Geometría Algebraica

Clase 12

Pedro Montero

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

6 de Septiembre de 2023

§2.13 Espacio tangente de Zariski, variedades suaves y singulares

Sea X variedad algebraica y $x \in X$. Recordemos que el tallo $\mathscr{O}_{X,x}$ de gérmenes de funciones regulares es una k-álgebra con único ideal maximal

$$\mathfrak{m}_x = \{f \in \mathscr{O}_{X,x} \text{ tal que } f(x) = 0\} \text{ con } \mathscr{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x \cong k.$$

Definición (vector tangente)

Un **vector tangente** en x es una aplicación k-lineal $D : \mathscr{O}_{X,x} \longrightarrow k$ que cumple la regla de Leibniz

$$D(fg) = f(x)D(g) + g(x)D(f) \text{ para todos } f, g \in \mathscr{O}_{X,x}.$$

El **espacio tangente de Zariski** en $x \in X$ es el k-e.v. dado por

$$T_xX := \{D : \mathscr{O}_{X,x} \longrightarrow k \text{ vector tangente en } x \in X\}.$$

El isomorfismo $T_xX \cong (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^\vee$

Para todo $x \in X$ hay un isomorfismo canónico de k-e.v.

$$T_xX \cong (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^\vee.$$

En particular, $\dim_k(T_xX) < \infty$.

Prueba: Sea $D : \mathscr{O}_{X,x} \to k$ un vector tangente. Notar que $D(1) = D(1 \cdot 1) = D(1) + D(1) = 0$ y así $D(\lambda) = \lambda D(1) = 0$ $\forall \lambda \in k$. Notar que si $f, g \in \mathfrak{m}_x$ entonces $D(fg) = 0$ (Leibniz), i.e., $\mathfrak{m}_x^2 \subseteq \ker(D|_{\mathfrak{m}_x})$ de donde obtenemos

$$\overline{D} : \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \longrightarrow k,\ [f] \longmapsto D(f) \text{ en } (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^\vee.$$

Veamos que $\varphi : T_xX \longrightarrow (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^\vee,\ D \longmapsto \overline{D}$ es un **isomorfismo**:

Inyectividad: Todo $f \in \mathscr{O}_{X,x}$ se escribe como $f = f(x) + f_0$ con $f_0 \in \mathfrak{m}_x$. $\varphi(D) \overset{\text{def}}{=} \overline{D} = 0$ implica $D(f) \overset{\text{def}}{=} D(f(x)) + \overline{D}(f_0) = 0$, pues $f(x) \in k$ y $\overline{D} = 0$.

El isomorfismo $T_x X \cong (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^\vee$

Sobreyectividad: Sea $\nabla : \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \to k$ lineal. Para $f \in \mathscr{O}_{X,x}$ escribimos $f_0 := f - f(x) \in \mathfrak{m}_x$ y definimos $D(f) := \nabla([f_0])$, donde $[f_0] \in \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$. Así, para todos $f, g \in \mathscr{O}_{X,x}$:

$$\begin{aligned} 0 = \nabla([f_0 g_0]) &\stackrel{\text{def}}{=} D(f_0 g_0) \stackrel{\text{def}}{=} \nabla([fg - f(x)g - g(x)f + f(x)g(x)]) \\ &= D(fg) - f(x)D(g) - g(x)D(f), \end{aligned}$$

i.e., $D \in T_x X$ y además $\varphi(D) \stackrel{\text{def}}{=} \nabla$.

Finitud: Como $\mathscr{O}_{X,x}$ es un anillo noetheriano[1], $\mathfrak{m}_x$ es un ideal finitamente generado por ciertos $u_1, \ldots, u_N \in \mathfrak{m}_x$, por lo que sus imagenes en el cociente $[u_1], \ldots, [u_N] \in \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ son generadoras como $k \cong \mathscr{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$-módulo. □

Por definición (Ejercicio) si X e Y son variedades algebraicas, $x \in X$ e $y \in Y$ entonces $T_{(x,y)}(X \times Y) \cong T_x X \oplus T_y Y$.

[1] Si $x \in U \subseteq X$ vecindad abierta, $\mathscr{O}_{X,x}$ es la localización en $\mathfrak{m}_x$ del anillo noetheriano $\mathscr{O}(U)$, y luego noetheriano también.

