, \widehat{h}"'] & & X \\ & X^\nu \arrow[ur, "\nu"'] & \end{tikzcd}$$

Todo lo implica que X^ν es **única** (salvo isomorfismo) para X afín. En efecto, si $\nu_1 : X_1^\nu \to X$ y $\nu_2 : X_2^\nu \to X$ son dos normalizaciones de X, entonces existe un isomorfismo $\varphi : X_1^\nu \xrightarrow{\sim} X_2^\nu$ tal que el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{tikzcd} X_1^\nu \arrow[rr, "\sim", "\varphi"'] \arrow[dr, "\nu_1"'] & & X_2^\nu \arrow[dl, "\nu_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Toda variedad irreducible X posee una *única* normalización $\nu : X^\nu \to X$, obtenida al considerar un atlas afín de X y pegar las normalizaciones.

Teorema Principal de Zariski (1943)

Sean X e Y variedades irreducibles y $f : X \to Y$ morfismo **birracional**. Sea $x \in X$ tal que $y = f(x)$ es un punto **normal** en Y. Entonces:

1. f es un isomorfismo entre vecindades afines de $x \in X$ e $y \in Y$, o bien
2. $\exists$ hipersuperficie irreducible $x \in E \subseteq X$ tal que $\operatorname{codim}_Y(\overline{f(E)}) \geq 2$.

En particular, en el caso (2) se tiene $\dim_x f^{-1}(y) \geq 1$.

Si $f : X \to Y$ morfismo birracional donde el conjunto de puntos

$$Z := \{x \in X \text{ tal que } \dim_x(f^{-1}(f(x))) \geq 1\}$$

no es una hipersuperficie, entonces $f(Z) \subseteq Y$ está contenido en el lugar de puntos **no-normales** de Y (!). E.g. si $\dim(X) = \dim(Y) = 3$ y f **no** es un isomorfismo en $C \subseteq X$ curva irred., entonces $f(C) = \{y_0\}$ **no** es normal.

Prueba cuando $y \in Y_{\mathrm{reg}}$: Podemos suponer X e Y afines, y sean $u_1, \ldots, u_N \in \mathscr{O}(X)$ generadores (definiendo $X \subseteq \mathbb{A}^N$). Recordemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{O}(Y) \arrow[r, hook, "f^*"] \arrow[d, hook] & \mathscr{O}(X) \arrow[d, hook] \\
\mathscr{O}_{Y,y} \arrow[r, hook, "f^*"] \arrow[d, hook] & \mathscr{O}_{X,x} \arrow[d, hook] \\
k(Y) \arrow[r, "f^*", "\cong"'] & k(X)
\end{tikzcd}$$

Podemos ver las u_i como funciones racionales y $u_i = f^*(v_i) = f^*\left(\frac{a_i}{b_i}\right)$ para $a_i, b_i \in \mathscr{O}(Y)$. Más aún, dado que $y \in Y$ es un punto **suave** tenemos que $\mathscr{O}_{Y,y}$ es factorial (Nagata), y luego asumimos a_i y b_i relativamente primos.

Caso (1). Si $b_i(y) \neq 0$ para todo i, obtenemos una inclusión

$$\varphi : \mathscr{O}(Y)_{b_1 \cdots b_N} \cong \mathscr{O}(V) \xrightarrow{f^*} \mathscr{O}(X)_{f^*(b_1 \cdots b_N)} \cong \mathscr{O}(U),$$

donde $V = \{y \in Y$ tal que $(b_1 \cdots b_N)(y) \neq 0\}$ y donde $U \overset{\text{def}}{=} f^{-1}(V)$.

En este caso tenemos que $U \cong V$. En efecto, podemos escribir

$$u_i \overset{\text{def}}{=} \frac{f^*(a_i)}{f^*(b_i)} = \frac{f^*(a_i) \prod_{j \neq i} f^*(b_j)}{f^*(b_1 \cdots b_N)},$$

por lo que u_i está en la imagen de f^*, i.e., φ es sobreyectivo.

Caso (2). Supongamos $b_1(y) = 0$. En el anillo factorial $\mathscr{O}_{Y,y}$, escribimos $b_1 = c_1 d_1$ con c_1 irreducible y tal que $c_1(y) = 0$.

En $\mathscr{O}_{Y,y}$, $a_1 = \frac{a_1'}{a_1''}$ y $c_1 = \frac{c_1'}{c_1''}$ con $a_1''(y)c_1''(y) \neq 0$. Si nos restringimos a los abiertos afines donde $a_1'' \neq 0$, $c_1'' \neq 0$, $f^*(a_1'') \neq 0$, $f^*(c_1'') \neq 0$ podemos suponer que $a_1, c_1 \in \mathscr{O}(Y)$ y $f^*(a_1), f^*(c_1) \in \mathscr{O}(X)$ regulares.

Consideremos la hipersuperficie $E := V(f^*(c_1)) \subseteq X$ y notar que $x \in E$ pues $f^*(c_1)(x) \overset{\text{def}}{=} c_1(f(x)) \overset{\text{def}}{=} c_1(y) = 0$. Restringiéndose a una comp. irreducible de E que pase por x podemos suponer E irreducible.

Notar que $f^*(a_1) \overset{\text{def}}{=} f^*(b_1)u_1 \overset{\text{def}}{=} f^*(c_1)f^*(d_1)u_1$, y luego a_1 se anula en $\overline{f(E)}$. Finalmente, dado que a_1 y c_1 son relativamente primos entre sí en $\mathscr{O}_{Y,y}$ (i.e., determinan ecuaciones locales independientes), tenemos que

$$\overline{f(E)} \subsetneq V(c_1) \subsetneq Y$$

y luego $\operatorname{codim}_Y(\overline{f(E)}) \geq 2$. $\square$

En 1957, Zariski extiende parte del resultado anterior.

Teorema de Conexidad de Zariski

Sean X e Y variedades irreducibles y $f : X \to Y$ morfismo **dominante**. Si X es **proyectiva** y las fibras *generales* de f son **conexas**, entonces:

Para todo punto **normal** $y \in Y$, la fibra $f^{-1}(y)$ es conexa.

En el caso en que f es **birracional**, las fibras *generales* son singletons (luego conexos). Luego, fibras sobre puntos normales consisten en:

1. Singletons (caso (1)), o bien
2. Sub-variedades con comp. irreducibles de dimensión ≥ 1 (caso (2)).

Factorización de Stein

Otra consecuencia **muy útil** para factorizar morfismos regulares $f : X \to Y$ desde X proyectiva normal en $f' : X \to Y'$ con Y' proyectiva normal:

Teorema (Factorización de Stein, 1956)

Sean X e Y **proyectivas** irreducibles y $f : X \to Y$ regular. Entonces,

$$f : X \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g} Y$$

con Y' **proyectiva** irreducible, $f : X \to Y'$ tiene fibras *conexas* y $g : Y' \to Y$ morfismo *finito*. Más aún, si X es normal entonces Y' es normal.

En particular, todo morfismo regular no-constante entre **curvas** algebraicas irreducibles proyectivas $f : X \to Y$ se factoriza en un morfismo *biyectivo* $f' : X \to Y'$ y un morfismo *finito* $g : Y' \to Y$.

Si $\mathrm{car}(k) = p > 0$, el morfismo biyectivo f' puede **no** ser un isomorfismo. Por ejemplo, $f' : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$, $[x, y] \mapsto [x^p, y^p]$.