Geometría Algebraica

Clase 8

Pedro Montero

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

23 de Agosto de 2023

§2.7 Variedades algebraicas proyectivas

Recuerdo

Una variedad algebraica X es **proyectiva** si es isomorfa a una subvariedad cerrada de algún espacio proyectivo, i.e., si existe

$$\iota : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$$

incrustación cerrada para algún $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

Caracterización de compacidad en Topología

Sea X un espacio topológico. Entonces, X es compacto si y sólo si para todo espacio topológico Y la proyección

$$\mathrm{pr}_Y : X \times Y \longrightarrow Y,\ (x, y) \longmapsto y$$

es una función **cerrada** (i.e., la imagen de un cerrado es un cerrado). Aquí, $X \times Y$ está dotado de la topología producto usual.

Sea X una variedad algebraica proyectiva. Entonces, para *toda* variedad algebraica Y la proyección

$$\mathrm{pr}_Y : X \times Y \longrightarrow Y,\ (x, y) \longmapsto y$$

es una función **cerrada**.

Todo cerrado de $X \subseteq \mathbb{P}^n$ es cerrado de $\mathbb{P}^n$: podemos asumir que $X = \mathbb{P}^n$. Que f sea cerrada es un enunciado *local* en Y y así, como antes, podemos asumir $Y = \mathbb{A}^m$. Sea $Z \subseteq X \times Y \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m$ cerrado Zariski dado por

$$p_1([x], y) = \ldots = p_\ell([x], y) = 0 \text{ en } \mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m$$

homogéneas en $[x] = [x_0, \ldots, x_n]$, y veamos que $\mathrm{pr}_Y(Z) \subseteq \mathbb{A}^m$ es cerrado:

Sea $y_0 \notin \mathrm{pr}_Y(Z)$, i.e., los $p_i(x, y_0)$ sólo poseen $0 \in \mathbb{A}^{n+1}$ como cero común. El Nullstellensatz proyectivo implica que

$$(\star) \qquad \mathfrak{m}_0^r \subseteq \langle p_1(x, y_0), \ldots, p_\ell(x, y_0) \rangle \text{ para cierto } r \in \mathbb{N}^{\geq 1},$$

donde $\mathfrak{m}_0 = \langle x_0, \ldots, x_n \rangle$ es el ideal irrelevante.

$\mathfrak{m}_0^r \overset{\text{def}}{=} \langle x_0, \ldots, x_n \rangle^r$ contiene al k-e.v. $A_r := k[x_0, \ldots, x_n]_r$ de polinomios homogéneos de grado r. Luego, $\mathfrak{m}_0^r \subseteq \langle p_1(x, y_0), \ldots, p_\ell(x, y_0) \rangle$ implica que

$$\varphi : A_{r-d_1} \oplus \cdots \oplus A_{r-d_\ell} \twoheadrightarrow A_r, \ (q_1, \ldots, q_\ell) \longmapsto \sum_{i=1}^{\ell} q_i(x) p_i(x, y_0)$$

es una aplicación k-lineal sobreyectiva, con $d_i := \deg_x(p_i)$.

Que φ sea sobreyectiva es una condición abierta para la topología de Zariski ($\Leftrightarrow$ el determinante de una submatriz de tamaño maximal sea no-nulo).

Así, $\exists\, y_0 \in V \subseteq \mathbb{A}^m$ abierto tal que $y \in V$ *fijo*, el conjunto de soluciones de

$$p_1([x], y) = \ldots = p_\ell([x], y) = 0$$

es vacío en $\mathbb{P}^n$, i.e., $y \notin \mathrm{pr}_Y(Z)$: el complemento de $\mathrm{pr}_Y(Z)$ es **abierto**. $\square$

Toda "realización" de una variedad proyectiva en $\mathbb{P}^n$ es *siempre cerrada*:

Sea X variedad algebraica proyectiva. Para toda variedad algebraica Y y todo $f : X \to Y$ morfismo regular, $f(X)$ es un **cerrado** de Y.

