Geometría Algebraica

Clase 13

Pedro Montero

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

11 de Septiembre de 2023

§2.13 Espacio tangente de Zariski, variedades suaves y singulares

Sea $x \in X$ punto suave, $n := \dim_x(X)$. Decimos que $u_1, \dots, u_n \in \mathscr{O}_{X,x}$ son **coordenadas locales** en $x \in X$ si sus imágenes[1] en el cociente $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ son linealmente independientes.

Equivalentemente, si definimos el **espacio cotangente** de $x \in X$ como

$$\Omega^1_{X,x} := (T_x X)^\vee,$$

$u_1, \dots, u_n \in \mathscr{O}_{X,x}$ son coordenadas locales si sus diferenciales $d_x u_1, \dots, d_x u_n$ son linealmente independientes en $\Omega^1_{X,x}$ (i.e., forman una base).

Más aún, si $\varnothing \neq U \subseteq X_{\mathrm{reg}}$ abierto afín de puntos suaves y $u_1, \dots, u_n \in \mathscr{O}(U)$ son funciones regulares, entonces decimos que $u_1, \dots, u_n$ son **coordenadas** (o parámetros) **locales en el abierto** U si las imágenes de las funciones $u_1, \dots, u_n$ en $\mathscr{O}_{X,x}$ son coordenadas locales para todo $x \in U$.

[1] Recordar que si $f \in \mathscr{O}_{X,x}$ entonces $f_0 := f - f(x) \in \mathfrak{m}_x$ es su imagen en $\mathfrak{m}_x$.

Sea X variedad irreducible, $\dim(X) = n$, y $U \subseteq X_{\mathrm{reg}}$ abierto afín. Si $u_1, \dots, u_n \in \mathscr{O}(U)$ son coordenadas locales, $\forall m \in \{1, \dots, n\}$ la subvariedad $Z_m = \{x \in U,\ u_1(x) = \cdots = u_m(x) = 0\} \subseteq U$ es **suave** de $\dim(Z_m) = n - m$.

Prueba: El espacio tangente de $Z_1 = \{u_1 = 0\}$ (hipersuperficie) es $T_x Z_1 = \ker(d_x u_1)$, un sub-e.v. de dimensión $n-1$ en $T_x X$. Así, Z_1 es suave pues $\dim_x(Z_1) = n-1$ $\forall x \in U$ (Krull). Las $u_2|_{Z_1}, \dots, u_n|_{Z_1}$ son coordenadas locales en Z_1, por lo que el resultado se obtiene por inducción. $\square$

Recuerdo (variedades suaves son localmente intersección completa)

Si X variedad suave e irreducible de $\dim(X) = n$ y $Z \subseteq X$ subvariedad cerrada suave e irreducible de $\operatorname{codim}_X(Z) = r$ (i.e., $\dim(Z) = n - r$),

$$Z \underset{\text{loc}}{=} V(u_1, \dots, u_r)$$

para ciertas coordenadas locales $u_1, \dots, u_n$ en un abierto afín $U \subseteq X$.

Sea X variedad algebraica suave irreducible de $\dim(X) = n$, y $Z \subseteq X$ subvariedad cerrada suave irreducible de $\operatorname{codim}_X(Z) = r$, con $Z \underset{\text{loc}}{=} V(u_1, \ldots, u_r)$ en coordenadas locales $u_1, \ldots, u_n$ en un abierto afín $U \subseteq X$.

El **blow-up** de U (afín) a lo largo de la intersección completa $Z \cap U$ es la subvariedad de $U \times \mathbb{P}^{r-1}$ dada por

$$\widetilde{U} = \{(x, y) \in U \times \mathbb{P}^{r-1},\ u_i(x) y_j = u_j(x) y_j \text{ para todos } i, j = 1, \ldots, r\}$$

y donde la primera proyección $\varepsilon_U : \widetilde{U} \longrightarrow U$ es un morfismo birracional.

Usando lo visto hasta ahora (Ejercicio) se prueba que $\widetilde{U}$ y el conjunto excepcional $E_U := \varepsilon_U^{-1}(Z \cap U)$ son suave e irreducibles, con $\dim(E_U) = n - 1$.

