Geometría Algebraica

Clase 9

Pedro Montero

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

28 de Agosto de 2023

§2.8 Componentes irreducibles

Espacios hiperconexos

Recordar que X espacio topológico es **irreducible** (o que es **hiperconexo**) si $X = X_1 \cup X_2$ con X_1, X_2 cerrados, entonces $X = X_1$ o bien $X = X_2$.

Esto es equivalente a que:

- Todo par de abiertos no-vacíos de X se intersectan.
- Todo abierto no-vacío de X es **denso** en X.

Las siguientes propiedades topológicas se dejan como Ejercicio:

1. Si X irreducible, entonces X **conexo**.
2. Si X irreducible e Y arbitrario, entonces para toda función continua $f : X \to Y$ se tiene que $f(X) \subseteq Y$ irreducible.
3. Si X irreducible y $U \subseteq X$ abierto no-vacío, entonces U irreducible.
4. Si $A \subseteq X$ sub-conjunto irreducible en X, entonces $\overline{A}$ irreducible.
5. Si $U, V \subseteq X$ abiertos irreducibles y $U \cap V \neq \varnothing$, $U \cup V$ es irreducible.

Vimos que una subvariedad afín $X \subseteq \mathbb{A}^n$ es irreducible si y sólo si $\mathcal{I}(X)$ es un ideal primo de $\mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$ (e.g. $X = \mathbb{A}^n$ es irreducible). Además:

1. $\mathbb{P}^n$ es irreducible pues es cubierta por los abiertos $U_i \cong \mathbb{A}^n$ irreducibles. Del mismo modo, $\mathrm{Gr}(m,n)$ es irreducible.
2. Sea X una variedad algebraica proyectiva irreducible, entonces toda función regular $f : X \to k$ es constante, i.e.,
$$\Gamma(X, \mathscr{O}_X) \cong k.$$
En efecto, $f(X)$ es un conjunto finito e irreducible, i.e., un punto.
3. Sea $X \subseteq \mathbb{P}^n$ variedad algebraica proyectiva irreducible diferente de un punto. Entonces, $X \cap Y \neq \varnothing$ para *toda* hipersuperficie $Y \subseteq \mathbb{P}^n$:

   En efecto, $\mathbb{P}^n \setminus Y$ variedad algebraica afín. Si $X \cap Y = \varnothing$ entonces $X \subseteq \mathbb{P}^n \setminus Y$ sería subvariedad proyectiva de una variedad algebraica afín, y por ende X debería ser un punto (Ejercicio).

Si X e Y variedades algebraicas irreducibles, $X \times Y$ es irreducible.

Prueba: Si escribimos $X \times Y = Z_1 \cup Z_2$ con Z_1 y Z_2 cerrados no-vacíos, entonces (por definición de la topología de Zariski producto) el conjunto

$$Y_i := \{y \in Y \text{ tal que } X \times \{y\} \subseteq Z_i\}$$

es un cerrado de Y. Más aún, $Y = Y_1 \cup Y_2$ por hipótesis. Luego, $Y = Y_1$ o bien $Y = Y_2$ dado que Y irreducible. Así, $Z_1 = X \times Y$ o bién $Z_2 = X \times Y$. □

Definición (componente irreducible)

Sea X espacio topológico. Una **componente irreducible** de X es un subconjunto irreducible maximal respecto a la inclusión, i.e., no está contenido estrictamente en ningún conjunto irreducible de X.

Componentes irreducibles son cerradas

Si $S \subseteq X$ subconjunto irreducible, su adherencia $\overline{S} \subseteq X$ es irreducible. En particular, las componentes irreducibles de X son necesariamente **cerrados**.

Sea X espacio topológico noetheriano[a] (e.g. var. algebraica). Entonces:

1. El conjunto de componentes irreducibles $X_1, \ldots, X_m$ de X es *finito*.
2. Tenemos que $X = X_1 \cup \cdots \cup X_m$ y todo cerrado irreducible de X está contenido en alguna de las componentes irreducibles X_i.

En particular, todo cerrado no-vacío $Y \subseteq X$ se escribe de manera *única* (módulo permutación) como unión finita

$$Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_r$$

de cerrados irreducibles, no contenidos uno en el otro.

[a] i.e., toda sucesión decreciente de *cerrados* es eventualmente constante.