Definición (diferencial)

Sea $f : X \longrightarrow Y$ morfismo regular y $x \in X$. Entonces, el morfismo de k-álgebras $f^* : \mathscr{O}_{Y,f(x)} \to \mathscr{O}_{X,x}$, $u \longmapsto u \circ f$ induce una aplicación k-lineal

$$d_x f : T_x X \longmapsto T_{f(x)} Y,\ D \longmapsto D \circ f^*$$

llamada el **diferencial de** f en $x \in X$.

Ejemplo: Sea $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{A}^n$ con ideal $\mathfrak{m}_p = \langle X_1 - p_1, \ldots, X_n - p_n \rangle$.

1. $T_p \mathbb{A}^n \cong k^n$ con base canónica $D_i(f) = \frac{\partial f}{\partial X_i}(p)$. Así toda $D \in T_p \mathbb{A}^n$ está dada por $f \longmapsto a_1 \frac{\partial f}{\partial X_1}(p) + \cdots + a_n \frac{\partial f}{\partial X_n}(p)$ para ciertos $a_i \in k$.
2. Si $f : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$, $x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ regular, entonces la matriz de $d_p f : T_p \mathbb{A}^n \cong k^n \longrightarrow T_{f(p)} \mathbb{A}^m \cong k^m$ resp. a la base anterior es

$$J_f(p) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(p) \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{m \times n}(k) \text{ la } \textbf{matriz jacobiana} \text{ de } f.$$

ADVERTENCIA: $\frac{\partial}{\partial X_i}$ SE **definen imponiendo** QUE SE CUMPLAN LAS REGLAS USUALES DE CÁLCULO (E.G. $\frac{\partial}{\partial X_i}(X_i^n) := nX_i^{n-1}$, $\frac{\partial}{\partial X_i}(X_j) := 0$ SI $i \neq j$).

El isomorfismo $T_xX \cong \ker(d_xf)$

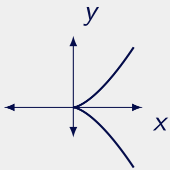
Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ afín con $\mathcal{I}(X) = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$, y sea $x \in X$. Entonces

$$T_xX \cong \ker(d_xf) \text{ donde } f : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m,\ p \mapsto (f_1(p), \ldots, f_m(p)).$$

Prueba: $\mathscr{O}(X) \cong \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)/\mathcal{I}(X)$ implica $\mathscr{O}_{X,x} \cong \mathscr{O}_{\mathbb{A}^n,x}/\langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ y así un vector tangente de X en x se identifica con un vector tangente de $\mathbb{A}^n$ en x que se anula en $\langle f_1, \ldots, f_m \rangle$, i.e.,

$$T_xX \cong \{D \in T_x\mathbb{A}^n \cong k^n \text{ tal que } D(f_i) = 0 \text{ para todo } i\} \overset{\text{def}}{=} \ker(d_xf). \qquad \square$$

Ejemplo (cuspide): Sea $C = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2,\ y^2 = x^3\}$ con $\mathcal{I}(C) = \langle Y^2 - X^3 \rangle$.



$$\dim_k(T_pC) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \neq (0,0) \\ 2 & \text{si } p = (0,0) \end{cases}$$

Si $f(x,y) = y^2 - x^3$ y $p = (a,b) \in C$, entonces $d_pf = (-3a^2 \;\; 2b)$.

Semi-continuidad superior de $\dim_k(T_x X)$

Sea X una variedad algebraica. Entonces, la función

$$X \longrightarrow \mathbb{N},\ x \longmapsto \dim_k(T_x X) \text{ es semi-continua superior,}$$

i.e., $\{x \in X \text{ tal que } \dim_k(T_x X) \geq r\}$ es **cerrado** para todo $r \in \mathbb{N}$.
En particular, $\dim_k(T_x X)$ es <u>minimal</u> es un **abierto** de X.