Si $V(v_1, \ldots, v_r)$ son otras ecuaciones locales de Z en $V \subseteq X$ abierto afín,

$$\widetilde{U}|_{\varepsilon_U^{-1}(U \cap V)} \cong \widetilde{V}|_{\varepsilon_V^{-1}(U \cap V)}.$$

Luego, obtenemos un *atlas algebraico* que nos permite definir **globalmente**

$$\varepsilon : \mathrm{Bl}_Z(X) \longrightarrow X,$$

el **blow-up de X a lo largo de Z**. Más aún, $E := \mathrm{Exc}(\varepsilon) := \varepsilon^{-1}(Z)$ es la **hipersuperficie excepcional**[2] que cumple:

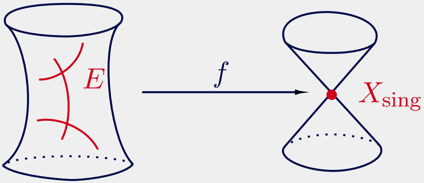
1. $\mathrm{Bl}_Z(X) \setminus E \cong X \setminus Z$ y además $\varepsilon^{-1}(x) \cong \mathbb{P}^{r-1}$ para todo $x \in Z$.
2. $E_U \underset{\text{loc}}{=} (Z \cap U) \times \mathbb{P}^{r-1}$ (pero **no** globalmente, en general).

[2] Más adelante, cuando estemos más maduros, lo llamaremos **divisor excepcional**.

Cultura general

Sea X variedad algebraica proyectiva irreducible. Una **resolución de singularidades** de X es un morfismo birracional $f : Y \longrightarrow X$ tal que:

1. Y es una variedad algebraica proyectiva **suave** e irreducible.
2. $f^{-1}(X_{\text{reg}}) \xrightarrow{\sim} X_{\text{reg}}$ es un isomorfismo.
3. $E := f^{-1}(X_{\text{sing}})$ es una hipersuperficie con "simple normal crossings" (SNC), i.e., si $E = E_1 \cup \cdots \cup E_r$ componentes irreducibles de E, cada E_i es una hipersuperficie **suave** de Y y cada $y \in E$ posee coord. locales $(u_1, \ldots, u_n)$ tales que $E \underset{\text{loc}}{=} \{u_1 \cdots u_k = 0\}$ para cierto $k \leq n$.



Teorema (Hironaka, 1964)

Si $\mathrm{car}(k) = 0$ **toda** variedad proyectiva posee resolución de singularidades.

Figure: Heisuke Hironaka (medalla Fields, 1970) en Talca, 2019.

Si $\mathrm{car}(k) = p > 0$, hoy en día sabemos que toda variedad proyectiva de dimensión ≤ 3 admite una resolución de singularidades, gracias a los trabajos de Abhyankar (1956, 1966) y de Cossart y Piltant (2008, 2009).

§2.14 Morfismos suaves y Teorema de Bertini

Regla de la cadena y $\mathrm{rg}(d_x f)$

Si $f : X \to Y$ regular y $x \in X$, el pullback $f^* : \mathscr{O}_{Y,y} \longrightarrow \mathscr{O}_{X,x}$, $u \mapsto u \circ f$, donde $y = f(x)$, induce una aplicación k-lineal

$$d_x f : T_x X \longrightarrow T_y Y,\ D \longmapsto D \circ f^*,$$

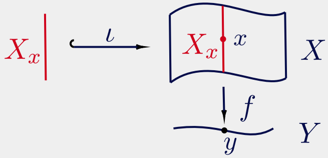
el diferencial de f en $x \in X$. Además, si $g : Y \to Z$ es otro morfismo regular,

$$d_x(g \circ f) = (d_y g) \circ (d_x f) \qquad \textbf{(regla de la cadena)}$$

Ejemplo: Sea $f : X \to Y$ morfismo regular entre variedades suaves irreducibles y $x \in X$. Si consideramos

$$X_x := f^{-1}(f(x)), \text{ i.e., la fibra de } f \text{ que pasa por } x \in X,$$

entonces $X_x \xrightarrow{\iota} X \xrightarrow{f} Y$ la función constante de valor $f(x) \in Y$.