Prueba: Sea $\mathscr{F}$ la familia de *todos* los cerrados no-vacíos de X que **no** se escriben como unión finita de cerrados irreducibles, y veamos que $\mathscr{F} = \varnothing$:

Si $\mathscr{F} \neq \varnothing$ y $Y_1 \in \mathscr{F}$. Si Y_1 contiene estrictamente otro elemento de $\mathscr{F}$, lo llamamos $Y_2 \subsetneq Y_1$. Podemos partir con Y_2 y continuar inductivamente hasta obtener, por noetherianidad, un elemento minimal $Y = Y_m$ de $\mathscr{F}$.

Como $Y \in \mathscr{F}$, Y no es irreducible, i.e., $Y = Z_1 \cup Z_2$ con $Z_i \subsetneq Y$ cerrado propio. Por minimalidad, Z_1 y Z_2 se escriben como unión finita de cerrados irreducibles, y luego Y también. Contradicción.

Así, todo cerrado no-vacío $Y \subseteq X$ se escribe como unión finita de cerrados irreducibles, y podemos asumir sin pérdida de generalidad que ninguno está contenido en el otro. En particular, deducimos (1) y que

$$X = X_1 \cup \cdots \cup X_m \text{ unión de sus componentes irreducibles.}$$

Más aún, si $Y \subseteq X$ es irreducible entonces $Y = (Y \cap X_1) \cup \cdots \cup (Y \cap X_m)$ y luego $Y = Y \cap X_i$ para algún i, i.e., $Y \subseteq X_i$. Así, deducimos (2).

Para la unicidad (módulo permutación), sea $\varnothing \neq Y \subseteq X$ cerrado tal que

$$Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_r = Y_1' \cup \cdots \cup Y_s',$$

con $Y_1, \ldots, Y_r$ e $Y_1', \ldots, Y_s'$ cerrados irreducibles.

Así, $Y_1 \subseteq Y_1' \cup \cdots \cup Y_s'$ y como antes $Y_1 \subseteq Y_j'$ para algún j. De manera similar, $Y_j' \subseteq Y_i$ para algún i, de donde $Y_1 \subseteq Y_j' \subseteq Y_i$. Como ningún Y_i está contenido dentro de otro, $Y_1 = Y_j'$. Así, cada Y_i es *igual* a un Y_j', y viceversa. □

Ejemplo: Si $X = V(f)$ es una **hipersuperficie** afín en $\mathbb{A}^n$ (resp. proyectiva en $\mathbb{P}^n$) con f no-nulo en $\mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$ (resp. homogéneo en $\mathscr{O}(\mathbb{A}^{n+1})$), escribimos f de manera única (módulo permutación y multiplicación por k^*):

$$f = f_1 \cdots f_r \text{ con } f_1, \ldots, f_r \text{ polinomios irreducibles.}$$

Así, $V(f) = V(f_1) \cup \cdots \cup V(f_r)$ descomposición en componentes irreducibles.

Ejercicio: Determinar las componentes irreducibles de la variedad algebraica afín dada por la intersección de una esfera y un cilindro

$$X = V(X^2 + Y^2 + Z^2 - 4, Y^2 + Z^2 - 1) \subseteq \mathbb{A}^3.$$

§2.9 Funciones racionales y aplicaciones racionales

Sea X variedad algebraica. Consideremos el conjunto de pares (f, U) donde $U \subseteq X$ **abierto denso** y $f : U \to k$ función regular, y definamos

$$(f, U) \sim (g, V) \text{ si } f|_{U \cap V} = g|_{U \cap V}.$$

Denotamos por $k(X)$ al k-álgebra de clases de equivalencia de dichos pares. Una clase $[(f, U)] \in k(X)$ es una **función racional** en X y será denotada

$$f : X \dashrightarrow k.$$

A pesar de que una función racional <u>**no es**</u> una función (puede no estar definida en todo X), su **dominio de definición** es el *abierto maximal* donde está definida. Así, para $f : X \dashrightarrow k$ función racional definimos

$$\mathrm{Dom}(f) := \bigcup_{[(g,U)]=f} U.$$

Por definición, si $V \subseteq X$ es un abierto denso de X, entonces la restricción

$$k(X) \xrightarrow{\sim} k(V),\ [(f,U)] \longmapsto [(f|_{U\cap V}, U\cap V)]$$

es un isomorfismo de k-álgebras. En particular,

Si X es una variedad algebraica **irreducible**, entonces $k(X)$ es un cuerpo.

