Geometría Algebraica

Clase 10

Pedro Montero

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

30 de Agosto de 2023

§2.10 Blow-up de una variedad afín

Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad algebraica afín irreducible, y sean $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ que **no** se anulan simultaneamente en X (i.e., $\langle f_1, \ldots, f_r \rangle \notin I(X)$). Así, $U := X \setminus V(f_1, \ldots, f_r)$ abierto denso de X y la aplicación

$$f : U \longmapsto \mathbb{P}^{r-1},\ x \longmapsto [f_1(x), \ldots, f_r(x)]$$

es un morfismo regular, cuyo grafo

$$\Gamma_f \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, f(x)),\ x \in U\} \subseteq U \times \mathbb{P}^{r-1} \text{ es isomorfo a } U.$$

Definición (blow-up)

El **blow-up** de X en $f_1, \ldots, f_r$ es la adherencia de Zariski

$$\widetilde{X} := \overline{\Gamma_f}^{\mathrm{Zar}} \subseteq X \times \mathbb{P}^{r-1}$$

de Γ_f en $X \times \mathbb{P}^{r-1}$. En particular, la primera proyección de $X \times \mathbb{P}^{r-1}$ induce un morfismo desde $\widetilde{X}$ hacia X, usualmente denotado

$$\varepsilon : \widetilde{X} \longrightarrow X.$$

También se dice que ε es el blow-up de X en $f_1, \ldots, f_r$.

1. La restricción $\varepsilon|_{\Gamma_f} : \Gamma_f \xrightarrow{\sim} U$ es un isomorfismo. Luego, $\varepsilon : \widetilde{X} \to X$ es un **morfismo birracional**: es el ejemplo más importante.
2. Como $U \cong \Gamma_f$ irreducible, $\widetilde{X} \overset{\text{def}}{=} \overline{\Gamma_f}^{\mathrm{Zar}}$ es irreducible.
3. El conjunto
$$\mathrm{Exc}(\varepsilon) := \widetilde{X} \smallsetminus \Gamma_f \overset{\text{def}}{=} \varepsilon^{-1}(V(f_1, \ldots, f_r)),$$
donde ε **no** es un isomorfismo, es el **conjunto excepcional** del blow-up. También se denota $E = \mathrm{Exc}(\varepsilon) \subseteq \widetilde{X}$.
4. Sea $Y \subseteq X$ cerrado, y $\widetilde{Y}$ el blow-up de Y en $f_1, \ldots, f_r$. Entonces,
$$\widetilde{Y} \subseteq Y \times \mathbb{P}^{r-1} \subseteq X \times \mathbb{P}^{r-1}$$
subvariedad cerrada de $\widetilde{X}$. Explícitamente, $\widetilde{Y}$ es la clausura de $Y \cap U$ en $\widetilde{X}$ (donde U es visto en $\widetilde{X}$ mediante $\Gamma_f \cong U$), y decimos que $\widetilde{Y} \subseteq \widetilde{X}$ es la **transformada estricta** de Y en el blow-up de X.

- Si $r = 1$ (hipersuperficie), entonces $\widetilde{X} \subseteq X \times \mathbb{P}^0 \cong X$ y luego $X \cong \widetilde{X}$.
- En $X = \mathbb{A}^2$ con coord. (x, y) consideramos $f_1 := x, f_2 := y \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^2)$. Luego, el blow-up de $\widetilde{X}$ en (x, y) es una subvariedad de $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$. Explícitamente, la aplicación

$$U \longrightarrow \mathbb{P}^1, \ (x, y) \longmapsto [x, y]$$

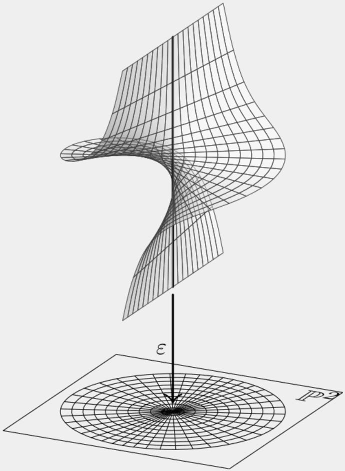
está bien definida en $U = \mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$, y allí su grafo es

$$\Gamma \overset{\text{def}}{=} \left\{ ((x,y),[u,v]) \in U \times \mathbb{P}^1 \text{ tal que } \det \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} = xv - yu = 0 \right\}.$$

Luego, deducimos que el blow-up de $\mathbb{A}^2$ en (x, y) es

$$\widetilde{X} = \{((x,y),[u,v]) \in \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1 \text{ tal que } xv - yu = 0\} \subseteq \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1,$$

y $\varepsilon : \widetilde{X} \to \mathbb{A}^2$, $((x,y),[u,v]) \mapsto (x,y)$. Además, $E = \varepsilon^{-1}((0,0)) \cong \mathbb{P}^1$.