$$0 \overset{\text{def}}{=} d_x(f \circ \iota) = d_x(f) \circ d_x(\iota), \text{ i.e., } \mathrm{Im}(d_x\iota) \subseteq \ker(d_x f : T_x X \longrightarrow T_y Y),$$

donde $d_x\iota : T_x X_x \hookrightarrow T_x X,\ D \mapsto D \circ \iota^*$ es *inyectiva*, y por ende

$$\mathrm{rg}(d_x\iota) \leq \dim_k(\ker d_x f), \text{ i.e., } \dim_k(T_x X_x) \leq \dim(X) - \mathrm{rg}(d_x f).$$

La desigualdad puede ser estricta: si $\mathrm{car}(k) \neq 2$, $p = (x, y, z)$ y

$$f : \mathbb{A}^3 \longrightarrow \mathbb{A}^2,\ (x, y, z) \longmapsto (z, x^2 z + y^2),\ \text{con } J_f(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2xz & 2y & x^2 \end{pmatrix},$$

$d_p f$ es *sobreyectiva* salvo si $xy = y = 0$, en cuyo caso $\mathrm{rg}(d_p f) = 1$.
Por otro lado, la fibra del punto $(a, b) \in \mathbb{A}^2$ es la curva algebraica

$$X_{(a,b)} := V(ax^2 + y^2 - b) \subseteq \mathbb{A}^2 \cong \{z = a\} \subseteq \mathbb{A}^3$$

Por lo que si $b = 0$ entonces $X_{(a,0)}$ es singular (dos rectas) salvo si $a = b = 0$, pues $X_{(0,0)} = V(y^2) = V(y)$ es una recta (**doble**). Así[3],

$$X \longrightarrow \mathbb{N},\ x \longmapsto \dim_k(T_x(X_x)) \ \textbf{no es semi-continua superior}$$

[3] La fibra *conjuntista* no percibe multiplicidades, es mucho mejor la *fibra esquemática*.

Sea $f : X \to Y$ morfismo regular. Entonces,

$$X \longrightarrow \mathbb{N},\ x \longmapsto \dim_k \ker(d_x f) \text{ es } \textbf{semi-continua superior}\text{, i.e.,}$$

para todo $r \in \mathbb{N}$ el conjunto $\{x \in X,\ \dim \ker(d_x f) \geq r\}$ es **cerrado** en X.

Prueba: La afirmación es local, por lo que podemos suponer que $X \subseteq \mathbb{A}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ son afines, con $\mathcal{I}(X) = \langle g_1, \ldots, g_s \rangle$ y $f : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ dado por $f = (f_1, \ldots, f_m)$. El conjunto en cuestión está dado por la condición

$$\dim_k \left(\ker\left(\frac{\partial g_i}{\partial X_j}\right) \cap \ker\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right) \right) \geq r, \text{ i.e., } \operatorname{rg} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial g_i}{\partial X_j}\right) \\ \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right) \end{pmatrix} \leq n - r$$

que es una condición **cerrada** en X. $\square$

Definición (morfismo suave y morfismo étale)

Sean X e Y variedades algebraicas **suaves e irreducibles**. Un morfismo regular $f : X \to Y$ es **suave en** $x \in X$ si el diferencial[a]

$$d_x f : T_x X \twoheadrightarrow T_{f(x)} Y \text{ es sobreyectivo}$$

y que f es un **morfismo suave** si es suave para todo punto $x \in X$.

Un **morfismo étale** es un morfismo suave $f : X \to Y$ de dimensión relativa cero, i.e., tal que $\dim(f^{-1}(y)) = 0$ para todo $y \in Y$.

[a] El conjunto de $x \in X$ donde un morfismo regular $f : X \to Y$ es suave es un *abierto*.

Cultura general

La noción de morfismo suave es el análogo de **submersión** en Geometría Diferencial, y la noción de morfismo étale es la versión algebraica de los revestimientos (o cubrimientos) topológicos.

1. Composición de morfismos suaves (resp. étale) es suave (resp. étale).
2. Si X e Y variedades suaves e irreducibles, las proyecciones

$$\mathrm{pr}_1 : X \times Y \twoheadrightarrow X \text{ y } \mathrm{pr}_2 : X \times Y \twoheadrightarrow Y$$

   son morfismos suaves.
3. Si $f : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$, $x \mapsto x^d$, entonces $f'(x) = dx^{d-1}$. Si $\mathrm{car}(k) = p > 0$ divide a d, entonces f **no es suave en ningún punto**. Si $\mathrm{car}(k)$ **no** divide a d, entonces f es suave para todo $x \neq 0$.
4. La inclusión $\iota : \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \hookrightarrow \mathbb{A}^1$ es un morfismo étale, pero **no** es un morfismo finito (la imagen no es cerrada).