Prueba: La afirmación es local, por lo que asumimos $X \subseteq \mathbb{A}^n$ afín con $\mathcal{I}(X) = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$. El resultado anterior y el teorema del rango implican

$$\dim_k(T_x X) = n - \operatorname{rg}\left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(x) \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \right) \stackrel{\text{def}}{=} n - \operatorname{rg}(J_f(x)) \text{ para todo } x \in X.$$

La función $x \mapsto \operatorname{rg}(J_f(x))$ es semi-continua **inferior** pues $\operatorname{rg}(J_f(x)) \geq s$ $\Leftrightarrow \exists$ sub-determinante $s \times s$ no-nulo (condición *abierta* Zariski). □

¿Valor minimal de $\dim_k(T_x X)$?

Teorema del Elemento Primitivo

Sea $K \subseteq L$ extensión algebraica de cuerpos (i.e., $\forall a \in L$, $\exists P \in K[X]$ tal que $P(a) = 0$ en L). Decimos que $K \subseteq L$ es **separable** si $\forall a \in L$ el polinomio minimal $P_a \in K[X]$ **no** posee raíces múltiples en la clausura algebraica $\overline{K}$. Tenemos que:

1. Esto equivale a que la derivada (formal) $P'_a \in K[X]$ **no** es $\equiv 0$. Luego, si $\mathrm{car}(K) = 0$ toda extensión algebraica de K es separable.
2. Si k algebraicamente cerrado y $k \subseteq K$ es una extensión generada por finitos elementos, $\exists$ base de trascendencia $B = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq K$ tal que la extensión algebraica $k(B) \subseteq K$ es separable.

Hecho (Teorema del elemento primitivo)

Sea $K \subseteq L$ una extensión finita (y luego algebraica) separable. Entonces,

$$\exists f \in L \text{ tal que } L = K(f).$$

Sea X variedad algebraica irreducible de dimensión n. Entonces, X es birracional a una hipersuperficie $V(f) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ con $f \in \mathscr{O}(\mathbb{A}^{n+1})$ irreducible.

Prueba: El enunciado es birracional, por lo que asumimos X afín. Como $\operatorname{tr.deg}_k(k(X)) = n$, $\exists x_1, \ldots, x_n \in k(X)$ base de trascendencia tal que

$$k(\mathbb{A}^n) \cong k(x_1, \ldots, x_n) \subseteq k(X) \text{ extensión finita y separable.}$$

Luego, $\exists u \in k(X)$ (elemento primitivo) tal que $k(X) = k(\mathbb{A}^n)(u)$, y sea $F \in k(\mathbb{A}^n)[T]$ su polinomio minimal. Despejando denominadores:

$f(T) = a_0 T^r + a_1 T^{r-1} + \cdots + a_r$ con $a_i \in \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$, i.e., $f \in \mathscr{O}(\mathbb{A}^{n+1})$ irreducible.

Así, $k(X) \cong k(\mathbb{A}^n)[T]/\langle f \rangle$, i.e., $k(X) \cong k(Z)$ con $Z := V(f) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$. $\square$

Toda curva algebraica irreducible es *birracional* (pero no necesariamente isomorfa) a una **curva plana**, i.e., una curva irreducible C en $\mathbb{A}^2$ o $\mathbb{P}^2$.

Teorema

Sea X una variedad algebraica. Entonces, para todo $x \in X$ se tiene que

$$\dim_x(X) \leq \dim_k(T_x X).$$

Más aún, la igualdad se satisface en un **abierto denso** de X.

Prueba: **(Caso X irreducible, $\dim(X) = n$)**: Como el valor minimal de $x \mapsto \dim_k(T_x X)$ es un invariante birracional, asumimos $X = V(f) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ hipersuperficie irreducible. Así,

$$\dim(T_x X) = \dim_k(\ker d_x f) = n + 1 - \operatorname{rg}\left(\frac{\partial f}{\partial X_1}(x) \; \cdots \; \frac{\partial f}{\partial X_{n+1}}(x)\right) = n,$$

excepto si $\frac{\partial f}{\partial X_i}(x) = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ y $\forall x \in X$. En tal caso:

Consideremos el **ideal jacobiano** $J := \left\langle \frac{\partial f}{\partial X_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial X_{n+1}} \right\rangle \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{A}^{n+1})$.

Notar que si $X = V(f) \subseteq V(J)$, entonces $J \subseteq \sqrt{J} \subseteq \langle f \rangle$ (Nullstellensatz).