Las rectas vectoriales $L \subseteq \mathbb{A}^2 \subseteq \mathbb{P}^2$ intersectan $(0,0)$ y su transformada estricta $\widetilde{L}$ es una recta en $\widetilde{X}$ que intersecta $E \cong \mathbb{P}^1$ exactamente en el punto $[L]$ de $\mathbb{P}^1$. Así, si L_1 y L_2 son dos rectas vectoriales entonces $\widetilde{L}_1 \cap \widetilde{L}_2 = \emptyset$.

Definición (blow-up de subvariedad)

Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad algebraica afín irreducible, y sea $I \subseteq \mathcal{O}(X)$ un ideal no-nulo definiendo $Z := V(I) \subseteq X$ subvariedad cerrada. El **blow-up de X a lo largo de Z**, denotado por

$$\varepsilon : \mathrm{Bl}_Z(X) \longrightarrow X,$$

es el blow-up $\widetilde{X}$ en un conjunto de generadores $(f_1, \ldots, f_r)$ del ideal I. La subvariedad $Z \subseteq X$ es llamada el **centro** del blow-up, y se tiene que $\mathrm{Exc}(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}(Z)$ es el conjunto excepcional.

Ejemplo: Sea $C \subseteq \mathbb{A}^2$ dada por $y^2 = x^2(x+1)$. Su transformada estricta en $\mathrm{Bl}_{(0,0)}(\mathbb{A}^2) \overset{\text{def}}{=} \{xv - yu\} \subseteq \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$ en la carta $\{u \neq 0\} \overset{\text{def}}{=} \{u = 1\} \cong \mathbb{A}^3_{(x,y,v)} \subseteq \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$ se obtiene al reemplazar $y = xv$, i.e., $x^2v^2 = x^2(x+1)$ y así $\widetilde{C} \subseteq \mathbb{A}^3$ está dada por $\{y = xv,\ v^2 = x+1\} \subseteq \mathbb{A}^3_{(x,y,v)}$ (cf. Hartshorne pág. 29).

§2.11 Dimensión y morfismos finitos

Sea k un cuerpo, y $k \subseteq K$ extensión de cuerpos. Un conjunto $B \subseteq K$ es una **base de trascendencia** del cuerpo K sobre k si:

1. Los elementos de B son *algebraicamente independientes* sobre k (i.e., no verifican ecuaciones polinomiales no-triviales con coeficientes en k).
2. La extensión de cuerpos $k(B) \subseteq K$ es *algebraica* (i.e., todo elemento de K es la raíz de algún polinomio no-nulo con coeficientes en $k(B)$).

Si $K = k(x_1, \dots, x_r)$ es una extensión de k *finitamente generada* (i.e., K se obtiene al agregar a k finitos elementos $x_1, \dots, x_r \in K$), entonces:

(i) El cuerpo K posee una base de trascendencia *finita*.

(ii) Dos bases de trascendencia tienen el mismo cardinal $\operatorname{tr.deg}_k(K)$, llamado **grado de trascendencia** de K sobre k

En otras palabras, $d := \operatorname{tr.deg}_k(K)$ mide la cantidad minimal de elementos independientes $x_1, \dots, x_d$ que se deben agregar a k para que todo elemento de K sea algebraico sobre $k(x_1, \dots, x_d)$.

Dimensión

Definición (dimensión via grado de trascendencia)

Sea X variedad algebraica. Si X irreducible, definimos su **dimensión** por

$$\dim(X) := \operatorname{tr.deg}_k(k(X)),$$

el grado de trascendencia del *cuerpo* de funciones racionales de X sobre k. En general, si $X = X_1 \cup \cdots \cup X_m$ son las componentes irreducibles de X,

$$\dim(X) := \max_{1 \leq i \leq m} \{\dim(X_i)\}$$

y decimos que X es de **dimensión pura** d si $\dim(X_i) = d \ \forall i \in \{1, \ldots, m\}$.

