Geometría Algebraica

Clase 7

Pedro Montero

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

21 de Agosto de 2023

§2.6 Producto de variedades y separación

Producto (versión categórica)

Sea $\mathscr{C}$ una categoría y X, Y objetos de $\mathscr{C}$. Un **producto** de X e Y en $\mathscr{C}$ es un tercer objeto Z junto con dos morfismos $p : Z \to X$ y $q : Z \to Y$ verificando la propiedad universal:

Para todo objeto S en la categoría $\mathscr{C}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(S, Z) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(S, X) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(S, Y) \\ f &\longmapsto (p \circ f, q \circ f) \end{aligned}$$

es biyectiva.

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[dr, dotted, "\exists!"] \arrow[drr, bend left, "\widetilde{q}"] \arrow[ddr, bend right, "\widetilde{p}"'] & & \\
& Z \arrow[r, "q"'] \arrow[d, "p"'] & Y \\
& X &
\end{tikzcd}$$

El triple (Z, p, q) es único módulo un único isomorfismo, y se denota por $Z := X \times Y$ y por $\mathrm{pr}_X : X \times Y \to X$, $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \to Y$ las *proyecciones*.

$X = V(f_1, \ldots, f_r) \subseteq \mathbb{A}^n$ e $Y = V(g_1, \ldots, g_s) \subseteq \mathbb{A}^m$ subvariedades afines. Entonces, el producto conjuntista $X \times Y \subseteq \mathbb{A}^{n+m}$ es una subvariedad afín

$$X \times Y \overset{\text{def}}{=} V(f_1(x), \ldots, f_r(x), g_1(y), \ldots, g_s(y)) \subseteq \mathbb{A}^{n+m}$$

y las proyecciones $\mathrm{pr}_1 : X \times Y \longrightarrow X$ y $\mathrm{pr}_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ son regulares.

Para la propiedad universal notar que si S variedad algebraica afín y

$$u : S \to X,\ s \mapsto (u_1(s), \ldots, u_n(s)) \text{ y } v : S \to Y,\ s \mapsto (v_1(s), \ldots, v_m(s))$$

morfismos regulares, entonces el morfismo siguiente es regular:

$$f : S \to X \times Y,\ s \mapsto f(s) := (u_1(s), \ldots, u_n(s), v_1(s), \ldots, v_m(s))$$

Ejemplo: En la categoría $\mathbf{Aff}_{k,\mathsf{red}}$, el espacio afín $\mathbb{A}^{n+m}$ dotado de las proyecciones canónicas $p := \mathrm{pr}_1 : \mathbb{A}^{n+m} \to \mathbb{A}^n$ y $q := \mathrm{pr}_2 : \mathbb{A}^{n+m} \to \mathbb{A}^m$ es el producto de $\mathbb{A}^n$ y $\mathbb{A}^m$.

¡Atención!

La topología de $X \times Y$ **no** es la topología producto, i.e., **no** es la topología generada por abiertos de la forma $U \times V$ con $U \subseteq X$ y $V \subseteq Y$ abiertos.

Ejemplo: Los cerrados en $X = Y = \mathbb{A}^1$ son $\varnothing$, $\mathbb{A}^1$ y los conjuntos finitos. Sin embargo, la variedad producto $X \times Y = \mathbb{A}^2$ posee más cerrados (e.g. *curvas* dadas por $\{f(x,y) = 0\}$ donde $f \in k[X,Y]$ no-constante).

Notar además que a nivel de anillos de funciones regulares

$$k[X] \otimes_k k[Y] \cong k[X,Y].$$

$\mathscr{O}(X \times Y) \cong \mathscr{O}(X) \otimes_k \mathscr{O}(Y)$

Sean $X \subseteq \mathbb{A}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ subvariedades afines, y veamos que

$$\mathscr{O}(X) \otimes_k \mathscr{O}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}(X \times Y), \ \sum_{i,j} a_{ij} f_i(x) \otimes g_j(y) \longmapsto \sum_{i,j} a_{ij} f_i(x) g_j(y)$$

es un isomorfismo:

- **Inyectividad**: Si $\{f_i\}$ (resp. $\{g_j\}$) base de Hamel de $\mathscr{O}(X)$ (resp. $\mathscr{O}(Y)$), entonces $\{f_i \otimes g_j\}$ base del k-e.v. $\mathscr{O}(X) \otimes_k \mathscr{O}(Y)$. Luego, si $\sum_{i,j} a_{ij} f_i(x) \otimes g_j(y)$ verifica que $\sum_{i,j} a_{ij} f_i(x) g_j(y) = 0$ entonces para todo j tenemos $\sum_i a_{ij} f_i(x) = 0$ y así $a_{ij} = 0$.
- **Sobreyectividad**: Si $h(x,y)$ función regular en $X \times Y \subseteq \mathbb{A}^{n+m}$ dada por la restricción de $P(x,y) = \sum_{i,j} P_i(x) Q_j(y) \in \mathscr{O}(\mathbb{A}^{n+m})$, entonces $u_i := P_i|_X \in \mathscr{O}(X)$ y $v_j := Q_j|_Y \in \mathscr{O}(Y)$ permiten escribir a h como la imagen de $\sum_{i,j} u_i \otimes v_j \in \mathscr{O}(X) \otimes_k \mathscr{O}(Y)$. $\square$

Los productos (finitos) existen en la categoría de variedades algebraicas.

Sean X e Y variedades algebraicas con cubrimientos por abiertos afines $\{U_i\}_{i\in I}$ y $\{V_j\}_{j\in J}$, respectivamente. Ya vimos que $U_i\times V_j$ variedad algebraica afín, y luego construímos $Z = X\times Y$ usando el atlas algebraico definido por los conjuntos $Z_{ij} := U_i\times V_j$ con $i\in I$ y $j\in J$, con $Z_{ij}\cap Z_{kl} \overset{\text{def}}{=} (U_i\cap U_k)\times(V_j\cap V_l)$. Concretamente, dotamos al conjunto $X\times Y$ de la topología siguiente:

> *Un* **abierto** *en $Z = X\times Y$ es un subconjunto tal que su intersección con cada Z_{ij} es abierto en Z_{ij} (e.g. cada Z_{kl} es abierto en Z).*

Los U_i y U_j se pegan mediante un atlas (algebraico), y las funciones regulares coinciden en $U_i\cap U_j$. Así, las funciones regulares en Z_{ij} y Z_{kl} coinciden en $Z_{ij}\cap Z_{kl}$, por lo que los $\{Z_{ij}\}_{(i,j)\in I\times J}$ forman un atlas para $Z = X\times Y$.

Si $u : S\to X$ y $v : S\to Y$ morfismos regulares, los $u^{-1}(U_i)\times v^{-1}(V_j)$ forman un cubrimiento de S. La propiedad universal del producto vale *localmente* y luego globalmente (ser regular es una propiedad local). □

Recuerdo: Todo par de abiertos de Zariski no-vacíos de $\mathbb{A}^n$ se intersectan. En particular $\mathbb{A}^n$ **no es** un espacio de Hausdorff.

Por otra parte, si X espacio topológico, son equivalentes (Ejercicio):

1. X es un espacio de Hausdorff, i.e., para todos $x, y \in X$ tales que $x \neq y$ existen abiertos $U, V \subseteq X$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y tales que $U \cap V = \varnothing$.
2. La diagonal
$$\Delta_X := \{(x,x),\ x \in X\}$$
es un **cerrado** en $X \times X$ respecto a la topología producto.

Definición (separación)

Sea X una variedad algebraica. Decimos que X es una variedad algebraica **separada** si la diagonal

$$\Delta_X := \{(x,x),\ x \in X\} \subseteq X \times X$$

es un **cerrado de Zariski** respecto a la topología de la slide anterior.

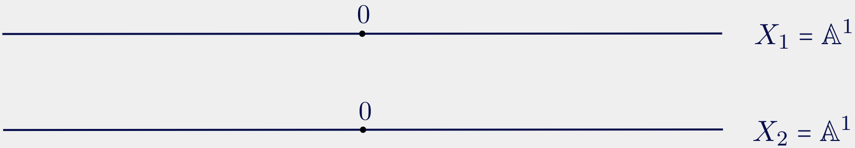
Ejemplo importante: Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ una subvariedad afín y consideremos $(x,y) \notin \Delta_X$, i.e., $x, y \in X$ con $x \neq y$.