Prueba: El grafo $\Gamma_f \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, f(x)),\ x \in X\}$ es la preimagen de $\Delta_Y \subseteq Y \times Y$ por $(f \times \mathrm{Id}_Y) : X \times Y \longrightarrow Y \times Y$, $(x, y) \longmapsto (f(x), y)$. Como Y **separada**, $\Gamma_f \subseteq X \times Y$ cerrado. Así, $\mathrm{pr}_Y(\Gamma_f) \stackrel{\text{def}}{=} f(X)$ es un cerrado de Y. $\square$

Sea X variedad algebraica proyectiva y sea $f : X \to k$ función regular. Entonces, $f(X)$ es un **conjunto finito**[a].

[a]Veremos más adelante que si X irreducible entonces $\Gamma(X, \mathscr{O}_X) \cong k$.

Prueba: Consideremos $F : X \xrightarrow{f} k = \mathbb{A}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^1$, $x \longmapsto [f(x), 1]$. Entonces, $F(X) \subseteq \mathbb{P}^1$ cerrado $\neq \mathbb{P}^1$ (pues $F(X) = f(X) \subseteq \mathbb{A}^1$). Luego, $f(X)$ es un conjunto finito de puntos. $\square$

Si bien $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m \cong \mathbb{A}^{n+m}$, en $\mathbb{P}^2$ todo par de rectas (i.e., subespacios lineales $\ell \cong \mathbb{P}^1$ de dimensión 1) se intersectan, mientras que en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ **no** es así.

La variedad $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ es isomorfa a una variedad algebraica proyectiva

$$\Sigma_{n,m} \subseteq \mathbb{P}^N \text{ donde } N = (n+1)(m+1) - 1 \text{ (\textbf{variedad de Segre})}.$$

Así, producto finito de variedades proyectivas es una variedad proyectiva.

Prueba: Sean $V \cong k^{n+1}$ y $W \cong k^{m+1}$ e.v. con $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^n$ y $\mathbb{P}(W) \cong \mathbb{P}^m$. Entonces, $V \otimes W \cong k^{(n+1)(m+1)}$ y $V \times W \longrightarrow V \otimes W$, $(v, w) \longmapsto v \otimes w$ induce la **incrustación de Segre**

$$\varphi : \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(W) \longrightarrow \mathbb{P}(V \otimes W) \cong \mathbb{P}^N, \ ([v], [w]) \longmapsto [v \otimes w]$$

donde $N = (n+1)(m+1) - 1 = mn + m + n$.

Incrustamiento de Segre

Si elegimos bases $(e_0, \dots, e_n)$ y $(f_0, \dots, f_m)$ de V y W, y escribimos $v = \sum_{i=0}^n x_i e_i$ y $w = \sum_{j=0}^m y_j f_j$, entonces $v \otimes w = \sum_{i,j} x_i y_j e_i \otimes f_j$. En particular,

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m &\longrightarrow \mathbb{P}^N \\ ([x_0, \dots, x_n], [y_0, \dots, y_m]) &\longmapsto [x_0 y_0, x_0 y_1, \dots, x_i y_j, \dots, x_n y_m] \end{aligned}$$

morfismo regular. Veamos que $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \cong \Sigma_{n,m} := \varphi(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) \subseteq \mathbb{P}^N$ cerrado:

Sean $z = \sum_{k,l} z_{kl} e_k \otimes f_l$ coord. homogéneas de $\mathbb{P}(V \otimes W) \cong \mathbb{P}^N$ y sea $W_{ij} = \{[z] \in \mathbb{P}^N$ tal que $z_{ij} \neq 0\} \cong \mathbb{A}^N$. Entonces, $\varphi^{-1}(W_{ij}) = U_i \times V_j$ con

$$U_i = \{[x] \in \mathbb{P}^n \text{ tal que } x_i \neq 0\} \text{ y } V_j = \{[y] \in \mathbb{P}^m \text{ tal que } y_j \neq 0\}.$$

Si $i = j = 0$, $\varphi|_{U_0 \times V_0} : U_0 \times V_0 \to W_{0,0}$ está dada por

$$([1, x_1, \dots, x_n], [1, y_1, \dots, y_m]) \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_n \\ y_1 & x_1 y_1 & \cdots & x_n y_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_m & x_1 y_m & \cdots & x_n y_m \end{pmatrix}$$

i.e., $U_0 \times V_0 \cong$ **cerrado** de matrices en $W_{0,0}$ de rango ≤ 1.