Así, f debe dividir a $\frac{\partial f}{\partial X_i}$ $\forall i$, i.e., todas las derivadas parciales de f son $\equiv 0$.

Si $\mathrm{car}(k) = 0$, entonces f constante. Si $\mathrm{car}(k) = p > 0$, entonces f es un polinomio en las variables $X_1^p, \ldots, X_{n+1}^p$, i.e., usando multi-índices

$$f = \sum a_{\mathbf{m}} X_{\mathbf{m}}^{p\mathbf{m}} = \sum b_{\mathbf{m}}^p X_{\mathbf{m}}^{p\mathbf{m}} = \left(\sum b_{\mathbf{m}} X^{\mathbf{m}}\right)^p =: g^p,$$

lo cual contradice el hecho que f es irreducible.

(Caso X general): Sean $X = X_1 \cup \cdots \cup X_m$ componentes irreducibles. Si $x \in X_1 \cup \cdots \cup X_k$ entonces $\dim(X_i) \leq \dim_k(T_x X_i) \leq \dim(T_x X)$ $\forall i$, y por ende $\dim_x(X) \leq \dim(T_x X)$.

Más aún, en cada X_i hay un abierto denso $U_i \subseteq X_i$ donde se verifica que $\dim(X_i) = \dim_k(T_x X_i)$. En particular, en el abierto denso $U := \bigcup_{i=1}^m U_i$ se tiene que $\dim_x(X) = \dim_k(T_x X)$ para todo $x \in U$. $\square$

Puntos suaves y Puntos singulares

La siguiente es una de las definiciones fundamentales del curso:

Definición

Sea X una variedad algebraica. Decimos que $x \in X$

1. Es un **punto suave** si $\dim_x(X) = \dim_k(T_x X)$.
2. Es un **punto singular** si $\dim_x(X) < \dim_k(T_x X)$.

Denotamos por $X_{\text{reg}} \subseteq X$ al abierto *denso* formado por los puntos suaves de X, y denotamos por $X_{\text{sing}} \subsetneq X$ (o por $\text{Sing}(X)$) al cerrado *propio* formado por los puntos singulares de X. Finalmente, decimos que:

3. X es una **variedad algebraica suave** si $X_{\text{sing}} = \varnothing$.
4. X es una **variedad algebraica singular** si $X_{\text{sing}} \neq \varnothing$.

1. Como $T_{(x,y)}(X \times Y) \cong T_x X \oplus T_y Y$, $(x,y) \in X \times Y$ es suave si y sólo si $x \in X$ e $y \in Y$ son puntos suaves. En particular,
$$(X \times Y)_{\mathrm{sing}} = (X_{\mathrm{sing}} \times Y) \cup (X \times Y_{\mathrm{sing}}).$$
2. Si $X = V(f) \subseteq \mathbb{A}^n$ hipersuperficie, $X_{\mathrm{sing}} \subseteq X \subseteq \mathbb{A}^n$ está dado por
$$f(x) = \frac{\partial f}{\partial X_1}(x) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial X_n}(x) = 0 \text{ en } \mathbb{A}^n.$$
Notar que si $f = f_1 \cdots f_r$ polinomios irreducibles, entonces (Leibniz) implica que todo $x \in V(f_i) \cap V(f_j)$, con $i \neq j$, es singular.
3. Si $X = V(f) \subseteq \mathbb{P}^n$ hipersuperficie, $X_{\mathrm{sing}} \subseteq X \subseteq \mathbb{P}^n$ está dado por
$$f(x) = \frac{\partial f}{\partial X_0}(x) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial X_n}(x) = 0 \text{ en } \mathbb{P}^n.$$

Si $\mathrm{car}(k)$ **no divide** $d = \mathrm{gr}(f)$, entonces X_{sing} está dado por

$$\frac{\partial f}{\partial X_0}(x) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial X_n}(x) = 0 \text{ en } \mathbb{P}^n.$$

