Geometría Algebraica

Clase 11

PEDRO MONTERO

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
VALPARAÍSO, CHILE

4 DE SEPTIEMBRE DE 2023

§2.11 Dimensión y morfismos finitos

Going-up y Going-down

Figure: A. Grothendieck y M. Atiyah, ambos Medalla Fields en 1966.

Recordemos que Emmy Noether prueba que para toda $X \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad algebraica afín existe un morfismo finito sobreyectivo

$$f : X \twoheadrightarrow \mathbb{A}^d \text{ para cierto } d \in \mathbb{N}.$$

Más aún, si $X \subsetneq \mathbb{A}^n$ cerrado propio, $d < n$. También necesitaremos:

Lema de Going-up y Going-down (Cohen-Seidenberg, 1946)

Sea $f : X \to Y$ morfismo finito sobreyectivo. Entonces,

1. $\forall Y' \subseteq Y$ cerrado irred., $\exists X' \subseteq X$ cerrado irred. tal que $f(X') = Y'$.
2. Si $X', X'' \subseteq X$ cerrados irreducibles **distintos** con $f(X') = f(X'')$, entonces X' y X'' **no son comparables** (i.e., $X' \nsubseteq X''$ y $X'' \nsubseteq X'$).

Prueba: En (1), escribimos $f^{-1}(Y') = X_1 \cup \cdots \cup X_m$ con X_i cerrado irred. Luego, $Y' = f(X_1) \cup \cdots \cup f(X_m)$ con $f(X_i)$ cerrado pues f **finito**. Como Y' irreducible, $Y' = f(X_i)$ para cierto $X_i =: X'$.

En (2), supongamos que $X' \subsetneq X''$ y sea $x \in X'' \setminus X'$.

Sea $x \in U \subseteq X''$ abierto afín, y así $X' \cap U \subsetneq X'' \cap U$ cerrado propio de $X''_U := X'' \cap U$, i.e., $\exists u \in \mathscr{O}(X''_U)$ con $u(x) \neq 0$ y $u \equiv 0$ en $X'_U := X' \cap U$.

Sea $V = f(U)$, que podemos asumir afín pues f es un morfismo finito, y así $f : U \to V$ finito que cumple $f(X') \cap V \stackrel{\text{def}}{=} f(X'_U) = f(X''_U)$ por hipótesis.

Como $u \in \mathscr{O}(X''_U)$ es entero sobre $\mathscr{O}(W)$, con $W := f(X''_U)$, hay una relación

$$u^d + f^*(v_1)u^{d-1} + \cdots + f^*(v_d) = 0 \text{ en } \mathscr{O}(X'' \cap U), \qquad (\star)$$

con $v_i \in \mathscr{O}(W)$ y donde asumimos $d \in \mathbb{N}$ minimal. Como $u \neq 0$ en X''_U entonces $f^*(v_d) \stackrel{\text{def}}{=} v_d \circ f \neq 0$ (pues d minimal).

Como $u \equiv 0$ en X'_U entonces $(\star)$ implica que $f^*(v_d) = 0$ en X'_U, y luego $f^*(v_d) = 0$ en X''_U pues $f(X') = f(X'')$, una contradicción. $\square$

Si $f : X \to Y$ morfismo finito sobreyectivo entre variedades **irreducibles**:

1. $\dim(X) = \dim(Y)$, y además
2. $\dim_{\mathrm{Krull}}(X) = \dim_{\mathrm{Krull}}(Y)$.

Prueba: En (1): asumimos X e Y afines, pues la dimensión es invariante birracional. Luego, $\mathscr{O}(X)$ entero sobre $\mathscr{O}(Y)$ via $f^* : \mathscr{O}(Y) \longrightarrow \mathscr{O}(X)$, de donde $k(X)$ extensión algebraica de $k(Y)$. En particular,

$$\operatorname{tr.deg}_k(k(X)) = \operatorname{tr.deg}_k(k(Y)), \text{ i.e., } \dim(X) = \dim(Y).$$

En (2): si $X_0 \subsetneq \cdots \subsetneq X_d$ cerrados irreducibles en X, consideramos $Y_0 \subseteq \cdots \subseteq Y_d$ en Y, donde $Y_i := f(X_i)$ irreducible y cerrado pues f morfismo finito. Por Cohen-Seidenberg: $Y_i \neq Y_{i+1}$ y luego $\dim_{\mathrm{Krull}}(Y) \geq \dim_{\mathrm{Krull}}(X)$.