El mismo argumento es válido para índices (i, j) arbitrarios, y obtenemos así un isomorfismo entre $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ y la subvariedad cerrada $\Sigma_{n,m} \subseteq \mathbb{P}^N$ dada por

$$\operatorname{rango}\begin{pmatrix} z_{00} & z_{01} & \cdots & z_{0n} \\ z_{10} & z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_{m0} & z_{m1} & \cdots & z_{mn} \end{pmatrix} \leq 1,$$

que a su vez equivale a

$$\det\begin{pmatrix} z_{ik} & z_{il} \\ z_{jk} & z_{jl} \end{pmatrix} = z_{ik}z_{jl} - z_{il}z_{jl} = 0$$

para todos $i, j \in \{0, \dots, m\}$ y $k, l \in \{0, \dots, n\}$. $\square$

La incrustación de Segre

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 &\hookrightarrow \mathbb{P}^3 \\ ([x_0, x_1], [y_0, y_1]) &\longmapsto [x_0 y_0, x_0 y_1, x_1 y_0, x_1 y_1] \end{aligned}$$

permite identificar $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ con la superficie cuádrica $S \subseteq \mathbb{P}^3$ dada por

$$\det \begin{pmatrix} z_0 & z_1 \\ z_2 & z_3 \end{pmatrix} = z_0 z_3 - z_1 z_2 = 0.$$

Notar además que la forma cuadrática

$$Q : k^4 \longrightarrow k, \ (z_0, z_1, z_2, z_3) \longmapsto z_0 z_3 - z_1 z_2$$

es *no-degenerada*. Más generalmente, si $\mathrm{car}(k) \neq 2$ entonces toda forma cuadrática no-degenerada $Q : k^4 \to k$ puede ser diagonalizada y luego

$$S = \{[z] \in \mathbb{P}^3 \text{ tal que } Q(z) = 0\} \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1.$$

Si $V \cong k^{n+1}$ e.v. y $d \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, la d-ésima *potencia simétrica* $S^d V$ es un k-espacio vectorial de dimensión $\dim_k S^d V = \binom{n+d}{d}$. Además,

$(S^d V)^\vee \cong k[X_0, \dots, X_n]_d$ e.v. de polinomios homogéneos de grado d en $n +$

Sea $N := \binom{n+d}{d} - 1$. La **incrustación de Veronese** es la aplicación

$$\nu_d : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(S^d V) \cong \mathbb{P}^N, \ [v] \longmapsto [\mathrm{ev}_v]$$

donde $\mathrm{ev}_v \in (S^d V^\vee)^\vee \cong S^d V$ asocia a $f \in (S^d V)^\vee$ su valor $\mathrm{ev}_v(f) = f(v)$.

En coordenadas homogéneas tenemos que

$$\nu_d : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^N, \ [x_0, \dots, x_n] \longmapsto [x_0^d, x_0^{d-1} x_1, \dots, x_n^d]$$

y donde en la fórmula intervienen *todos*[1] los monomios homogéneos de grado d en las variables $x_0, \dots, x_n$.

[1] En ocasiones, conviene escoger un *orden monomial* para agrupar dichos polinomios.

Sea $V_{n,d} := \nu_d(\mathbb{P}^n) \subseteq \mathbb{P}^N$ la **variedad de Veronese**. Como antes (Ejercicio):

- La variedad $V_{n,d} \subseteq \mathbb{P}^N$ es un cerrado de Zariski dado por las ecuaciones $z_i z_j = z_k z_l$, donde los índices $i, j, k, l \in \{0, \dots, N\}$ verifican $i + j = k + l$.
- El morfismo ν_d es un incrustamiento cerrado, i.e., induce $\mathbb{P}^n \cong V_{n,d}$.

Los ejemplos más emblematicos de variedades de Veronese son:

1. La imagen de $\nu_3 : \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^3$, $[x, y] \longmapsto [x^3, x^2 y, x y^2, y^3]$ es la **cúbica torcida** (o *twisted cubic*) $C \subseteq \mathbb{P}^3$ dada por
$$z_0 z_3 = z_1 z_2,\ z_1^2 = z_0 z_2,\ z_2^2 = z_1 z_3$$
en $\mathbb{P}^3$ con coordenadas homogéneas $[z_0, \dots, z_3]$.
2. La imagen de
$$\nu_2 : \mathbb{P}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^5,\ [x, y, z] \longmapsto [x^2, xy, xz, y^2, yz, z^2]$$
es conocida como la **superficie de Veronese** en $\mathbb{P}^5$.

