Geometría Algebraica

Clase 6

Pedro Montero

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

16 de Agosto de 2023

§2.4 Introducción a los esquemas

Alexander Grothendieck & EGA

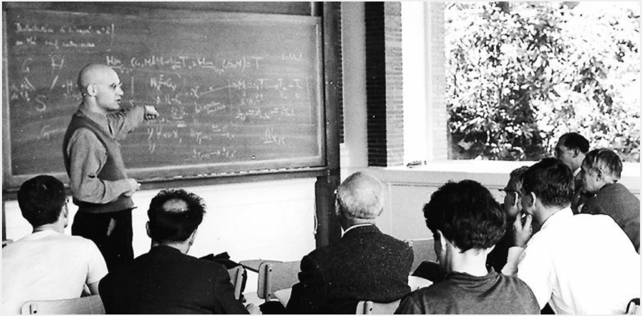


Figure: Alexander Grothendieck en el IHES (Francia).

La teoría de esquemas comienza en 1960, cuando Alexander Grothendieck establece los fundamentos de la geometría algebraica moderna en su serie de obras "*Éléments de Géométrie Algébrique*" (1960–1967, ≈ 1500 páginas).

Sea A un anillo conmutativo con unidad. Recordemos que $S \subseteq A$ es un **conjunto multiplicativo** si $1 \in S$ y si para todos $s, s' \in S$ se tiene que $ss' \in S$. Luego, si en $A \times S$ definimos la relación de equivalencia

$$(a,s) \sim (a',s') \text{ si y sólo si existe } t \in S \text{ tal que } t(as' - a's) = 0.$$

entonces definimos la **localización** de A respecto a S como el anillo cociente $S^{-1}A := (A \times S)/\sim$, donde denotamos por $\frac{a}{s}$ la clase de equivalencia de (a,s) (y donde sumamos y multiplicamos "fracciones" de la manera usual).

1. Sea A dominio entero. Entonces, $S := A \setminus \{0\}$ es multiplicativo y $S^{-1}A := \mathrm{Fr}(A)$ es el **cuerpo de fracciones** de A (e.g. $\mathrm{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$).
2. Sea $f \in A$ y $S := \{f^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ conjunto multiplicativo, $S^{-1}A := A_f$ es la **localización de A respecto a f**. Notar que $A_f \neq 0$ si y sólo si f **no** es nilpotente. Además, hay un isomorfismo

$$A_f \cong A[X]/\langle fX - 1\rangle.$$

Así, si $X \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad algebraica afín y $U_f = X \setminus V(f)$ abierto principal definido por $f \in \mathscr{O}(X)$, entonces

$$\mathscr{O}_X(U_f) \cong \mathscr{O}(X)_f.$$

3. Sea $\mathfrak{p} \subseteq A$ un ideal primo, i.e., $S := A \setminus \mathfrak{p}$ conjunto multiplicativo. Entonces $S^{-1}A := A_{\mathfrak{p}}$ es la **localización de A en $\mathfrak{p}$**. Más aún, $A_{\mathfrak{p}}$ es un *anillo local* con único ideal maximal $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \overset{\text{def}}{=} \{\frac{a}{s}$ con $a \in \mathfrak{p}$ y $s \notin \mathfrak{p}\}$.

Teorema

Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado. Hay una equivalencia entre:

1. La categoría $\mathbf{Aff}_{k,\mathrm{red}}$ de variedades algebraicas (reducidas) afines definidas sobre k.
2. La categoría $\mathbf{Alg}_{k,\mathrm{red}}$ de k-álgebras conmutativas finitamente generadas y *reducidas* (i.e., sin elementos nilpotentes no-triviales).

Demostración: Dada $X \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad algebraica afín, el k-álgebra $\mathscr{O}(X) \cong k[X_1, \ldots, X_n]/\mathcal{I}(X)$ es finitamente generada y reducida. Además, cada morfismo $f : X \to Y$ induce de manera contravariante $f^* : \mathscr{O}(Y) \to \mathscr{O}(X)$.

Recíprocamente, dada una k-álgebra A en $\mathbf{Alg}_{k,\mathrm{red}}$ consideramos

$$X := \mathrm{Specm}(A) \overset{\text{def}}{=} \{\mathfrak{m} \subseteq A \text{ ideal maximal}\}$$

con la *topología de Zariski* obtenida al declarar como cerrados los conjuntos $V(I) := \{\mathfrak{m} \subseteq A \text{ ideal maximal tal que } I \subseteq \mathfrak{m}\}$ para todo $I \subseteq A$ ideal.