Si $Y_0 \subsetneq \cdots \subsetneq Y_d$ cerrados irreducibles en Y, Cohen-Seidenberg permite hallar $X_0 \subsetneq \cdots \subsetneq X_d$ cerrados irreducibles en X: $\dim_{\mathrm{Krull}}(X) \geq \dim_{\mathrm{Krull}}(Y)$. $\square$

Teorema

Sea X variedad algebraica irreducible. Entonces, $\dim(X) = \dim_{\mathrm{Krull}}(X)$.

Prueba: Podemos asumir $X \subseteq \mathbb{A}^n$, y procedemos por inducción en n:

Si $X \subsetneq \mathbb{A}^n$ cerrado propio $\exists f : X \twoheadrightarrow \mathbb{A}^m$ morfismo finito sobreyectivo con $m < n$ (normalización de Noether). Luego, mezclando el resultado anterior y la hipótesis de inducción obtenemos:

$$\dim_{\mathrm{Krull}}(X) = \dim_{\mathrm{Krull}}(\mathbb{A}^m) = \dim(\mathbb{A}^m) = \dim(X).$$

Si $X = \mathbb{A}^n$ entonces $\dim(\mathbb{A}^n) = n$ y $\dim_{\mathrm{Krull}}(\mathbb{A}^n) \geq n$. Sean $X_0 \subsetneq \cdots \subsetneq X_d = \mathbb{A}^n$ cerrados irreducibles y notar que $\dim_{\mathrm{Krull}}(X_{d-1}) \geq d-1$. Como $X_{d-1} \subsetneq \mathbb{A}^n$ existe $f : X_{d-1} \twoheadrightarrow \mathbb{A}^m$ morfismo finito sobreyectivo con $m < n$.

Luego, $d - 1 \leq \dim_{\mathrm{Krull}}(X_{d-1}) = \dim_{\mathrm{Krull}}(\mathbb{A}^m) = m \leq n - 1$, de donde deducimos que $d \leq n$, y así $\dim_{\mathrm{Krull}}(\mathbb{A}^n) = n$. $\square$

Ejercicio útil: Probar que si $Z \subsetneq X$ cerrado propio, $\dim(Z) < \dim(X)$.

Krull Hauptidealsatz

Mencionemos el siguiente resultado fundamental de Álgebra Conmutativa:

Hecho (Teorema del ideal principal de Krull, 1928)

Si X variedad algebraica irreducible afín y $f \in \mathscr{O}(X) \setminus \{0\}$ no-invertible, toda componente irreducible de $V(f) \subseteq X$ es de dimensión $\dim(X) - 1$.

Terminología: Sea X una variedad algebraica irreducible de $\dim(X) = n$. Decimos que X es una

1. **curva** si $n = 1$,
2. **superficie** si $n = 2$,
3. **threefold** si $n = 3$,
4. **fourfold** si $n = 4$, etc.

Hablamos de *curvas algebraicas*, *superficies algebraicas*, *threefolds algebraicos*, etc. para referirse a una variedad algebraica de dichas dimensiones.

§2.12 Dimensión de morfismos y aplicaciones

Sea $X \subseteq \mathbb{P}^N$ variedad quasi-proyectiva irreducible de $\dim(X) = n$, y sean $f_1, \ldots, f_r \in k[X_0, \ldots, X_n]$ polinomios homogéneos no-constantes. Si

$$Y := X \cap V(f_1, \ldots, f_r) \subseteq X,$$

cada componente irreducible Z de Y es de $\dim(Z) \geq n - r$.

Prueba (inducción en r): El caso $r = 1$ sigue por Teorema de Krull, y luego asumimos $r \geq 2$: Notar que $Z \subseteq X \cap V(f_1, \ldots, f_{r-1})$ y luego $Z \subseteq W$ para cierta $W \subseteq X \cap V(f_1, \ldots, f_{r-1})$ componente irreducible.