Incrustamiento de Veronese

Un aplicación útil de la incrustación de Veronese es el siguiente resultado:

Sea $X = V(f) \subseteq \mathbb{P}^n$ hipersuperficie de grado d. Entonces,

$$X \cong \text{intersección de } V_{n,d} \subseteq \mathbb{P}^N \text{ y un hiperplano } H \cong \mathbb{P}^{N-1}.$$

En particular, $\mathbb{P}^n \smallsetminus X$ es una variedad algebraica *afín*.

Prueba: Supongamos $f(x_0, \ldots, x_n) = \sum_{|\mathbf{k}|=d} a_{\mathbf{k}} x^{\mathbf{k}}$, donde $x^{\mathbf{k}} := x_0^{k_0} \cdots x_n^{k_n}$. Así, si $z_{\mathbf{k}}$ es la coordenada de $\mathbb{P}^N$ correspondiente al monomio $x^{\mathbf{k}}$, entonces $\nu_d(X) \stackrel{\text{def}}{=} \nu_d(\mathbb{P}^n) \cap H \subseteq \mathbb{P}^N$, donde

$$H = \left\{ [z] \in \mathbb{P}^N \text{ tal que } \sum_{|\mathbf{k}|=d} a_{\mathbf{k}} z_{\mathbf{k}} = 0 \right\} \cong \mathbb{P}^{N-1} \text{ hiperplano.}$$

Así, como $\mathbb{P}^N \smallsetminus H \cong \mathbb{A}^N$, tenemos $\mathbb{P}^n \smallsetminus X$ es isomorfa al cerrado $\nu_d(X) \cap (\mathbb{P}^N \smallsetminus H)$ de $\mathbb{A}^N$, y luego $\mathbb{P}^n \smallsetminus X$ es una variedad algebraica afín. $\square$

Sea $V \cong k^n$ un k-e.v. de dimensión $n \geq 2$ y sea $m \in \{1, \ldots, n-1\}$. Definimos

$$\mathrm{Gr}(m, V) := \{W \subseteq V \text{ sub-espacio vectorial tal que } \dim_k(W) = m\},$$

o símplemente $\mathrm{Gr}(m, n)$. Así, tenemos que $\mathbb{P}(V) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Gr}(1, V)$. Además:

1. Un sub-e.v. $W \cong k^m$ en $V \cong k^n$ corresp. a $\mathbb{P}(W) \cong \mathbb{P}^{m-1}$ subespacio lineal en $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^{n-1}$. Así, $\mathrm{Gr}(m, V)$ es el **conjunto de todos los subespacios lineales $\Lambda \cong \mathbb{P}^{m-1}$ de $\mathbb{P}(V)$**. Escribimos en tal caso

$$\mathbb{G}(m-1, \mathbb{P}(V)) := \{\Lambda \subseteq \mathbb{P}(V) \text{ sub-espacio lineal tal que } \Lambda \cong \mathbb{P}^{m-1}\},$$

o símplemente $\mathbb{G}(m-1, n-1)$.

2. Sea $W \subseteq V$ sub-e.v. y consideremos

$$W^\circ = \{f \in V^\vee \text{ tal que } f(w) = 0 \text{ para todo } w \in W\} \subseteq V^\vee.$$

Entonces, $\dim(W) + \dim(W^\circ) = \dim(V) = \dim(V^\vee) = n$ y luego

$$\mathrm{Gr}(m, V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gr}(n-m, V^\vee), \ [W] \longmapsto [W^\circ] \quad \text{biyección.}$$

Incrustamiento de Plücker

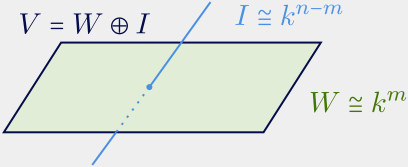
Teorema (Julius Plücker ≈ 1865)

Sea $V \cong k^n$ e.v. y sea $m \in \{1, \dots, n-1\}$. Entonces, $\mathrm{Gr}(m, V)$ es una variedad algebraica proyectiva, llamada **grassmannianna**.