Dado $f \in A \smallsetminus \{0\}$, los abiertos principales

$$U_f := \{\mathfrak{m} \subseteq A \text{ ideal maximal tal que } f \notin \mathfrak{m}\} \stackrel{\text{def}}{=} X \smallsetminus V(f)$$

forman una base de la topología de Zariski, y luego permiten definir $\mathscr{O}_X$:

Para cada $f \in A \smallsetminus \{0\}$, $\mathscr{O}_X(U_f) := A_f$ localización respecto a f.

Así, $s \in \mathscr{O}_X(U_f)$ tienen la forma $s = \frac{u}{f^n}$ donde $u \in A$ y $n \in \mathbb{N}$. Dado que $U_f \cap U_g \stackrel{\text{def}}{=} U_{fg}$, podemos definir los morfismos de restricción como

$$\mathscr{O}_X(U_f) \stackrel{\text{def}}{=} A_f \longrightarrow \mathscr{O}_X(U_{fg}) \stackrel{\text{def}}{=} A_{fg}, \; s = \frac{u}{f^n} \longmapsto \frac{ug^n}{(fg)^n}.$$

Para probar que $\mathscr{O}_X$ es un haz observamos que $U_f = \bigcup_{i \in I} U_{g_i}$ cubrimiento abierto $\Leftrightarrow V(f) = \bigcap_{i \in I} V(g_i)$, i.e.,

"Para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \subseteq A$, $f \in \mathfrak{m}$ si y sólo si $g_i \in \mathfrak{m}$ $\forall i \in I$."

Como f *invertible* en A_f, $\nexists\, \eta \subseteq A_f$ maximal con $\langle \{g_i\}_{i\in I} \rangle \subseteq \eta$, i.e., $\langle \{g_i\}_{i\in I} \rangle = A_f$. Como $V(g_i^{m_i}) \overset{\text{def}}{=} V(g_i)$, $m_i \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, podemos considerar $g_i^{m_i}$ y así:

$(\star)$ *Existen finitos* $v_i \in A_f$ *tales que* $\sum_{\text{finita}} v_i g_i^{m_i} = 1$ *en* A_f.

Pegado: Sean $s_i = \frac{u_i}{g^{n_i}} \in \mathscr{O}_X(U_{g_i}) \overset{\text{def}}{=} A_{g_i}$ con $s_i|_{U_{g_i g_j}} = s_j|_{U_{g_i g_j}}$ $\forall i, j \in I$

$$\Leftrightarrow \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } (g_i g_j)^N (u_i g_j^{n_j} - u_j g_i^{n_i}) = 0 \text{ en } A_f.$$

Sea $m_i := n_i + N$ en $(\star)$. Multiplicando $\sum_i v_i g_i^{n_i+N} = 1$ por $g_j^N u_j$:

$$g_j^N u_j = \sum_i v_i (g_i g_j)^N u_j g_i^{n_i} \overset{\text{def}}{=} \sum_i v_i (g_i g_j)^N u_i g_j^{n_j} = g_j^{n_j+N} \cdot s,$$

donde $s := \sum_i u_i v_i g_i^N$ en $A_f \overset{\text{def}}{=} \mathscr{O}_X(U_f)$ cumple que $s|_{U_{g_j}} = s_j$ pues

$$s_j = \frac{u_j}{g_j^{n_j}} = \frac{g_j^N u_j}{g_j^{n_j+N}} \overset{\text{def}}{=} \frac{g_j^{n_j+N} s}{g_j^{n_j+N}} = s \text{ en } A_{g_j}.$$

La **Unicidad** es similar y queda como Ejercicio. Así, $\mathscr{O}_X$ es un haz.

Para ver que $(X, \mathscr{O}_X)$ variedad algebraica afín consideramos $a_1, \ldots, a_n \in A$ generadores como k-álgebra y consideramos

$$\mathscr{O}(\mathbb{A}^n) \overset{\text{def}}{=} k[X_1, \ldots, X_n] \twoheadrightarrow A,\ X_i \longmapsto a_i$$

con kernel $I \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$ tal que $A \cong \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)/I$. Como A es *reducida*, I es ideal radical y luego $Y := V(I) \subseteq \mathbb{A}^n$ cumple $\mathcal{I}(Y) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{I}(V(I)) = \sqrt{I} = I$, y luego $\mathscr{O}(Y) \cong \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)/\mathcal{I}(Y) \cong A$. El Nullstellensatz nos da una biyección

$$Y \xrightarrow{\sim} X = \operatorname{Specm}(A),\ y \longmapsto \mathfrak{m}_y = \{f \in \mathscr{O}(Y) \cong A \text{ tal que } f(y) = 0\}.$$