Así, existe $f \in \mathscr{O}(X)$ tal que $f(x) \neq f(y)$ (e.g. funciones coordenadas). Luego, la función $h(x,y) \coloneqq f(x) - f(y)$ en $\mathscr{O}(X \times X)$ se anula en Δ_X pero no se anula en (x,y).

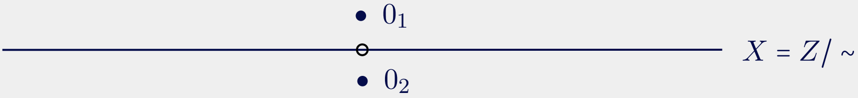
En otras palabras, el abierto principal U_h es una vecindad abierta (de Zariski) del punto (x,y) y por ende $(X \times X) \setminus \Delta_X$ es un abierto. Luego, **toda variedad algebraica afín es separada**.

La recta con dos orígenes

Consideremos dos copias X_1 y X_2 de la recta afín, y sean $U_1 = U_2 = \mathbb{A}^1 \smallsetminus \{0\}$.



Sea $Z := X_1 \coprod X_2 \overset{\text{def}}{=} \mathbb{A}^1 \times \{1, 2\}$, y sea X la variedad algebraica obtenida al pegar X_1 y X_2 a lo largo de los abiertos U_1 y U_2 usando la función identidad, i.e., $X := Z/\sim$ donde $(x; 1) \sim (x; 2)$ si $x \neq 0$.



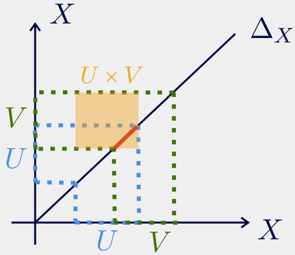
Así, X posee dos orígenes $0_1 := [(0; 1)]$ y $0_2 := [(0; 2)]$. La variedad X **no es separada**, pues $\overline{\Delta_X}^{\mathrm{Zar}}$ contiene a los puntos $(0_1, 0_2), (0_2, 0_1) \in (X \times X) \smallsetminus \Delta_X$.

Propiedad útil

Una de las consecuencias más útiles de la separación (que usaremos cuando discutamos sobre **cohomología de haces**) es la propiedad siguiente:

Sea X una variedad algebraica separada y sean $U, V \subseteq X$ abiertos afines. Entonces, $U \cap V$ es un abierto afín de X.

Notamos que $(U \times V) \cap \Delta_X \cong U \cap V$.



Como $U \times V$ variedad algebraica afín y $\Delta_X \subseteq X \times X$ cerrado de Zariski, el abierto $U \cap V$ es isomorfo a un cerrado de una variedad algebraica afín. $\square$

El **grafo** de $f : X \to Y$ morfismo regular entre variedades algebraicas es

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y \text{ tal que } y = f(x)\} \subseteq X \times Y.$$

El siguiente resultado (Ejercicio) es análogo al *Teorema del grafo cerrado*:

Teorema

Sea X variedad algebraica definida a partir de un atlas $\{\alpha_i : U_i \xrightarrow{\sim} V_i\}_{i\in I}$, donde los $\{U_i\}_{i\in I}$ forman un cubrimiento abierto de X y cada V_i variedad algebraica *separada* (e.g. afín). Entonces, X es separada si y sólo si

> *Para todo par de cartas* distintas α_i *y* α_j, *el grafo* $\Gamma_{ji} := \Gamma_{\psi_{ji}}$ *de* $\psi_{ji} \overset{\text{def}}{=} \alpha_j \circ \alpha_i^{-1} : V_{ij} \xrightarrow{\sim} V_{ji}$ *es cerrado Zariski de* $V_i \times V_j$.