La ventaja de esta definición es que se tiene directamente que:

1. Si $U \subseteq X$ abierto denso, $k(X) \cong k(U)$ y luego $\dim(U) = \dim(X)$, i.e., la dimensión es un **invariante birracional**.
2. Dado que $k(\mathbb{A}^n) \cong k(T_1, \ldots, T_n)$, tenemos que $\dim(\mathbb{A}^n) = n$.
3. Por (1) y (2), $\dim(\mathbb{P}^n) = n$ y $\dim(\mathrm{Gr}(m, n)) = m(n - m)$.

Definición (dimensión via álgebra conmutativa)

La **dimensión de Krull**, $\dim_{\mathrm{Krull}}(X) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, de un espacio topológico X es el supremo de todos los $d \in \mathbb{N}$ tal que existen **cerrados irreducibles** $X_0, X_1, \dots, X_d$ tales que $X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_d$.

Las ventajas y desventajas de esta definición son que:

1. Dado que
$$\mathbb{A}^n \supsetneq \mathbb{A}^{n-1} \supsetneq \cdots \supsetneq \mathbb{A}^1 \supsetneq \mathbb{A}^0 = \{\mathsf{pt}\},$$
tenemos que $\dim_{\mathrm{Krull}}(\mathbb{A}^n) \geq n$. No es trivial que $\dim_{\mathrm{Krull}}(\mathbb{A}^n) = n$.
2. Sea $Y \subseteq X$ subconjunto y sean $Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Y_d$ cerrados en Y (i.e., $Y_i = Z_i \cap Y$ con $Z_i \subseteq X$ cerrado). Luego, la adherencia de los cerrados Y_i son cerrados distintos en X, por lo que $\dim_{\mathrm{Krull}}(Y) \leq \dim_{\mathrm{Krull}}(X)$.

¿Cómo compararlas?
Usando morfismos finitos y el Teorema de normalización de Noether (1926)

Morfismos finitos (afín)

Sea $\varphi : A \to B$ morfismo de anillos conmutativos con unidad, dotando B de estructura de A-módulo (con $a \cdot b := \varphi(a) b$ para $a \in A$ y $b \in B$). Decimos que $x \in B$ es **entero** sobre A (resp. a φ) si hay una relación polinomial **mónica**

$$x^n + \varphi(a_1) x^{n-1} + \cdots + \varphi(a_{n-1}) x + \varphi(a_n) = 0.$$

Decimos que B es **entero** sobre A (resp. a φ) si todo $x \in B$ es entero.

Se puede probar (Ejercicio) que si A y B son k-álgebras finitamente generadas, B entero sobre $A \Leftrightarrow B$ es un A-módulo finitamente generado.

Sean X, Y variedades algebraicas **afines**. Un morfismo regular $f : X \to Y$ es **finito** si $\mathcal{O}(X)$ es entero sobre $\mathcal{O}(Y)$ resp. al pullback

$$f^* : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X), \ u \mapsto u \circ f,$$

i.e., f^* hace que $\mathcal{O}(X)$ sea un $\mathcal{O}(Y)$-módulo finitamente generado.

1. Sea $d \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ y consideremos $f : \mathbb{A}^1 \twoheadrightarrow \mathbb{A}^1,\ t \longmapsto t^d$. Entonces, f es un morfismo finito pues

$$f^* : k[T] \hookrightarrow k[T],\ u(T) \mapsto (u \circ f)(T) \overset{\text{def}}{=} u(T^d)$$

es la inclusión de $A := k[T^d]$ en $B := k[T]$. Notamos que $B = k[T]$ está generado como A-módulo por $\{1, T, T^2, \ldots, T^{d-1}\}$ y así todo elemento de B es entero sobre A.

2. La proyección $f : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^1,\ (x, y) \mapsto x$ **no** es un morfismo finito, pues $k[X, Y]$ **no** es finitamente generado como $k[X]$-módulo. Por otra parte, $k[X, Y]$ está generado como $k[X]$-*álgebra* por $\{1, Y\}$.

3. Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2$ tal que $x^2 + y^2 = 1\}$, y sea

$$f : X \longrightarrow \mathbb{A}^1,\ (x, y) \longmapsto x.$$

Entonces f es un morfismo finito (Ejercicio).