Sea $f : X \to Y$ morfismo suave con X e Y suaves e irreducibles. Entonces:

1. **Toda** fibra no-vacía $f^{-1}(y)$ es de dimensión pura $\dim(X) - \dim(Y)$.
2. $T_x(X_x) \cong \ker(d_x f)$ $\forall x \in X$, con $X_x := f^{-1}(f(x))$.
3. f es un morfismo dominante (i.e., con imagen densa).
4. Si $Z \subseteq Y$ sub-variedad cerrada **suave**, entonces $f^{-1}(Z)$ es suave.

Así, toda fibra no-vacía es suave y de dimensión pura $\dim(X) - \dim(Y)$.

Prueba: Sea $X_x := f^{-1}(f(x))$, donde la composición $X_x \xrightarrow{\iota} X \xrightarrow{f} Y$ cumple

$$\dim_x(X_x) \leq \dim_k(T_x X_x) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{rg}(d_x \iota) \leq \dim_k \ker(d_x f) = \dim(X) - \dim(Y),$$

donde "$=$" se obtiene por el teorema del rango y que $d_x f$ es sobreyectiva. Ya vimos antes que $\dim_x(X_x) \geq \dim(X) - \dim(\overline{f(X)})$, por lo que

$$\dim(X) - \dim(Y) \leq \dim(X) - \dim(\overline{f(X)}) \leq \dim_x(X_x) \leq \dim(X) - \dim(Y),$$

i.e., (1), (2) y (3) se verifican.

Para (4): Sea $Z \subseteq Y$ cerrada suave de $\operatorname{codim}_Y(Z) = r$ y sea $w \in f^{-1}(Z)$. Como $d_w(f|_{f^{-1}(Z)}) : T_w f^{-1}(Z) \to T_{f(w)} Z$ es lineal, por Teorema del rango

$$\dim_k T_w f^{-1}(Z) - \dim_k \ker(d_w f|_{f^{-1}(W)}) = \dim_k (d_w f)(T_w f^{-1}(Z)),$$

con $\dim_k (d_w f)(T_w f^{-1}(Z)) \leq \dim_k T_{f(w)} Z = \dim(Z)$ pues Z es suave. Por otra parte, $\dim_k \ker(d_w f|_{f^{-1}(Z)}) \leq \dim_k \ker(d_w f)$, donde se verifica que $\dim_k \ker(d_w f) = \dim(X) - \dim(Y)$ pues f morfismo suave. Así,

$$\dim_k T_w f^{-1}(Z) \leq \dim(X) - r \qquad (\star).$$

Si $u_1, \ldots, u_r$ coord. locales es una vecindad afín $f(w) \in V \subseteq Y$, tal que $Z \cap V$ irreducible y dado por la intersección completa $Z \cap V = V(u_1, \ldots, u_r)$,

$$f^{-1}(V) \cap f^{-1}(Z) \overset{\text{def}}{=} V(u_1 \circ f, \ldots, u_r \circ f) \text{ en } f^{-1}(V) \subseteq X. \text{ Así,}$$

$$\dim_w(f^{-1}(Z)) \geq \dim(X) - r \qquad (\star\star).$$

Así, las desigualdades $(\star)$ y $(\star\star)$ nos permiten probar (4). $\square$

Durante el resto de la clase, $\mathrm{car}(k) = 0$ (e.g. $k = \mathbb{C}$).

Lema técnico (cf. Lema de Sard)

Sea $f : X \to Y$ regular dominante entre variedades irreducibles. Entonces, $\exists$ abiertos **no-vacíos** suaves $V \subseteq Y_{\mathrm{reg}}$ y $U \subseteq X_{\mathrm{reg}}$ con $U \subseteq f^{-1}(V)$ y con

$$f|_U : U \longrightarrow V \text{ morfismo suave.}$$

Prueba: La afirmación es local, por lo asumimos X e Y afines suaves. Sea $f^* : k(Y) \hookrightarrow k(X)$ extensión de cuerpos y $u_1, \dots, u_{n-m} \in k(X)$ base de trascendencia sobre $k(Y)$. Achicando X, asumimos $u_1, \dots, u_{n-m} \in \mathscr{O}(X)$ y así $\mathscr{O}(Y) \hookrightarrow \mathscr{O}(Y)[u_1, \dots, u_{n-m}] \hookrightarrow \mathscr{O}(X)$, i.e., f se factoriza como

$$f : X \xrightarrow{g} Z := Y \times \mathbb{A}^{n-m} \xrightarrow{\pi} Y.$$

Dado que $f = \pi \circ g$ y que π es suave, basta probar que $g : X \to Z$ es suave:

Como $g^* : k(Z) \hookrightarrow k(X)$ es finita y separable (pues $\mathrm{car}(k) = 0$), existe $t \in k(X)$ tal que $k(X) = k(Z)(t)$ (elemento primitivo) con $P \in k(Z)[T]$ tal que $P(t) = 0$. Achicando Y, asumimos que $P \in \mathscr{O}(Z)[T]$ y así

$$k(X) \cong \mathrm{Fr}(\mathscr{O}(Z)[T]/\langle P \rangle), \text{ i.e., } X \sim_{\mathrm{bir}} V(P) \subseteq Z \times \mathbb{A}^1.$$

Lema técnico (cf. Lema de Sard)

Considerando un abierto denso, podemos asumir $X = V(P) \subseteq Z \times \mathbb{A}^1$ y así

$$g : X = V(P) \xrightarrow{\iota} Z \times \mathbb{A}^1 \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} Z.$$

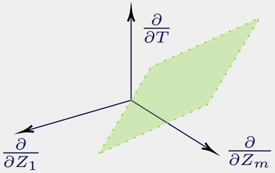
Para concluir, notamos que en el punto $x = (z,t) \in X \subseteq Z \times \mathbb{A}^1$, el espacio tangente $T_x X \subseteq T_z Z \oplus k$ está dado por el kernel de la aplicación lineal

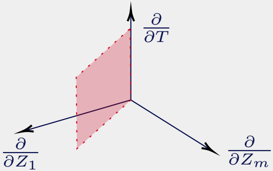
$$\begin{pmatrix} (\frac{\partial P}{\partial Z_i}(x))_i & \frac{\partial P}{\partial T}(x) \end{pmatrix}.$$

Como $d_x g : T_x X \to T_z Z$ está inducida (mediante restricción) por la proyección

$$\mathrm{pr}_1 : T_z Z \oplus k \twoheadrightarrow T_z Z,\ \left(\frac{\partial}{\partial Z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial Z_m}, \frac{\partial}{\partial T}\right) \longmapsto \left(\frac{\partial}{\partial Z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial Z_m}\right),$$

tenemos que g es suave en cualquier punto $x = (z,t)$ tal que $\frac{\partial P}{\partial T}(z,t) \neq 0$, lo cual siempre es posible en $\mathrm{car}(k) = 0$. $\square$





Suavidad genérica (cf. Lema de Sard)

Teorema de suavidad genérica ($\mathrm{car}(k) = 0$)

Sea $f : X \to Y$ dominante entre variedades irreducibles. Para $r \in \mathbb{N}$ sea

$$Z_r := \{x \in X \text{ tal que } \mathrm{rg}(d_x f) \le r\} \subseteq X.$$

Entonces, $\dim(\overline{f(Z_r)}) \le r$. Así, $\exists$ abierto **denso** suave $V \subseteq Y_{\mathrm{reg}}$ tal que

$$f|_{f^{-1}(V) \cap X_{\mathrm{reg}}} : f^{-1}(V) \cap X_{\mathrm{reg}} \longrightarrow V \text{ morfismo suave.}$$

Prueba: Sean $Y' \subseteq \overline{f(Z_r)}$ y $X' \subseteq \overline{Z_r} \cap f^{-1}(Y')$ componentes irred. tal que

$$f_r := f|_{X'} : X' \longrightarrow Y' \text{ sea dominante.}$$

Lema técnico: $\exists$ punto suave $x \in X'$ tal que $f_r(x)$ es suave en Y' y tal que $d_x f_r : T_x X' \twoheadrightarrow T_{f_r(x)} Y'$ sobreyectivo. Lo anterior es una propiedad abierta, por lo que podemos suponer que $x \in Z_r$. Luego:

$$\dim(Y') \le \dim_k T_{f_r(x)} Y' = \mathrm{rg}(d_x f_r) \le \mathrm{rg}(d_x f) \le r.$$

Por último, basta considerar el cerrado propio $Z := Z_{\dim(Y)-1} \subsetneq Y$ para obtener un abierto denso $V := Y_{\mathrm{reg}} \cap (Y \smallsetminus Z)$ sobre el cual f es suave. $\square$

EN $\mathrm{car}(k) = 0$, SI X VARIEDAD SUAVE E IRREDUCIBLE, LA FIBRA GENERAL DE UN MORFISMO DOMINANTE $f : X \to Y$ ES SUAVE.