Por inducción, $\dim(W) \geq n - r + 1$. Si $f_r \equiv 0$ en W, $\dim(Y) = \dim(W) \geq n - r + 1 \geq n - r$. Si $f_r \not\equiv 0$ en W, considerar $x \in Z$ y $x \in U \subseteq W$ abierto afín:

Como Z y W irreducibles, U es denso, y así $\dim(Z) = \dim(Z \cap U)$ y $\dim(W) = \dim(U)$. Sea $g_r := f_r|_U \neq 0$, donde $Z \cap U$ es una componente irreducible de $V(g_r)$. El Teorema de Krull implica que

$$\dim(Z \cap U) = \dim(U) - 1 \geq (n - r + 1) - 1 = n - r \quad \square$$

Intersecciones completas

La desigualdad $\dim(Y) \geq n - r$ puede ser **estrícta**: la cúbica torcida $C = \nu_3(\mathbb{P}^1) \subseteq \mathbb{P}^3$ está dada por 3 ecuaciones y $\dim(C) = 1 > 3 - 3 = 0$.

Definición (codimensión, intersecciones completas)

Sea X variedad algebraica de dimensión pura n, y $Y \subseteq X$ una subvariedad cerrada. La **codimensión** de Y en X es

$$\operatorname{codim}_X(Y) := \dim(X) - \dim(Y) = n - \dim(Y).$$

Una variedad (quasi-)proyectiva de dimensión n en $\mathbb{P}^N$ es una **intersección completa** si puede ser definida por $c = N - n$ ecuaciones.

Conjetura (Hartshorne, 1974): abierta incluso si $N = n + 2$

Sea $X \subseteq \mathbb{P}^N$ variedad proyectiva **suave** de dimensión n tal que $3n > 2N$. Entonces, X es una intersección completa.

Sean X e Y variedades irreducibles de $\dim(X) = n$ y $\dim(Y) = m$.

1. $\dim(X \times Y) = n + m$: Basta asumir X e Y son afines y considerar (normalización de Noether) morfismos sobreyectivos finitos
$$f : X \twoheadrightarrow \mathbb{A}^n \text{ y } g : Y \twoheadrightarrow \mathbb{A}^m, \text{ donde}$$
$f \times g : X \times Y \twoheadrightarrow \mathbb{A}^{n+m}$ sobreyectivo finito, i.e., $\dim(X \times Y) = n + m$.
2. Si $X = V(I) \subseteq \mathbb{P}^n$ variedad alg. proyectiva y $C(X) := V(I) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ el **cono afín** de X, $\dim(C(X)) = \dim(X) + 1$ (Ejercicio).
3. Si $X, Y \subseteq \mathbb{A}^N$ afines con $X \cap Y \neq \varnothing$, toda componente irred. Z de $X \cap Y$ es de dimensión $\geq \dim(X) + \dim(Y) - N \stackrel{\text{def}}{=} n + m - N$, i.e.,
$$\operatorname{codim}(X \cap Y) \leq \operatorname{codim}(X) + \operatorname{codim}(Y).$$
En efecto, $X \cap Y \cong (X \times Y) \cap \Delta_{\mathbb{A}^N}$ está dado en $X \times Y \subseteq \mathbb{A}^N \times \mathbb{A}^N$ por las N ecuaciones $x_i = y_i$ con $i \in \{1, \ldots, N\}$. Luego, tenemos que $\dim(Z) \geq \dim(X \times Y) - N \stackrel{\text{def}}{=} n + m - N$.

Aplicación importante

Supongamos que $X, Y \subseteq \mathbb{P}^N$ son variedades algebraicas proyectivas, y que $\dim(X) + \dim(Y) \geq N$. Entonces, $X \cap Y \neq \varnothing$.

Prueba: Los conos afines $C(X), C(Y) \subseteq \mathbb{A}^{N+1}$ son de dimensión $n+1$ y $m+1$ respectivamente (por (2)). Además, $0 \in C(X) \cap C(Y) \neq \varnothing$, y luego (3) implica que cada componente de $C(X) \cap C(Y)$ es de dimensión $\geq (n+1) + (m+1) - (N+1) = n + m - N + 1 \geq 1$. $\square$

Teorema de Bézout (versión baby)

Todo par de curvas proyectivas planas $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{P}^2$ se intersectan.

Dimensión de fibras

Teorema (semi-continuidad superior de la dimensión)

Sean X e Y variedades irreducibles de $\dim(X) = n$ y $\dim(Y) = m$. Entonces, para todo $f : X \twoheadrightarrow Y$ morfismo regular sobreyectivo se tiene:

1. $\forall y \in Y$, toda componente irred. de $f^{-1}(y)$ es de dimensión $\geq n - m$.
2. $\exists V \subseteq Y$ abierto denso con $f^{-1}(y)$ de dimensión pura $n - m$ $\forall y \in V$.
3. Para todo $r \in \mathbb{N}$, $X_r := \{x \in X$ tal que $\dim_x(f^{-1}(f(x))) \geq r\}$ es cerrado en X, i.e., la función
$$\delta : X \longrightarrow \mathbb{N},\ x \longmapsto \dim_x(f^{-1}(f(x))$$
es **semi-continua superior**.