Sean X, Y variedades algebraicas. Un morfismo regular $f : X \to Y$ es un **finito** si existe un cubrimiento de Y por abiertos afines $Y = \bigcup_{i \in I} V_i$ tal que:

1. La preimagen $U_i := f^{-1}(V_i)$ es un abierto afín de X.
2. El morfismo entre variedades algebraicas afines $f : U_i \to V_i$ (restricción de f) es finito en sentido de la Definición anterior.

Ejemplo importante

Sea $Z \subseteq X$ una subvariedad cerrada. Entonces, por definición, el morfismo dado por la inclusión $\iota : Z \hookrightarrow X$ es un morfismo finito.

En efecto, considerando un cubrimiento afín, basta asumir que $X \subseteq \mathbb{A}^n$ afín y $Z = V(I)$ con $I \subseteq \mathcal{O}(X) =: A$. Así, $\iota^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{res} : \mathcal{O}(X) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(Z)$, $u \mapsto u|_Z$ corresponde a $A \twoheadrightarrow A/I$. Dado que A es un A-módulo finitamente generado, el módulo cociente A/I también lo es.

Lema técnico

Asumiremos el siguiente resultado de Álgebra Conmutativa (ver Apunte):

Hecho (Lema técnico)

Sea Y variedad algebraica **afín**, y sea $Y = \bigcup_{i \in I} V_i$ un cubrimiento por abiertos afines tal que cada $V_i = V_{g_i}$ es un abierto principal de la forma

$$V_{g_i} \overset{\text{def}}{=} \{y \in Y \text{ tal que } g_i(y) \neq 0\} \text{ para cierta } g_i \in \mathcal{O}(Y).$$

Sea $f : X \to Y$ un morfismo regular, donde X es una variedad algebraica **arbitraria**, y definamos $U_i := f^{-1}(V_i)$. Si se verifica que:

1. Cada $U_i \subseteq X$ es un abierto afín.
2. El morfismo $f : U_i \to V_i$ es finito.

Entonces, X variedad algebraica **afín** y $f : X \to Y$ es un morfismo finito.

Sea $f : X \to Y$ morfismo finito entre variedades algebraicas **arbitrarias**. Entonces, para todo abierto afín $V \subseteq Y$ se tiene que $U := f^{-1}(V)$ es un abierto **afín** de X, y la restricción $f : U \to V$ es un morfismo finito.

Prueba: En el caso afín donde $X = \operatorname{Specm}(A)$ e $Y = \operatorname{Specm}(B)$, tenemos $f^* : B \to A$ permite ver A como un B-módulo finitamente generado.

Si $V = V_g \overset{\text{def}}{=} \{g \neq 0\} \subseteq Y$ abierto principal: $U = f^{-1}(V) = \operatorname{Specm}(A_h)$ es afín con $h \overset{\text{def}}{=} f^*(g) \in \mathcal{O}(X)$. Además, A_h es un B_g-módulo finitamente generado (pues A es entero sobre B, y luego A_h es entero sobre B_g).

Si $V \subseteq Y$ abierto afín arbitrario: Basta cubrir por $V_i = V_{g_i} \subseteq V$ abiertos principales, con $U_i = f^{-1}(V_i)$ afín y $f : U_i \to V_i$ morfismo finito. Así, $U = f^{-1}(V)$ abierto afín y $f : U \to V$ morfismo finito (Lema técnico).

Esto prueba el caso afín. Veamos el caso general de variedades arbitrarias:

Por definición, existe un cubrimiento de Y por abiertos afines $V_i \subseteq Y$ con $U_i = f^{-1}(V_i) \subseteq X$ abierto afín y $f : U_i \to V_i$ morfismo finito.

Si $V \subseteq Y$ abierto afín arbitrario, cada $W_i := V_i \cap V$ es un abierto afín (¡Y es una variedad separada!). Además, podemos cubrir V por abiertos principales V_{ij} de tal suerte que $V_{ij} \subseteq W_i$ esté dado por $\{g_{ij} \neq 0\}$.

El caso afín tratado antes implica que $U_{ij} := f^{-1}(V_{ij}) \subseteq U = f^{-1}(V)$ abierto afín y $f : U_{ij} \to V_{ij}$ morfismo finito. Nuevamente, el Lema técnico permite concluir que U es afín y que $f : U \to V$ es un morfismo finito. $\square$

Observación práctica

El resultado anterior implica que la composición de morfismos finitos, es también un morfismo finito (Ejercicio).