Más aún, para cada $f \in \mathscr{O}(Y) \cong A$ no-nula, se tienen homeomorfismos

$$Y_f := \{y \in Y \text{ tal que } f(y) \neq 0\} \xrightarrow{\sim} U_f \subseteq X,$$

donde además $\mathscr{O}_Y(Y_f) \cong A_f \overset{\text{def}}{=} \mathscr{O}_X(U_f)$. Así, $(X, \mathscr{O}_X)$ variedad algebraica afín y luego $\operatorname{Specm} : \mathbf{Alg}_{k,\text{red}} \longrightarrow \mathbf{Aff}_{k,\text{red}}$ equivalencia de categorías. $\square$

Esquemas

La *teoría de esquemas* busca reemplazar la categoría $\mathbf{Alg}_{k,\mathrm{red}}$ por anillos más generales, y obtener (usando "espectros") nuevos objetos geométricos: los **esquemas**.

Por ejemplo, si A es una k-álgebra finitamente generada no necesariamente reducida (e.g. $A = k[X,Y]/\langle Y^2\rangle$) entonces

$$X := \mathrm{Specm}(A) = \{\mathfrak{m} \subseteq A \text{ ideal maximal}\}$$

es un **esquema afín** de tipo finito sobre k. Si $A \cong \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)/I$ donde I es un ideal (no necesariamente radical) entonces X es homeomorfo a $V(I) := X_{\mathrm{red}} \subseteq \mathbb{A}^n$. Sin embargo, $\mathscr{O}_X(U_f) := A_f$ puede tener elementos nilpotentes.

Teorema

Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado. Hay una equivalencia entre:

1. La categoría $\mathbf{Aff}_k$ de esquemas afines (de tipo finito) sobre k.
2. La categoría $\mathbf{Alg}_k$ de k-álgebras conmutativas finitamente generadas.

Ejemplos de Esquemas

1. Un punto $x \in X \subseteq \mathbb{A}^n$ en una variedad algebraica afín es un morfismo

$$\begin{aligned} \varphi_x : \operatorname{Specm}(k) &\hookrightarrow \operatorname{Specm}(\mathscr{O}(X)) \\ \{*\} &\longmapsto x \end{aligned}$$

Así, podemos pensar puntos de mayor multiplicidad como morfismos

$$\begin{aligned} \varphi_{x_m} : \operatorname{Specm}(k[X]/\langle X^m \rangle) &\hookrightarrow \operatorname{Specm}(\mathscr{O}(X)) \\ \{*\} &\longmapsto x \end{aligned}$$

Por ejemplo, si $D := k[\varepsilon]/\langle \varepsilon^2 \rangle$ con $a + \varepsilon b \in D$ son tales que $a, b \in k$ y $\varepsilon^2 = 0$, el espacio tangente $T_{X,x}$ de X en $x \in X$ puede pensarse como el conjunto de morfismos

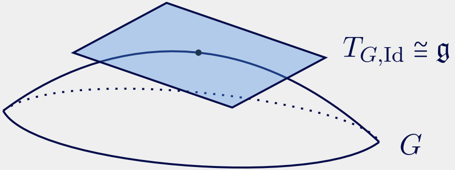
$$\begin{aligned} \operatorname{Specm}(k[\varepsilon]/\langle \varepsilon^2 \rangle) &\hookrightarrow \operatorname{Specm}(\mathscr{O}(X)) \\ \{*\} &\longmapsto x \end{aligned}$$

lo cual se traduce en resolver las ecuaciones de X en D en lugar de k.

2. Consideremos la variedad algebraica afín dada por el **grupo ortogonal**

$$X := O_n(\mathbb{R}) \overset{\text{def}}{=} \{A \in M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{A}^{n^2} \text{ tales que } {}^{\mathrm{t}}AA = \mathrm{I}_n\} \subseteq \mathbb{A}^{n^2},$$