En efecto, si (f,U) representa la función racional $\varphi : X \dashrightarrow k$ no-nula,

$$V = \{x \in U \text{ tal que } f(x) \neq 0\}$$

es denso en X (pues X es irreducible), y luego podemos considerar como inverso multiplicativo a $\frac{1}{\varphi} : X \dashrightarrow k$ dada por la clase de $(\frac{1}{f}, V)$.

En general, si $X_1, \dots, X_m$ son componentes irreducibles de X se tiene

$$k(X) \cong k(X_1) \times \cdots \times k(X_m).$$

Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad algebraica afín *irreducible*, i.e., $\mathscr{O}(X)$ dominio entero. Veamos que $k(X) \cong \mathrm{Fr}(\mathscr{O}(X))$ es su cuerpo de fracciones:

Si $\frac{f}{g} \in \mathrm{Fr}(\mathscr{O}(X))$, le asociamos la función racional $[(\frac{f}{g}, U_g)]$, donde

$$U_g = \{x \in X \text{ tal que } g(x) \neq 0\}$$

es un abierto principal afín en X.

Recíprocamente, si $\varphi : X \dashrightarrow k$ está definida por la función $f : U \to k$ entonces $Y = X \setminus U$ cerrado Zariski y luego $\exists g \in \mathscr{O}(X) \setminus \{0\}$ tal que $U_g \subseteq U$.

Reemplazando U por U_g, y recordando $\mathscr{O}(U_g) \cong \mathscr{O}(X)_g$ localización en g, existen $u \in \mathscr{O}(X)$ y $N \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tal que $f = \frac{u}{g^N}$ en U_g. Así, podemos asociarle a φ el elemento $\frac{u}{g^N}$ de $\mathrm{Fr}(\mathscr{O}(X))$. $\square$

Ejemplo: $k(\mathbb{A}^n) \cong k(X_1, \ldots, X_n)$ cuerpo de funciones racionales. Dado que los abiertos estándar $U_i \cong \mathbb{A}^n$ de $\mathbb{P}^n$ son densos, $k(\mathbb{P}^n) \cong k(X_1, \ldots, X_n)$.

Sean X e Y variedades algebraicas, y consideremos pares (f,U) donde $U \subseteq X$ **abierto denso** de X y $f : U \to Y$ morfismo regular, y definamos

$$(f,U) \sim (g,V) \text{ si } f|_{U\cap V} = g|_{U\cap V}.$$

La clase de equivalencia $[(f,U)]$, que será denotada $f : X \dashrightarrow Y$, es llamada una **aplicación racional** de X a Y. Tal como antes:

1. Por definición, $k(X) = \{f : X \dashrightarrow \mathbb{A}^1 \text{ aplicación racional}\}$.
2. El dominio de definición de $\varphi : X \dashrightarrow Y$ se define como antes. En particular, φ es un **morfismo regular** si y sólo si $\mathrm{Dom}(\varphi) = X$.
3. Dada $\varphi : X \dashrightarrow Y$ aplicación racional, definimos su **imagen** como $\mathrm{Im}(\varphi) := \varphi(\mathrm{Dom}(\varphi))$, i.e., la imagen del dominio de φ.

Sea $\varphi : X \dashrightarrow Y$ una aplicación racional. Decimos que φ es:

1. **Aplicación birracional:** si posee inversa racional, i.e., si existe $\varphi^{-1} =: \psi : Y \dashrightarrow X$ aplicación racional tal que:
   (a) $\overline{\mathrm{Im}(\varphi)} \cap \mathrm{Dom}(\psi) \neq \varnothing$ y $\overline{\mathrm{Im}(\psi)} \cap \mathrm{Dom}(\varphi) \neq \varnothing$, y
   (b) $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}$ y $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}$, en los dominios respectivos.

   Las identidades $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}$ y $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}$ deben ser entendidas como igualdades entre clases de equivalencias de aplicaciones racionales.
2. **Morfismo birracional:** si es aplicación birracional con $\mathrm{Dom}(\varphi) = X$, i.e., $\varphi : X \to Y$ regular pero $\varphi^{-1} : Y \dashrightarrow X$ puede no serlo.

En general, definimos el **grupo de automorfismos birracionales** como

$$\mathrm{Bir}(X) := \{f : X \dashrightarrow X \text{ aplicación birracional}\},$$

que tiene como sub-grupo al **grupo de automorfismos birregulares**

$$\mathrm{Aut}(X) := \{f : X \to X \text{ isomorfismo regular}\}.$$

La **involución de Cremona** es la aplicación racional dada por

$$f : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2,\ [x_0, x_1, x_2] \longmapsto \left[\frac{1}{x_0}, \frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}\right] \overset{\text{def}}{=} [x_1x_2, x_0x_2, x_0x_1].$$

Notar que $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{P}^2 \setminus \{p_0, p_1, p_2\}$, donde $p_0 = [1, 0, 0]$, $p_1 = [0, 1, 0]$ y $p_2 = [0, 0, 1]$. Además, $f \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$.