Hint: Para $x \in V_{ij}$ tenemos que

$$(x, \psi_{ji}(x)) \overset{\text{def}}{=} (x, \alpha_j(\alpha_i^{-1}(x)) = (\alpha_i(y), \alpha_j(y)) \text{ donde } y := \alpha_i^{-1}(x) \in U_i \cap U_j.$$

Así, la imagen de $(U_i \times U_j) \cap \Delta_X$ por $\alpha_i \times \alpha_j$ es Γ_{ji} en $V_i \times V_j$.

Espacio proyectivo

Sean $[x, y]$ coordenadas homogéneas en $\mathbb{P}^1$ y sean:

$$U_0 := \{[x, y] \in \mathbb{P}^1 \text{ tal que } x \neq 0\} \text{ y } U_1 := \{[x, y] \in \mathbb{P}^1 \text{ tal que } y \neq 0\}.$$

Consideremos cartas locales dadas por

$$\alpha_0 : U_0 \xrightarrow{\sim} V_0 := \mathbb{A}^1,\ [x, y] \longmapsto \frac{y}{x} \text{ y por } \alpha_1 : U_1 \xrightarrow{\sim} V_1 := \mathbb{A}^1,\ [x, y] \longmapsto \frac{x}{y},$$

con $\alpha_0(U_0 \cap U_1) = \alpha_1(U_0 \cap U_1) = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$. Si z coordenada en $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$, entonces $\psi_{01} := \alpha_1 \circ \alpha_0^{-1}$ está dada por $z \mapsto \frac{1}{z}$. Luego, el grafo de ψ_{01} es

$$\Gamma_\psi = \{(z, w) \in \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 \text{ tales que } zw = 1\},$$

cerrado de Zariski de $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 \cong \mathbb{A}^2$, i.e., $\mathbb{P}^1$ variedad algebraica separada.

De manera similar, se demuestra (Ejercicio):

- El espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ es una variedad algebraica separada.
- Sea X una variedad algebraica separada (e.g. $\mathbb{A}^n$ o $\mathbb{P}^n$). Todo *abierto* $U \subseteq X$ y todo *cerrado* $Y \subseteq X$ son variedades algebraicas separadas.

Convención: En todo lo que sigue del curso, asumiremos que TODAS las variedades algebraicas son separadas.

§2.7 Variedades algebraicas proyectivas

Subvariedades cerradas

Una **subvariedad cerrada** de una variedad algebraica $(X, \mathscr{O}_X)$ es $(Y, \mathscr{O}_Y)$ tal que $Y \subseteq X$ es un cerrado y tal que $\mathscr{O}_Y \cong (\mathscr{O}_X / \mathcal{I}_Y)|_Y$, donde $\mathcal{I}_Y \subseteq \mathscr{O}_X$ es el haz de ideales de funciones regulares que se anulan en Y.

Más aún, si $f : Z \to X$ es un morfismo regular entre variedades algebraicas, decimos que f es una **incrustación cerrada**[1] si f se factoriza como

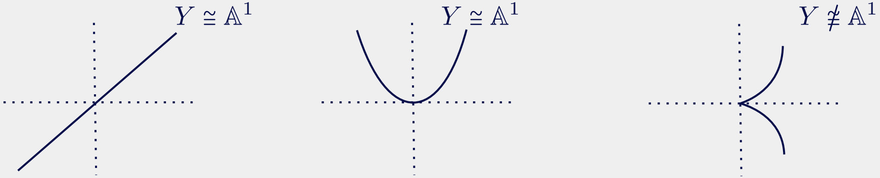
$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\cong", "\text{morfismo birregular}"'] & & X \\ & Y \arrow[ur, hook, "\iota"', "\text{subvariedad cerrada}"] & \end{tikzcd}$$

i.e., $Y := f(Z) \subseteq X$ es una subvariedad cerrada y además $Z \cong f(Z)$.

[1] En inglés, *closed immersion*.

Ejemplos

Sea $Z = \mathbb{A}^1$ y $X = \mathbb{A}^2$. Consideremos los morfismos regulares $f_i : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^2$



$f_1(t) = (t, t)$ $\qquad$ $f_2(t) = \left(t, t^2\right)$ $\qquad$ $f_3(t) = \left(t^2, t^3\right)$

Entonces, f_1 y f_2 son incrustaciones cerradas, pero f_3 **no** lo es.