Fibras finitas

Sea $f : X \to Y$ morfismo finito entre variedades algebraicas. Entonces:

1. Todo todo $y \in Y$, la **fibra**

$$f^{-1}(y) \overset{\text{def}}{=} \{x \in X \text{ tal que } f(x) = y\} \text{ es un } \textbf{conjunto finito}.$$

2. La imagen $\mathrm{Im}(f) \subseteq Y$ es un conjunto cerrado.

Prueba: Ambas afirmaciones son locales, por lo que asumimos X e Y afines con $A = \mathcal{O}(X)$ y $B = \mathcal{O}(Y)$, y $f^* : B \to A$ el pullback de f. Para (1):

Sean $x_1, \ldots, x_n$ generadores de la k-álgebra A (que determinan $X \subseteq \mathbb{A}^n$). Cada x_i es entero sobre B y luego hay una relación mónica

$$x_i^{d_i} + \sum_{j=1}^{d_i} f^*(b_{ij}) x_i^{d_i - j} = 0 \text{ en } A. \qquad (\star)$$

Si $x \in f^{-1}(y)$, $(f^*(b_{ij}))(x) \overset{\text{def}}{=} b_{ij}(f(x)) = b_{ij}(y)$ depende sólo de $y \in Y$. Así, al fijar $y \in Y$ hay finitas soluciones para x_i en $(\star)$, y así finitos $x \in X$.

Para (2): Sea $I := \ker(f^*) \subseteq B$ ideal, y veamos que $\operatorname{Im}(f) \overset{\text{def}}{=} f(X) = V(I)$.

Recordar que si $x \in X$ y $\mathfrak{m}_x \subseteq A$ ideal maximal asociado, $(f^*)^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \eta_y$ ideal maximal asociado a $y = f(x) \in Y$. Así, como $0 \in \mathfrak{m}_x \subseteq A$, se tiene $I \overset{\text{def}}{=} \ker(f^*) \subseteq (f^*)^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \eta_y$, i.e., $y = f(x) \in V(I)$. Así, $\operatorname{Im}(f) \subseteq V(I)$.

Para $\supseteq$: Notar que si $y \in Y$ y $\eta_y \subseteq B$ su ideal maximal, los puntos de $f^{-1}(y)$ corresp. a ideales maximales $\mathfrak{m} \subseteq A$ con $f^*(\eta_y) \subseteq \mathfrak{m}$. Luego, $y \notin \operatorname{Im}(f) \Leftrightarrow \langle f^*(\eta_y)\rangle = A$. Sea $\eta = \eta_y \subseteq B$ con $I \subseteq \eta$, y supongamos $\langle f^*(\eta)\rangle = A$:

Sean $a_1, \dots, a_m \in A$ generadores de A como B-módulo. Entonces, existen $b_{ij} \in \eta$ tales que $a_i = \sum_{j=1}^m f^*(b_{ij}) a_j$ en A, i.e.,

$$(\mathrm{I}_m - f^*(b_{ij})\,\mathrm{I}_m) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = 0,$$

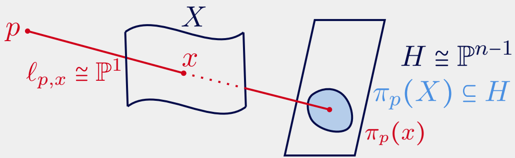
de donde deducimos $\det(\mathrm{I}_m - f^*(b_{ij})\,\mathrm{I}_m) = 0$ en A, y de donde tenemos $1_A \in f^*(\eta)$. Como $(f^*)^{-1}(1_A) = 1_B \subseteq \eta + I$, y como $I \subseteq \eta$, concluímos que $\langle 1_B \rangle \overset{\text{def}}{=} B = \eta$, una contradicción. $\square$

Notamos que si $p \in \mathbb{A}^n$, el blow-up $\varepsilon : \mathrm{Bl}_p(\mathbb{A}^n) \longrightarrow \mathbb{A}^n$ **no** es un morfismo finito, pues $E = \varepsilon^{-1}(p) \cong \mathbb{P}^{n-1}$ tiene cardinal infinito. Por otra parte:

Sea $X \subsetneq \mathbb{P}^n$ cerrado propio y $p \in \mathbb{P}^n$ tal que $p \notin X$. Dado un hiperplano $H \cong \mathbb{P}^{n-1}$ con $p \notin H$, la **proyección de** p **a** H como el morfismo

$$\pi_p : X \longrightarrow H \cong \mathbb{P}^{n-1}, x \mapsto \pi_p(x)$$

con $\pi_p(x) \in H$ la intersección de la recta $\ell_{p,x} := \langle p, x \rangle \cong \mathbb{P}^1$, que pasa por p y x, con el hiperplano H (i.e., $\ell_{p,x} \cap H = \{\pi_p(x)\}$).