El grupo $\mathrm{Cr}_n(k) := \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n(k))$ es llamado el **grupo de Cremona**. Un resultado de M. Noether y Castelnuovo afirma que $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ está generado por $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C}) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})/\langle \lambda\, \mathrm{I}_3,\ \lambda \in \mathbb{C}^* \rangle$ y la involución de Cremona.

Ejercicio: Sea

$$f : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3,\ [x_0, x_1, x_2, x_3] \longmapsto [x_0x_3, x_1x_3, x_2x_3, x_0^2 - x_1x_2].$$

Determinar $\mathrm{Dom}(f)$, probar que $f \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^3)$ y calcular $f^{-1} : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$.

Aplicaciones dominantes

La siguiente definición es fundamental en *geometría birracional*.

Definición (aplicación dominante)

Sea $f : X \dashrightarrow Y$ una aplicación racional entre variedades algebraicas.

Decimos que f es **dominante** si $\mathrm{Im}(f) \overset{\text{def}}{=} f(\mathrm{Dom}(f))$ es densa en Y.

En particular, si $g : Y \dashrightarrow Z$ es una aplicación racional arbitraria, entonces la composición $g \circ f : X \dashrightarrow Z$ está bien definida en este caso.

Observación clave

Sean $X \subseteq \mathbb{A}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ variedades algebraicas afines y $f : X \to Y$ morfismo regular. Entonces, f es dominante $\Leftrightarrow$ $f^* : \mathscr{O}(Y) \to \mathscr{O}(X)$ es inyectivo.

Prueba: $(\Rightarrow)$ Sea $u \in \ker(f^*)$, i.e., $f^*(u) \overset{\text{def}}{=} u \circ f = 0$ en $\mathscr{O}(X)$. Entonces, $u = 0$ en $f(X) \subseteq Y$ y luego $u = 0$ en $\overline{f(X)}^{\mathrm{Zar}} = Y$.

$(\Leftarrow)$ Si f **no** es dominante $Z := \overline{f(X)}^{\mathrm{Zar}} \subsetneq Y$ cerrado propio, y $\exists u : Y \to k$ regular tal que $u|_Z = 0$ pero $u \neq 0$ en $\mathscr{O}(Y)$, i.e., $u \in \ker(f^*)$ no-trivial. $\square$

Pullback via f dominante

Una aplicación de lo anterior es que variedades "parametrizadas" por variedades irreducibles (e.g. $\{(x,y) \in \mathbb{A}^2,\ y^2 = x^3\}$) son irreducibles:

Si $f : X \to Y$ un morfismo regular **dominante** entre variedades algebraicas afines. Entonces, si X es irreducible entonces Y es irreducible también: $f^* : \mathscr{O}(Y) \hookrightarrow \mathscr{O}(X)$ identifica $\mathscr{O}(Y)$ con una sub-álgebra del dominio entero $\mathscr{O}(X)$, y luego $\mathscr{O}(Y)$ es un dominio entero también, i.e., Y irreducible. $\square$

Pullback via f dominante: ¡Teoría de cuerpos!

Análogamente a la Observación clave, si $f : X \dashrightarrow Y$ aplicación racional *dominante* entre variedades algebraicas arbitrarias, entonces el pullback de funciones racionales (que está bien definido pues f es dominante)

$$f^* : k(Y) \hookrightarrow k(X),\ u \longmapsto u \circ f \text{ morfismo inyectivo de } k\text{-álgebras.}$$

Notar que $f^*|_k = \mathrm{Id}_k$ a nivel de funciones constantes.

Sean X e Y variedades algebraicas **irreducibles**, y sea

$$\varphi : k(Y) \hookrightarrow k(X) \text{ morfismo de } k\text{-extensiones de cuerpo.}$$

Entonces, $\exists!\ f : X \dashrightarrow Y$ aplicación racional **dominante** tal que $\varphi = f^*$.