Aquí, para cada $Z \subseteq X$ cerrado, definimos
$$\dim_x(Z) := \max_{x \in Z_i}\{\dim(Z_i)\}$$
donde $Z = Z_1 \cup \cdots \cup Z_s$ son las componentes irreducibles de Z.

En (1): Asumimos Y afín y luego (Noether) $\exists g : Y \twoheadrightarrow \mathbb{A}^m$ finito sobreyectivo. Sea $u : X \overset{f}{\twoheadrightarrow} Y \overset{g}{\twoheadrightarrow} \mathbb{A}^m$ y $p := g(y) \in \mathbb{A}^m$. Así, $g^{-1}(p) = \{y, z_1, \dots, z_N\}$ finito y $u^{-1}(p) \overset{\text{def}}{=} f^{-1}(y) \amalg f^{-1}(z_1) \amalg \cdots \amalg f^{-1}(z_n)$. En particular, componentes irreducibles de $f^{-1}(y)$ son componentes irreducibles de $u^{-1}(p)$.

Como $p = (p_1, \dots, p_m) \in \mathbb{A}^m$ dado por las m ecuaciones $x_i - p_i = 0$, $u^{-1}(p)$ está dada (en un abierto afín) por $x_i \circ u - p_i = 0$ en X. Así, toda componente irreducible de $u^{-1}(p)$ es de dimensión $\geq \dim(X) - m \overset{\text{def}}{=} n - m$. □

En (2): Asumimos X e Y afines. La extensión de cuerpos $f^* : k(Y) \hookrightarrow k(X)$ es tal que $k(X)$ tiene grado de trascendencia $n - m$ sobre $k(Y)$. Sean $u_1, \dots, u_{n-m} \in k(X)$ algebraicamente independientes sobre $k(Y)$ y $U \subseteq X$ abierto afín tal que $u_1, \dots, u_{n-m} \in \mathscr{O}(U)$.

Podemos completar con $u_{n-m+1}, \dots, u_N$ hasta generar la k-álgebra $\mathscr{O}(U)$ (y así $U \subseteq \mathbb{A}^N$). En particular (las restricciones de) $u_1, \dots, u_N$ también generan el anillo cociente $\mathscr{O}(f^{-1}(y) \cap U)$.

Restringiéndose, podemos asumir $f^{-1}(y)$ irreducible y luego $k(Z)$ cuerpo, con $Z := f^{-1}(y) \cap U$. Veamos que $\exists V \subseteq Y$ abierto tal que $u_{n-m+1}, \ldots, u_N$ son algebraicamente *dependientes* en $k(Z)$ sobre k ($\Rightarrow \dim(Z) \leq n-m$):

Para cada $i \in \{n-m+1, \ldots, N\}$ hay una relación polinomial en $K := k(Y)$

$$F_i(u_i, u_1, \ldots, u_{n-m}) = 0 \text{ en } k(X), \text{ con } F_i \in K[T_1, \ldots, T_{n-m+1}].$$

En $f^{-1}(y)$ los coeficientes de F_i son constantes. Luego, en el abierto $V \subseteq Y$ donde numeradores y denominadores de F_i no se anulan: si $y \in V$, cada $u_i|_{f^{-1}(y)}$ es algebraicamente *dependiente* de $u_1|_{f^{-1}(y)}, \ldots, u_{n-m}|_{f^{-1}(y)}$. □

En (3), por inducción en $\dim(X)$: Sea $r \in \mathbb{N}$. Si $r \leq n-m$ entonces $X_r = X$ (por (1)) cerrado. Por (2), para $r > n-m$ existe $Z \subsetneq X$ cerrado con $X_r \subseteq Z$.