Prueba: Construyamos un atlas de $\mathrm{Gr}(m, V)$ por abiertos $U_I \cong \mathbb{A}^{m(n-m)}$:

Sea $k^{n-m} \cong I \subseteq V$ sub-e.v. de codimensión n y definamos

$$U_I := \{[W] \in \mathrm{Gr}(m, V) \text{ tal que } W \cap I = \{0\}\}$$



Así, $U_I \cong$ cerrado algebraico de $\mathrm{Hom}_k(V, I) \cong M_{(n-m)\times n}(k) \cong \mathbb{A}^{n(n-m)}$ dado por las proyecciones $p_W : V \to I$ con $\ker(p_W) = W$.

Explícitamente, $U_I \xrightarrow{\cong} \{p \in \mathrm{Hom}_k(V, I)$ tal que $p|_I = \mathrm{Id}_I\}$, $W \longmapsto p_W$ con inversa $p \longmapsto \ker(p) \in U_I$. En coordenadas, $V = W_0 \oplus I$ corresponde a

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \quad W_0 & \qquad I \end{array} & \\ P = \left(\begin{array}{ccc|ccc} * & \cdots & * & 1 & & 0 \\ \vdots & * & \vdots & & \ddots & \\ * & \cdots & * & 0 & & 1 \end{array} \right) & I \end{array}$$

y así $U_I \cong \mathbb{A}^{m(n-m)}$. Los $\{U_I\}_{I \in \mathrm{Gr}(n-m,V)}$ cubren $\mathrm{Gr}(m, V)$ y luego definen una topología de Zariski en $\mathrm{Gr}(m, V)$, que además es noetheriano.

Cambio de cartas: Sean $I, J \subseteq V$ de dimensión $n - m$ y notemos que $U_I \cap U_J \subseteq U_I \cong$ proyecciones $p_W : V \to I$ con $W \cap J \overset{\text{def}}{=} \ker(p_W) \cap J = \{0\}$, i.e.,

$$p_W|_J : J \xrightarrow{\sim} I \text{ es inyectiva (y luego un isomorfismo).}$$

Esto es un abierto Zariski de $U_I \cong \mathbb{A}^{m(n-m)}$ (dado por $\det(M) \neq 0$ para cierta submatriz M). Si $p \in U_I \cap U_j \subseteq U_I$ entonces $p' := (p|_J)^{-1} \circ p \in \mathrm{Hom}_k(V, J)$ pertenece a $U_I \cap U_J \subseteq U_J$, y $p \longmapsto p'$ es un isomorfismo birregular (lineal).

Así, $\mathrm{Gr}(m,V)$ es una variedad algebraica. Veamos que es **proyectiva**:

Recordar que si $V \cong k^n$ e.v. y $d \in \{1,\ldots,n\}$, entonces la d-ésima *potencia exterior* $\bigwedge^d V$ es k-e.v. de $\dim_k(\bigwedge^d V) = \binom{n}{d}$. Si $(e_1,\ldots,e_n)$ base de V entonces $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_d}\}_{1 \le i_1 < \cdots < i_d \le n}$ es una base de $\bigwedge^d V$. Definimos

$$\varphi : \mathrm{Gr}(m,V) \longrightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^m V) \cong \mathbb{P}^N,\ [W] \longmapsto [\bigwedge^m W] \quad \textbf{(Plücker)}$$

Notar que $(w_1,\ldots,w_m)$ base de W, entonces $\bigwedge^m W$ generada por el *tensor simple* $w_1 \wedge \cdots \wedge w_m$ y *toda* recta en $\bigwedge^m V$ generada por un tensor simple $w_1 \wedge \cdots \wedge w_m \neq 0$ define $W := \mathrm{Vect}_k(w_1,\ldots,w_m)$ de dimensión m de V, i.e., φ es biyectiva sobre su imagen. Veamos que es un **incrustamiento cerrado**:

φ regular: Fijamos una base de V y representamos $W = \mathrm{Vect}_k(w_1,\ldots,w_m)$ en $\mathrm{Gr}(m,V)$ usando filas de una matríz

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \end{pmatrix}$$

donde la i-ésima fila corresponde a w_i.