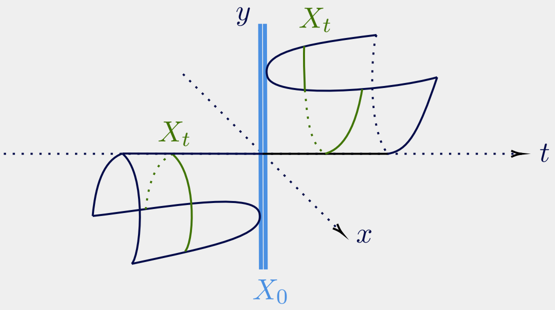
y sea $A \in X$. Entonces, tenemos que $A + \varepsilon B \in O_n(\mathbb{R}[\varepsilon]/\langle\varepsilon^2\rangle)$ si y sólo si ${}^{\mathrm{t}}(A+\varepsilon B)(A+\varepsilon B) = \mathrm{I}_n$, i.e., ${}^{\mathrm{t}}AA + \varepsilon({}^{\mathrm{t}}BA + {}^{\mathrm{t}}AB) + \varepsilon^2\, {}^{\mathrm{t}}BB = \mathrm{I}_n$, de donde deducimos que $T_{X,A} \cong \{B \in M_n(\mathbb{R}) \text{ tal que } {}^{\mathrm{t}}BA = -\,{}^{\mathrm{t}}AB\}$.



$$\mathfrak{g} := T_{O_n(\mathbb{R}),\mathrm{I}_n} \cong \{B \in M_n(\mathbb{R}) \text{ tal que } {}^{\mathrm{t}}B = -B\}.$$

3. Consideremos $X = \{(x,y,t) \in \mathbb{A}^3 \text{ tal que } yt = x^2\}$ y definamos $\varphi : X \to \mathbb{A}^1$, $(x,y,t) \mapsto t$. Para cada $t \in \mathbb{A}^1$ definimos la **fibra esquemática** de φ en t como el sub-esquema afín dado por

$$X_t := \mathrm{Specm}(k[X,Y]/\langle Yt - X^2\rangle).$$



Para $t \neq 0$ se tiene que X_t sub-variedad afín reducida (parábola), mientras que X_0 es un esquema afín no-reducido (recta doble).

Esquemas más generales

Figure: Alexander Grothendieck y Laurent Schwartz.

Para un **anillo arbitrario** A se define $\mathrm{Spec}(A) := \{\mathfrak{p} \subseteq A \text{ ideal primo}\}$, con la topología de Zariski con cerrados $V(I) := \{\mathfrak{p} \subseteq A \text{ ideal primo tal que } I \subseteq \mathfrak{p}\}$.

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) = \langle 0\rangle \cup \{\langle p\rangle \text{ con } p \text{ número primo}\}.$$

Aquí, $\overline{\langle p\rangle}^{\mathrm{Zar}} = \langle p\rangle$ punto *cerrado* y $\overline{\langle 0\rangle}^{\mathrm{Zar}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ *punto denso*.

§2.5 Atlas algebraicos

Análogamente al caso clásico de variedades diferenciables, tenemos:

Teorema (Pegado de espacios anillados)

Sea X un espacio topológico. Consideremos dado:

1. Un cubrimiento abierto $\{U_i\}_{i\in I}$ de X.
2. Para cada $i \in I$, un haz de k-álgebras $\mathscr{A}_i$ en U_i.
3. Para todos $i, j \in I$, un isomorfismo de haces

$$\varphi_{ji} : \mathscr{A}_i|_{U_i \cap U_j} \xrightarrow{\sim} \mathscr{A}_j|_{U_i \cap U_j} \text{ que verifica}$$

   (a) $\varphi_{ii} = \mathrm{Id}_{\mathscr{A}_i}$ para todo $i \in I$.
   (b) Para todos $i, j, k \in I$ se tiene que $\varphi_{ki} = \varphi_{kj} \circ \varphi_{ji}$ en $U_i \cap U_j \cap U_k$.

Entonces, $\exists!$ haz de k-álgebras $\mathscr{A}$ en X junto con isomorfismos

$$\varphi_i : \mathscr{A}|_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathscr{A}_i \textit{ en } U_i,$$

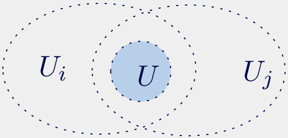
tales que $\varphi_{ji} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ en $U_i \cap U_j$.

Pegado de espacios anillados

Los abiertos $U \subseteq X$ contenidos en alguno de los U_i forman una base de abiertos para la topología de X. Para un tal abierto $U \subseteq X$, definimos

$$\mathscr{A}(U) := \left(\coprod_{\substack{i \in I \\ U \subseteq U_i}} \mathscr{A}_i(U) \right) / \sim$$

con $(s, U_i) \sim (t, U_j)$, $s \in \mathscr{A}_i(U)$ y $t \in \mathscr{A}_j(U)$, si $t = \varphi_{ji}(s)$ en $\mathscr{A}_j|_{U_i \cap U_j}(U)$.