Luego, $g := f|_Z : Z \twoheadrightarrow W := f(Z)$ sobreyectiva y $X_r \overset{\text{def}}{=} Z_r$ si $r > n-m$. Como $\dim(Z) < \dim(X)$, $X_r \subseteq Z$ es cerrado (por inducción) y así el conjunto $X_r \overset{\text{def}}{=} \{x \in X \text{ tal que } \dim_x(f^{-1}(f(x))) \geq r\} \subseteq X$ cerrado. □

Caso particular importante

Sea $f : X \twoheadrightarrow Y$ morfismo regular sobreyectivo entre variedades irreducibles. Si f es un morfismo **cerrado** (e.g. si X proyectiva) entonces la función $Y \mapsto \mathbb{N}$, $y \to \dim(f^{-1}(y))$ es semi-continua superior, i.e., para todo $r \in \mathbb{N}$

$$Y_r := \{y \in Y \text{ tal que } \dim(f^{-1}(y)) \geq r\} \text{ es cerrado en } Y.$$

Prueba: Aquí, $Y_r \stackrel{\text{def}}{=} f(X_r)$. Como $X_r \subseteq X$ es cerrado por el Teorema anterior y f morfismo cerrado, $Y_r \subseteq Y$ lo es también. □

Si $f : \mathbb{A}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{A}^3$, $(x, y, z) \to (x, (xy - 1)y, (xy - 1)z)$, Y_1 **no es** cerrado.

Terminología: Sea $f : X \twoheadrightarrow Y$ morfismo regular sobreyectivo entre variedades irreducibles. La **dimensión relativa** de f en $y \in Y$ es $\dim(f^{-1}(y))$.

Si $\dim(f^{-1}(y)) = d$ $\forall y \in Y$, decimos que f es de **dimensión relativa** d, y escribimos $\dim(f) := \dim(X/Y) := d$.

Sea $f : X \twoheadrightarrow Y$ morfismo regular sobreyectivo **cerrado**. Supogamos que

1. Y es irreducible, y que
2. Todas las fibras de f son irreducibles de la misma dimensión $d \in \mathbb{N}$.

Entonces, X es irreducible y $\dim(X) = \dim(Y) + d$.

Prueba: Sean $X = X_1 \cup \cdots \cup X_r$ componentes irreducibles de X. Para $y \in Y$,

$$d_i(y) := \dim(f_i^{-1}(y)) \text{ donde } f_i := f|_{X_i} : X_i \to Y,$$

y donde $d \overset{\text{def}}{=} \max_{i=1,\dots,r}\{d_i(y)\}\ \forall y \in Y$. Luego, $Y = \bigcup_{i=1}^{r}\{y \in Y,\ d_i(y) \geq d\}$ es unión de cerrados. Como Y irreducible, $\exists i_0$ con $d_{i_0}(y) = d\ \forall y \in Y$.

La fibra $f_{i_0}^{-1}(y)$ está contenida en el cerrado irred. $f^{-1}(y)$, y $\dim(f^{-1}(y)) = \dim(f_{i_0}^{-1}(y))$, por lo que $f_{i_0}^{-1}(y) = f^{-1}(y)\ \forall y \in Y$. Deducimos que

$$X \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{y \in Y} f^{-1}(y) = \bigcup_{y \in Y} f_{i_0}^{-1}(y) \overset{\text{def}}{=} X_{i_0} \text{ es irreducible.}$$

Además, por el Teorema anterior $d = \dim(X) - \dim(Y)$ en este caso. $\square$

Ejemplo: Si X una variedad proyectiva y $f : X \twoheadrightarrow C$ morfismo no-constante, con C curva algebraica irreducible, entonces f sobreyectivo y

$$X_t \coloneqq f^{-1}(t) \text{ es una } \textbf{hipersuperficie} \text{ para todo } t \in C,$$

i.e., $\dim(X_t) = \dim(X) - 1$.

Definición (variedad abeliana)

Una **variedad abeliana** A es un **grupo algebraico**[a] que es proyectivo e irreducible. Una variedad abeliana de dimensión 1 es una **curva elíptica**.

[a] i.e., una variedad algebraica que tiene la estructura de grupo, y tal que la multiplicación e inversión son morfismos regulares (cf. grupo de Lie).

Cultura general

Si $k = \mathbb{C}$, **toda** variedad abeliana es de la forma $A = \mathbb{C}^g/\Lambda$ donde $\Lambda \cong \mathbb{Z}^{2g}$ es un reticulado, y donde $g = \dim(A)$.

Sea A una variedad abeliana y sea $f : A \times A \to A,\ (g,h) \to ghg^{-1}$ con grafo

$$\Gamma_f \overset{\text{def}}{=} \{(g,h,ghg^{-1}),\ g,h \in A\} \subseteq A \times A \times A.$$

Veamos que $h = ghg^{-1}\ \forall g,h \in A$, i.e., $\mathrm{pr}_{23}(\Gamma_f) = \Delta_A \subseteq A \times A$ es la diagonal:

Notar que $A \cong \Delta_A$, y que si consideramos $g = e$ tenemos que $\Delta_A \subseteq \mathrm{pr}_{23}(\Gamma_f)$.