Luego, $w_1 \wedge \cdots \wedge w_m = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n} p_{i_1,\ldots,i_m}(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_m})$ donde $p_{i_1,\ldots,i_m} = \det(p_{j,i_\ell})_{1 \leq j,\ell \leq m}$ sub-determinante de la matriz obtenida a partir de las columnas $i_1, \ldots, i_m$. Así, φ es regular pues cada $p_{i_1,\ldots,i_m}$ lo es[2].

φ isomorfismo sobre su imagen: Sea $I \in \mathrm{Gr}(n-m, V)$ y $(e_1, \ldots, e_n)$ base de V tal que $I = \mathrm{Vect}_k(e_{m+1}, \ldots, e_n)$. Sea $W \in U_I$ dado por la matriz

$$P = \left(\begin{array}{ccc|ccc} p_{11} & \cdots & p_{1,m-n} & 1 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ p_{m1} & \cdots & p_{m,m-n} & 0 & & 1 \end{array} \right)$$

Notar que cada p_{ij} se obtiene un como sub-determinante $m \times m$ de P, i.e.,

$$\varphi|_{U_I} : U_I \xrightarrow{\sim} \varphi(U_I) \subseteq \mathbb{P}(\textstyle\bigwedge^m V)$$

es un isomorfismo sobre su imagen para todo I.

[2] Los $\{p_{i_1,\ldots,i_m}\}$ son llamadas **coordenadas de Plücker** de W en $\mathbb{P}(\bigwedge^m V)$.

$G := \varphi(\mathrm{Gr}(m, V)) \subseteq \mathbb{P}(\bigwedge^m V)$ cerrado: Sea $v \neq 0$ en V y sea $\omega \neq 0$ tensor no-nulo en $\bigwedge^m V$. Si completamos $e_1 = v$ en una base $(e_1, \dots, e_n)$ de V, notamos que $\omega \wedge v = 0$ en $\bigwedge^{m+1} V$ si y sólo si[3] $\omega = v \wedge \eta$ para cierta $\eta \in \bigwedge^{m-1} V$.

Inductivamente, $\omega \in \bigwedge^m V$ es un *tensor simple* (i.e., de la forma $v_1 \wedge \cdots \wedge v_m$ con $v_i \in V$) si y sólo si el kernel de la aplicación lineal

$$\psi_\omega : V \longrightarrow \bigwedge^{m+1} V,\ v \longmapsto \omega \wedge v$$

verifica $\dim_k(\ker \psi_\omega) \geq m$ (elementos l.i. del kernel pueden ser usados para escribir $\omega = v_1 \wedge \eta_1$, y luego $\eta_1 = v_2 \wedge \eta_2$, etc.), i.e., $\mathrm{rg}(\psi_\omega) \leq n - m$.

Esto último es una condición **cerrada** en $\mathbb{P}(\bigwedge^m V)$: es la anulación de todos los sub-determinantes $(n-m+1) \times (n-m+1)$ de la matriz de ψ_ω. $\square$

[3] Explícitamente, si escribimos $\omega = \sum \lambda_{i_1,\dots,i_m} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_m}$ entonces $\omega \wedge e_1 = 0$ si y sólo si cada sumando $\lambda_{i_1,\dots,i_m} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_m}$ contiene a e_1 (i.e., $e_{i_\ell} = e_1$ para algún ℓ).

Incrustamiento de Plücker

El caso $m = 2$ es especialmente interesante[4]. Por ejemplo (Ejercicio):

1. El tensor $\omega \in \bigwedge^2 V$ es simple si y sólo si $\omega \wedge \omega = 0$ en $\bigwedge^4 V$.
2. La imagen
$$G := \varphi(\mathrm{Gr}(2, V)) \subseteq \mathbb{P}(\bigwedge^2 V)$$
está dada por la intersección de hipersuperficies cuádricas.
3. En particular, la grassmanniana $\mathrm{Gr}(2,4) \cong \mathbb{G}(1,3)$ de rectas $\ell \cong \mathbb{P}^1$ en $\mathbb{P}^3$ es isomorfa a la **cuádrica de Plücker** en $\mathbb{P}(\bigwedge^2 k^4) \cong \mathbb{P}^5$ dada por
$$p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0.$$

[4] Ver el artículo "*On the geometry of Grassmannians*" (1977) por Ron Donagi.