Podemos asumir $p = [1, 0, \ldots, 0] \in \mathbb{P}^n$ y $H = \{x_0 = 0\}$, i.e, $\pi_p([x_0, \ldots, x_n]) = [0, x_1, \ldots, x_n]$, y $\pi_p(X) \subseteq \mathbb{P}^{n-1}$ es indep. de H (módulo cambio de coord).

Con la notación anterior, $\pi_p : X \to H \cong \mathbb{P}^{n-1}$ morfismo finito

En efecto, como $X = V(f_1, \ldots, f_r) \overset{\text{def}}{=} V(f_1) \cap \cdots V(f_r) \subseteq \mathbb{P}^n$, basta suponer que $X = V(f)$ hipersuperficie con $f \in k[X_0, \ldots, X_n]$ homogéneo de grado d. Asumimos $p = [1, 0, \ldots, 0]$ y $H = \{x_0 = 0\}$. Como $f(p) \neq 0$, f se escribe

$$f = x_0^d + \sum_{i=1}^{d} g_i(x_1, \ldots, x_n) x_0^{d-i}.$$

En $U_n = \{x_n \neq 0\} \cong \mathbb{A}^n$ con coord. $y_0, \ldots, y_{n-1}$, $\pi^{-1}(H \cap U_n) \overset{\text{def}}{=} X \cap U_n$ y

$$\pi_p|_{U_n} : X \cap U_n \longmapsto H \cap U_n \cong \mathbb{A}^{n-1}, \ (y_0, \ldots, y_{n-1}) \longmapsto (0, y_1, \ldots, y_{n-1}).$$

Notar que $\mathcal{O}(X \cap U_n)$ entero sobre $\mathcal{O}(H \cap U_n) \cong k[y_1, \ldots, y_{n-1}]$ pues

$$y_0^d + \sum_{i=1}^{d} a_i y_0^{d-1} = 0 \text{ donde } a_i := g_i(y_1, \ldots, y_{n-1}, 1) \in \mathcal{O}(H \cap U_n)$$

implica que y_0 entero sobre $\mathcal{O}(H \cap U_n)$. Reemplazando U_n por U_i con $i \in \{0, \ldots, n\}$, concluímos que $\pi_p : X \to H$ morfismo finito. $\square$

Normalización de Noether

Teorema (Emmy Noether, 1926)

Para toda X variedad algebraica afín existe un morfismo finito sobreyectivo $f : X \twoheadrightarrow \mathbb{A}^d$ para cierto $d \in \mathbb{N}$.

Prueba: Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$. Si $X = \mathbb{A}^n$ el resultado es trivial, y luego consideramos $X \subsetneq \mathbb{A}^n \cong U_0 = \{x_0 \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^n$ cerrado propio. Sea $\overline{X} \subseteq \mathbb{P}^n$ la clausura proyectiva de X, con $X \cong \overline{X} \cap U_0$.

Luego, si $p \notin U_0$ con $p \notin \overline{X}$ y $H \cong \mathbb{P}^{n-1}$ un hiperplano tal que $p \notin H$, entonces $\pi_p : \overline{X} \longmapsto \mathbb{P}^{n-1} \cong H$ es finito y luego $\pi_p|_X : X \longrightarrow \mathbb{A}^{n-1}$ también.

Si $\pi_p|_X$ es sobreyectiva obtenemos el resultado. Sino, podemos continuar proyectando hasta obtener $X \twoheadrightarrow \mathbb{A}^d$ finito y sobreyectivo. $\square$

La demostración implica que si $X \subsetneq \mathbb{A}^n$ cerrado propio, entonces existe $f : X \twoheadrightarrow \mathbb{A}^d$ morfismo finito sobreyectivo, y además se puede asumir $d < n$.