Como A proyectiva irreducible, $A \times A \cong \Gamma_f$ y $\mathrm{pr}_{23}(\Gamma_f)$ también. Además, si

$$\mathrm{pr}_2 : \mathrm{pr}_{23}(\Gamma_f) \longrightarrow A,\ (h, ghg^{-1}) \longmapsto ghg^{-1},$$

tenemos que $\mathrm{pr}_2^{-1}(e) \overset{\text{def}}{=} \{(e,e)\}$ es de dimensión 0.

Por semi-continuidad superior la **fibra general** $\mathrm{pr}_2^{-1}(y)$ tiene dimensión 0, y luego $\dim(\mathrm{pr}_{23}(\Gamma_f)) = \dim(A) + 0 = \dim(A)$.

Así, $\dim(\Delta_A) = \dim(\mathrm{pr}_{23}(\Gamma_f))$ y luego $\mathrm{pr}_{23}(\Gamma_f) = \Delta_A$. $\square$

Sean $W \subseteq V$ k-e.v. no-nulos, sea $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^n$ y sea $\Lambda := \mathbb{P}(W) \cong \mathbb{P}^{k-1}$ sub-espacio lineal asociado a W. Si $W = \{f_0 = \cdots = f_{n-k} = 0\}$, la función

$$f : U \longrightarrow \mathbb{P}^{n-k},\ x \longmapsto [f_0(x), \ldots, f_{n-k}(x)]$$

es regular en $U := \mathbb{P}^n \setminus V(f_0, \ldots, f_{n-k})$. El **blow-up** $\mathrm{Bl}_\Lambda(\mathbb{P}^n)$ es la clausura del grafo Γ_f en $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-k}$. Explícitamente, está dado por

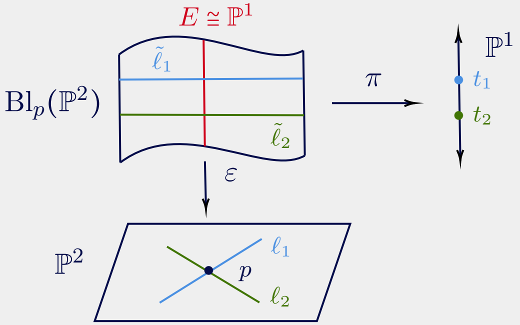
$$\mathrm{Bl}_\Lambda(\mathbb{P}^n) = \{(x, y) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-k},\ y_i f_j(x) = y_j f_i(x)\ \forall i, j = 0, \ldots, n-k\},$$

donde $\varepsilon := \mathrm{pr}_1 : \mathrm{Bl}_\Lambda(\mathbb{P}^n) \to \mathbb{P}^n$ es el blow-up y $\pi := \mathrm{pr}_2 : \mathrm{Bl}_\Lambda(\mathbb{P}^n) \to \mathbb{P}^{n-k}$.

Si $E := \varepsilon^{-1}(\Lambda)$ conjunto excepcional, para todo $x \in \Lambda$ tenemos $\varepsilon^{-1}(x) \cong \mathbb{P}^{n-k}$ irreducible de dimensión $n-k$.

Así, $\varepsilon|_E : E \longrightarrow \Lambda \cong \mathbb{P}^{k-1}$ cumple las hipótesis del criterio de irreducibilidad, de donde deducimos que $\dim(E) = (k-1) + (n-k) = n-1$, i.e., el conjunto excepcional $E \subseteq \mathrm{Bl}_\Lambda(\mathbb{P}^n)$ es una **hipersuperficie**.

Más aún, se puede probar (Ejercicio) que $\pi^{-1}(y) \cong \mathbb{P}^k$ para todo $y \in \mathbb{P}^{n-k}$ y en particular $\mathrm{Bl}_\Lambda(\mathbb{P}^n)$ es irreducible de dimensión n.



En particular, para todo $p \in \mathbb{P}^2$, la superficie $S = \mathrm{Bl}_p(\mathbb{P}^2)$ posee un morfismo regular sobreyectivo $\pi : S \twoheadrightarrow \mathbb{P}^1$ tal que $\pi^{-1}(t) \cong \mathbb{P}^1$ para todo $t \in \mathbb{P}^1$.