Sea X variedad suave e irreducible y $f : X \to \mathbb{P}(V)$ morfismo regular. Si $[H] \in \mathbb{P}(V^\vee)$ es un **hiperplano general**, entonces $f^{-1}(H)$ es suave.

Prueba: Supongamos $\dim(X) \geq 1$ y consideremos la variedad de incidencia

$$I := \{(x, [H]) \in X \times \mathbb{P}(V^\vee) \text{ tal que } f(x) \in H\}.$$

Para $(x, [H]) \in I$ elegimos coord. de $V \cong k^{n+1}$ tal que $f(x) = [0, \dots, 0, 1]$ y $H = \{x_0 = 0\}$. Así, $\exists\ x \in U \in X$ abierto y $f_0, \dots, f_{n-1} : U \to k$ regulares

$$f(x) = [f_0(x), \dots, f_{n-1}(x), 1] \text{ para todo } x \in U.$$

Todo hiperplano en una vecindad $[H] \in W \subseteq \mathbb{P}(V^\vee)$ tiene ecuación

$$x_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0.$$

Luego, I está definida en una vecindad $U \times W$ de $(x, [H])$ por la ecuación

$$\{P := f_0(x) + a_1 f_1(x) + \cdots + a_{n-1} f_{n-1}(x) + a_n = 0\} \subseteq U \times \mathbb{A}^n.$$

Como $\frac{\partial P}{\partial a_n} = 1 \neq 0$, el Criterio Jacobiano implica que I es **suave**.

I **irreducible**: considerar la proyección $\pi := \mathrm{pr}_1 : I \to X$ y notar que $\forall x \in X$

$$\begin{aligned}\pi^{-1}(x) &\overset{\text{def}}{=} \{[H] \in \mathbb{P}(V^\vee) \text{ tal que } f(x) \in H\} \\ &\cong \{[a_0, \ldots, a_n] \in \mathbb{P}^n \text{ tal que } f_0(x)a_0 + \cdots + f_n(x)a_n = 0\} \cong \mathbb{P}^{n-1},\end{aligned}$$

i.e., cada fibra de π es un hiperplano. Así, el Criterio de irreducibilidad usando fibras implica que I irreducible de dimensión $\dim(X) + n - 1$.

Finalmente, consideramos la segunda proyección

$$g := \mathrm{pr}_2 : I \longrightarrow \mathbb{P}(V^\vee)$$

y notar que $g^{-1}([H]) \overset{\text{def}}{=} f^{-1}(H)$, por lo que la fibra general es vacía o bien g es dominante. En este último caso tenemos que $f^{-1}(H)$ es suave para H general (suavidad genérica). $\square$

Teorema de Bertini

Teorema de Bertini (1923)

Sea $X \subseteq \mathbb{P}^n$ suave e irreducible de $\dim(X) \geq 1$ y H un hiperplano general de $\mathbb{P}^n$. Entonces, la **sección hiperplana** $X \cap H$ es suave[a].

[a] El resultado también es cierto en $\mathrm{car}(k) = p > 0$ (Kleiman, 1974).

Prueba en $\mathrm{car}(k) = 0$: Aplicar el resultado anterior a la inclusión $f : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$, donde $f^{-1}(H) \overset{\text{def}}{=} X \cap H$. $\square$

Cultura general (Teoremas tipo Bertini)

Hay muchos resultados afirmando que cierta propiedad de X (suavidad, irreducibilidad, conexidad, etc) se preserva al considerar secciones $X \cap H$ por hiperplanos (generales o arbitrarios). Por ejemplo,

Si X irreducible y $f : X \to \mathbb{P}^n$ regular tal que $\dim(\overline{f(X)}) \geq 2$, para todo hiperplano general de $\mathbb{P}^n$ se tiene que $f^{-1}(H)$ es irreducible.