En efecto, si $x \in X$ con (por ej.) $x_0 \neq 0$, i.e., $x \in U_0 \overset{\text{def}}{=} \{x_0 \neq 0\} \cong \mathbb{A}^n \subseteq \mathbb{P}^n$ y $X \cap U_0 = V(g)$ con $g(x_1, \ldots, x_n) = f(1, x_1, \ldots, x_n)$, entonces $x \in X_{\mathrm{sing}}$ si y sólo si $\frac{\partial g}{\partial X_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial X_i}(x) = 0\ \forall i$. Como f homogéneo de grado d

$$d \cdot f(x) = \sum_{i=0}^{n} X_i \frac{\partial f}{\partial X_i}(x) \text{ (fórmula de Euler)}$$

implica que si $f(x) = \frac{\partial f}{\partial X_1}(x) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial X_n}(x) = 0$, entonces $\frac{\partial f}{\partial X_0}(x) = 0$.

Recíprocamente, si $\mathrm{car}(k)$ no divide a d, entonces las ecuaciones $\frac{\partial f}{\partial X_i}(x) = 0$ para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$ implican que $f(x) = 0$.

Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ afín con $\mathcal{I}(X) = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$. El **criterio jacobiano** establece

$$x \in X \text{ es suave si y sólo si } \operatorname{rg}(J_f(x)) = n - \dim_x(X) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{codim}_x(X).$$

Aquí, $J_f(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(x)\right)_{i,j}$ es la matríz jacobiana. En efecto, se tiene que

$$\dim_k(T_x X) = n - \operatorname{rg}(J_f(x)) \geq \dim_x(X)$$

para todo $x \in X$. En particular:

1. Si $X \subseteq \mathbb{P}^n$ es una variedad proyectiva con $\mathcal{I}(X) = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ ideal homogéneo, $x \in X$ es suave si y sólo si $\operatorname{rg}(J_f(x)) = n - \dim_x(X)$.
2. Si X subvariedad cerrada de $\mathbb{A}^n$ o $\mathbb{P}^n$ con ideal $\mathcal{I}(X) = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$, entonces $n - m \leq \dim_x(X)$ (n° ecuaciones). Así, si X es **intersección completa** de dimensión $d = n - m$ en $\mathbb{A}^n$ o $\mathbb{P}^n$ el criterio jacobiano es:

$$x \in X \text{ suave} \Leftrightarrow \operatorname{rg}(J_f(x)) = m, \text{ con } m = n^\circ \text{ ecuaciones de } X.$$

Sea G un grupo algebraico. Una variedad X es **espacio homogéneo** respecto a G si existe una acción regular $G \times X \to X$ transitiva. En este caso, X es una variedad suave (Ejercicio).

Hint: Sea $x_0 \in X_{\mathrm{reg}} \neq \varnothing$ punto suave. Si $x \in X$ arbitrario, entonces (gracias la acción transitiva de G) $\exists\ x_0 \in U$ y $x \in U$ abiertos con $U_0 \cong U$.

Caso particular importante: Si $X = G$, entonces G es homogéneo respecto a sí mismo, y en particular es suave. Como consecuencia:

- **Toda** variedad abeliana es suave y los grupos algebraicos de matrices (e.g. $\mathrm{GL}_n(k)$, $\mathrm{PGL}_n(k)$, $\mathrm{SL}_n(k)$, etc.) son suaves.
- La grassmanniana $\mathrm{Gr}(m,n)$ es suave, pues es homogénea respecto a la acción natural de $\mathrm{GL}_n(k)$.

Teorema de Nagata y Auslander-Buchsbaum

Sea A un anillo local noetheriano con ideal maximal $\mathfrak{m}$, y $k = A/\mathfrak{m}$. Entonces,

$$\dim_{\mathrm{Krull}}(A) \leq \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \text{ (por Lema de Nakayama).}$$

Decimos que $(A, \mathfrak{m})$ es un **anillo regular** si $\dim_{\mathrm{Krull}}(A) = \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$. Así, si X es una variedad algebraica

Si $x \in X$ punto suave, entonces $(\mathscr{O}_{X,x}, \mathfrak{m}_x)$ es un anillo regular.

Teorema (Nagata 1958, Auslander-Buchsbaum 1959)

Todo $(A, \mathfrak{m})$ anillo regular es un **DFU** (o **anillo factorial**).