Espacio proyectivo

Recuerdo: Sea $V \cong k^{n+1}$ e.v. y sea $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^n$ el **espacio proyectivo** de rectas vectoriales en V. Si $W \subseteq V$ sub-e.v. de $\dim_k(W) = m+1$, entonces

$$\mathbb{P}^m \cong \Lambda := \mathbb{P}(W) \subseteq \mathbb{P}(V),$$

y decimos que $\Lambda \subseteq \mathbb{P}^n$ es un **subespacio lineal de dimensión** m de $\mathbb{P}(V)$.

Notar que si $\Lambda_1 = \mathbb{P}(W_1) \cong \mathbb{P}^{m_1}$ y $\Lambda_2 = \mathbb{P}(W_2) \cong \mathbb{P}^{m_2}$ subespacios lineales de $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^n$. Entonces, si $m_1 + m_2 \geq n$ tenemos que

$$\Lambda_1 \cap \Lambda_2 \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}(W_1 \cap W_2) \cong \mathbb{P}^d$$

es no-vacío de dimensión $d \geq m_1 + m_2 - n$.

Las rectas $\{x = 1\}$ y $\{x = 2\}$ en $\mathbb{A}^2_{(x,y)}$ **no se intersectan**, pero las rectas proyectivas $\{x = z\}$ y $\{x = 2z\}$ obtenidas al considerar la clausura en $\mathbb{P}^2$

$$\mathbb{A}^2 \cong U_2 \overset{\text{def}}{=} \{[x,y,z] \in \mathbb{P}^2 \text{ tal que } z \neq 0\} \hookrightarrow \mathbb{P}^2_{[x,y,z]}, \ (x,y) \longmapsto [x,y,1]$$

se intersectan en el punto $[0,1,0]$.

Ideales homogéneos

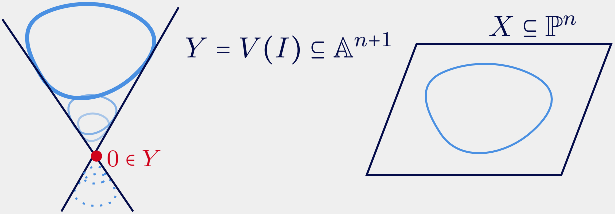
Para generalizar el ejemplo anterior, recordemos:

Sea $I \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{A}^{n+1}) = k[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ un ideal. Decimos que I es un **ideal homogéneo** si está generado por polinomios homogéneos, i.e., si

$$I = \langle p_1, \ldots, p_r \rangle \text{ con } p_i(\lambda x) = \lambda^{d_i} p_i(x) \ \forall \lambda \in k^*,\ d_i = \deg(p_i) \in \mathbb{N}.$$

Así, I es homogéneo si y sólo si $I = I^{\mathbb{G}_m}$ es invariante por la acción del grupo multiplicativo $\mathbb{G}_m \overset{\text{def}}{=} (k^*, \times)$, i.e., si $p(x) \in I$ entonces $p(\lambda x) \in I$ $\forall \lambda \in k^*$.

Si $I \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{A}^{n+1})$ ideal homogéneo entonces $Y = V(I) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ es $\mathbb{G}_m$-invariante. Geométricamente, tenemos que $Y = V(I)$ es un **cono afín**



El cociente $X \coloneqq (Y \setminus \{0\})/\mathbb{G}_m$ es un subconjunto $X \subseteq \mathbb{P}^n$ y usamos

$$\pi : Y \setminus \{0\} \longrightarrow X,\ (x_0, \ldots, x_n) \longmapsto [x_0, \ldots, x_n]$$

para dotar a X de la topología de Zariski y definir $\mathscr{O}_X \coloneqq \pi_*((\mathscr{O}_{Y \setminus \{0\}})^{\mathbb{G}_m})$, i.e., el haz de funciones regulares $\mathbb{G}_m$-invariantes. Así, $(X, \mathscr{O}_X)$ subvariedad *cerrada* del espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$, y escribiremos $X \coloneqq V(I) \subseteq \mathbb{P}^n$.