Prueba: Sea $U \subseteq X$ (resp. $V \subseteq Y$) abierto no-vacío (y luego denso). Como $k(X) \cong k(U)$ y $k(Y) \cong k(V)$, asumimos X e Y **afines**. Así, $k(Y) \cong \mathrm{Fr}(B)$ donde $B = \mathscr{O}(Y) \cong k[Y_1, \ldots, Y_m]/\mathcal{I}(Y)$ con generadores $y_1, \ldots, y_m \in \mathscr{O}(Y)$. Si $\varphi(y_i) = \frac{u_i}{g_i} \in k(X)$, consideramos el abierto afín

$$U := U_{g_1} \cap \cdots \cap U_{g_m} \subseteq X \text{ donde cada } \varphi(y_i) \text{ es regular.}$$

Así, $\varphi|_B : \mathscr{O}(Y) \to k(X)$ se factoriza en $\widetilde{\varphi} : \mathscr{O}(Y) \to \mathscr{O}(U)$ y sabemos que este último es "geométrico", i.e., $\exists f : U \to Y$ regular tal que $\widetilde{\varphi} = f^*$. Luego, la clase $[(f, U)]$ define una aplicación racional $f : X \dashrightarrow Y$ con $\varphi = f^*$.

Para ver que f es dominante consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathscr{O}(Y) \arrow[r, "\widetilde{\varphi}=f^*"] \arrow[d, hook] & \mathscr{O}(U) \arrow[d, hook] \\ k(Y) \arrow[r, hook, "\varphi"] & k(X) \end{tikzcd}$$

Luego, $\widetilde{\varphi} = f^* : \mathscr{O}(Y) \hookrightarrow \mathscr{O}(U)$ es inyectiva, i.e., $f : U \to Y$ dominante.

Unicidad de f: si $g^* = \varphi$ con otra aplicación racional $g : X \dashrightarrow Y$, entonces $f^*(y_i) = g^*(y_i)$ en $k(X)$ y así f y g coinciden en el abierto denso $U \subseteq X$. $\square$

Dos variedades algebraicas X e Y son **birracionales**, y escribimos $X \sim_{\mathrm{bir}} Y$, si existen abiertos densos $U \subseteq X$ y $V \subseteq Y$ tales que $U \cong V$.

Sean X e Y variedades algebraicas **irreducibles**. Entonces,

$X \sim_{\mathrm{bir}} Y \Leftrightarrow$ las extensiones $k(X) \cong k(Y)$ son k-isomorfas.

Prueba de ($\Leftarrow$): Dado $\varphi : k(Y) \xrightarrow{\sim} k(X)$, sea $f : X \dashrightarrow Y$ (resp. $g : Y \dashrightarrow X$) racional dominante tal que $f^* = \varphi$ (resp. $g^* = \varphi^{-1}$).

Sea $U = \mathrm{Dom}(f) \subseteq X$ y $V = \mathrm{Dom}(g) \subseteq Y$ y, achicando U si fuera necesario, suponemos que $f(U) \subseteq V$. Por unicidad de f y g, $g(f(x)) = x \ \forall x \in U$.

Del mismo modo, si consideramos el abierto denso $W := g^{-1}(U) \subseteq Y$, entonces $f(g(y)) = y \ \forall y \in Y$ y $f(U) \subseteq W$. Así, $f|_U : U \to W$ y $g|_W : W \to U$ son morfismos regulares y son inversos uno del otro. $\square$

Una variedad algebraica irreducible X es llamada una **variedad racional** si $X \sim_{\text{bir}} \mathbb{A}^n$ para cierto $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, i.e., si existe $U \subseteq X$ abierto denso que es isomorfo a un abierto denso de un espacio afín, i.e., si $k(X) \cong k(T_1, \ldots, T_n)$.

Ejemplo: El espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ y la grassmanniana $\mathrm{Gr}(m, n)$ son variedades racionales. Sin embargo, $C = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2$ tal que $y^2 = x^3 - 1\}$ **no es** birracional a $\mathbb{A}^1$ (Ejercicio).

Cultura general

Una variedad algebraica X es **unirracional** si existe una aplicación *dominante* (no necesariamente birracional) $\mathbb{A}^n \dashrightarrow X$ para cierto $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

En los años 1970 se descubrieron los primeros ejemplos de variedades unirracionales que **no** son racionales (Artin-Mumford, Clemens-Griffiths, Iskovskikh-Manin). Por ejemplo, la hipersuperficie cúbica

$$X = \{[x_0, \ldots, x_4] \in \mathbb{P}^4 \text{ tal que } x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^4$$

es unirracional pero no es racional.