Así, si $x \in X$ punto suave entonces $\mathscr{O}_{X,x}$ es un DFU y luego X es **localmente irreducible**: $x \in X$ pertenece a una **única** componente irreducible de X.

Si $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{A}^3,\ x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$ cono sobre una cónica en $\mathbb{P}^2$ y $p = (0, 0, 0)$ entonces $\mathscr{O}_{Q,p}$ **no** es factorial (Ejercicio).

Puntos suaves $\underset{\text{loc}}{=}$ Intersección completa

Sea X variedad algebraica y $x \in X$ punto suave con $\dim_x(X) = m$. Entonces, $\exists x \in U \subseteq X$ vecindad afín y un isomorfismo

$$\varphi : U \subseteq X \xrightarrow{\sim} V \subseteq Y,\ x \mapsto \varphi(x) =: y$$

con $V \subseteq Y = V(f_1, \ldots, f_{n-m}) \subseteq \mathbb{A}^n$ afín y $\operatorname{rg}\left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(y)\right)_{i,j}\right) = n - m$ en y.

Prueba: Basta considerar $X \subseteq \mathbb{A}^n$ afín con $\mathcal{I}(X) = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$. Así, el criterio jacobiano implica $\operatorname{rg}\left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(x)\right)_{i,j}\right) = n - m$, i.e., $\exists$ una sub-matriz $(n-m) \times (n-m)$ de dicho rango. Si, por ejemplo, los $f_1, \ldots, f_{m-n}$ tienen matriz jacobiana de rango $n - m$ en $x \in X$ definimos $Y := V(f_1, \ldots, f_{m-n})$.

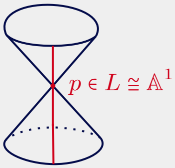
Por construcción, Y es suave en una vecindad de $x \in X$, $\dim_x(Y) = m$, y contiene a X que es de la misma dimensión. Como X e Y son *localmente irreducibles* en $x \in X$, ellas coinciden en una vecindad de dicho punto. $\square$

Otro resultado importante es un recíproco *local* al Teorema de Krull: hipersuperficies en variedades suaves están definidas localmente por una ecuación.

Hecho (variedades de codimensión 1 son localmente $V(f)$)

Sea X variedad algebraica irreducible e $Y \subseteq X$ subvariedad cerrada de codimensión pura 1. Sea $y \in Y$ tal que $y \in X_{\text{reg}}$ es un punto suave en X. Entonces, $\exists y \in U \subseteq X$ abierto afín y $f : U \to k$ regular con $\mathcal{I}(U \cap Y) = \langle f \rangle$.

Esto es **falso** en variedades singulares. Si $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{A}^3,\ z^2 = xy\} \subseteq \mathbb{A}^3$



Aquí, X es singular en $p = (0, 0, 0)$ y contiene $L = \{x = z = 0\} \cong \mathbb{A}^1$. Dicha recta **no** está definida por una única ecuación en $\mathscr{O}_{X,p}$ (Ejercicio).

Una consecuencia importante del hecho anterior es:

Sea $f : X \dashrightarrow Y$ aplicación racional, donde X variedad algebraica **irreducible suave** e Y variedad **proyectiva**. Entonces, el cerrado

$$Z := X \setminus \mathrm{Dom}(f) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Exc}(f) \text{ (i.e., donde } f \text{ no está definida)}$$

es de $\mathrm{codim}_X(Z) \geq 2$. Así, si $\dim(X) = 1$ entonces $f : X \to Y$ es regular.

Prueba: Localmente podemos escribir

$$f(x) \underset{\text{loc}}{=} [f_0(x), \ldots, f_N(x)] \in Y \subseteq \mathbb{P}^N.$$

Si los $f_i \equiv 0$ en alguna componente irreducible $W \subseteq Z$ de codimensión 1, consideramos $z \in W$ y $\{u = 0\}$ ecuación local de W en z. Entonces, $f_i = ug_i$ en $k(X)$ y así $[f_0, \ldots, f_N] = [g_0, \ldots, g_N]$ está bien definida en $z \in W$. $\square$

Si X e Y son **curvas algebraicas proyectivas suaves e irreducibles**, $X \sim_{\mathrm{bir}} Y$ son birracionales si y sólo si $X \cong Y$ son isomorfas.