Explícitamente, si $I = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle \subseteq k[X_0, \ldots, X_n]$ con f_i homogéneo

$$V(I) \overset{\text{def}}{=} \{x = [x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{P}^n \text{ tal que } f_1(x) = \cdots = f_r(x) = 0\}.$$

Por la construcción de $\mathbb{P}^n$ como cociente de $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}$, **toda** subvariedad cerrada de $\mathbb{P}^n$ es de la forma $V(I)$ para cierto $I \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{A}^{n+1})$ ideal homogéneo.

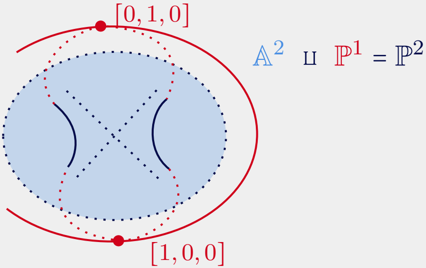
Ejemplo: Si $f \in \mathscr{O}(\mathbb{A}^{n+1}) \setminus \{0\}$ homogéneo de grado $d \geq 1$, decimos que

$$V(f) = \{[x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{P}^n \text{ tal que } f(x_0, \ldots, x_n) = 0\}$$

es una **hipersuperficie** de grado d en $\mathbb{P}^n$.

Sea $V \subseteq \mathbb{P}^n$ un subconjunto arbitrario. El **ideal de** V es el *ideal homogéneo* $\mathcal{I}(V) \subseteq k[X_0, \ldots, X_n]$ generado por los polinomios homogéneos que se anulan en V, y $V(\mathcal{I}(X)) = \overline{X}^{\mathrm{Zar}} \subseteq \mathbb{P}^n$ adherencia de Zariski de X.

Ejemplo: La curva afín $C \subseteq \mathbb{A}^2$ dada por $xy = 1$ se ve dentro de $\mathbb{P}^2$ al identificar $\mathbb{A}^2 \cong U_2 = \{z \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^2$, y $\overline{C} := \overline{C}^{\mathrm{Zar}} \subseteq \mathbb{P}^2$ es la curva proyectiva dada por $xy = z^2$, i.e., obtenida al *homogeneizar* la ecuación original.



$\overline{C}$ es unión de C y $[1,0,0]$, $[0,1,0]$ **al infinito**, i.e., en la recta $\mathbb{P}^1 \cong V(z)$.

Afín versus Proyectivo

Sea $A = k[X_0, \ldots, X_n]$. Entonces, el conjunto vacío $\varnothing \subseteq \mathbb{P}^n$ verifica

$$\mathcal{I}(\varnothing) = \langle X_0, \ldots, X_n \rangle.$$

Geométricamente, lo anterior equivale a que $0 \in \mathbb{A}^{n+1}$ **no** se proyecta a $\mathbb{P}^n$.

Decimos que $A^+ := \langle X_0, \ldots, X_n \rangle$ es el **ideal irrelevante** del anillo A.

La *version proyectiva* del Hilbert Nullstellensatz puede ser deducida de la versión afín. Más precisamente, si $I \subseteq k[X_0, \ldots, X_n]$ es un *ideal homogéneo*:

(a) $V(I) = \varnothing$ en $\mathbb{P}^n$ si y sólo si I contiene una potencia de A^+.

(b) Si $V(I) \neq \varnothing$ en $\mathbb{P}^n$, entonces $\mathcal{I}(V(I)) = \sqrt{I}$.

Sea X variedad algebraica. Diremos que X es **proyectiva** si es isomorfa a una subvariedad cerrada de algún espacio proyectivo, i.e., si existe

$$\iota : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$$

incrustación cerrada para algún $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

Una variedad algebraica **quasi-proyectiva** es una variedad isomorfa a un abierto de Zariski de una variedad algebraica proyectiva.

Toda variedad algebraica quasi-proyectiva es separada y quasi-compacta. Las variedades afines, variedades quasi-afines y variedades proyectivas son ejemplos de variedades quasi-proyectivas.