(a) y (b) aseguran que $\sim$ es relación de equivalencia, y en el cociente definimos una estructura de haz de k-álgebras de tal suerte que

$$\mathscr{A}_i(U) \longrightarrow \mathscr{A}(U),\ s \longmapsto [s] \text{ sea un isomorfismo.}$$

El hecho que los $\mathscr{A}_i$ son haces implica que $\mathscr{A}$ es un haz y que es único. $\square$

Ejemplo fundamental

Sea X un espacio topológico noetheriano, y supongamos que cada espacio anillado $(U_i, \mathscr{A}_i)$ es una variedad algebraica (arbitraria, no necesariamente afín). Entonces, el espacio anillado $(X, \mathscr{A})$ es una variedad algebraica.

Pegado de variedades algebraicas

En términos prácticos, el ejemplo anterior señala que podemos **pegar** variedades algebraicas si las funciones regulares son compatibles.

Atlas algebraico

Sea X espacio topológico noetheriano. Un **atlas algebraico** en X consiste en un cubrimiento abierto $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ y una colección de homeomorfismos

$$\alpha_i : U_i \xrightarrow{\sim} V_i$$

llamados **cartas locales**, donde $(V_i, \mathscr{O}_{V_i})$ variedad algebraica $\forall i \in I$ y donde:

Si denotamos por $V_{ij} \subseteq V_i$ a la imagen de $U_i \cap U_j \subseteq U_i$ por α_i, entonces para todos $i, j \in I$ se tiene un isomorfismo regular

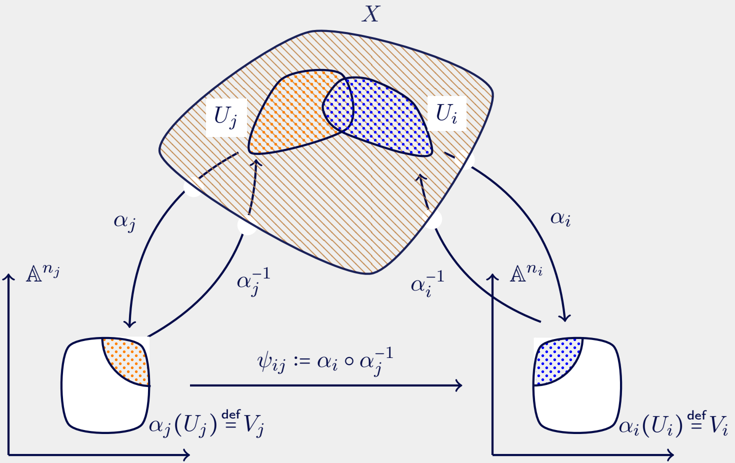
$$\psi_{ji} := \alpha_j \circ \alpha_i^{-1} : V_{ij} \xrightarrow{\sim} V_{ji}$$

entre las variedades V_{ij} y V_{ji}, llamado ***cambio de cartas****.*

El espacio anillado $(X, \mathscr{O}_X)$ obtenido al pegar los haces estructurales de cada abierto U_i es la **variedad algebraica asociada al atlas algebraico**.

En particular, dada otra variedad algebraica Y, una función $f : X \longrightarrow Y$ es regular si y sólo si cada restricción $f_i := f|_{U_i} : U_i \to Y$ es regular (i.e., la aplicación $f_i \circ \alpha_i^{-1} : V_i \to Y$ es regular) para todo $i \in I$.

En el caso en que el espacio topológico noetheriano X puede ser cubierto por abiertos *afines* U_i, la noción de atlas algebraico permite extender al contexto de la geometría algebraica la construcción de variedades diferenciables.



Recta proyectiva

Sean $[x, y]$ coordenadas homogéneas en $\mathbb{P}^1 \overset{\mathsf{def}}{=} (\mathbb{A}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{G}_m$ y sean:

$$U_0 := \{[x, y] \in \mathbb{P}^1 \text{ tal que } x \neq 0\} \text{ y } U_1 := \{[x, y] \in \mathbb{P}^1 \text{ tal que } y \neq 0\}.$$

Consideremos cartas locales dadas por

$$\alpha_0 : U_0 \xrightarrow{\sim} V_0 := \mathbb{A}^1,\ [x, y] \longmapsto \frac{y}{x} \text{ y por } \alpha_1 : U_1 \xrightarrow{\sim} V_1 := \mathbb{A}^1,\ [x, y] \longmapsto \frac{x}{y}.$$

Notar que $\alpha_0(U_0 \cap U_1) = \alpha_1(U_0 \cap U_1) = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$. Más aún, si z es una coordenada en $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$, entonces $\psi_{01} := \alpha_1 \circ \alpha_0^{-1}$ está dada por

$$\psi_{01}(z) = \frac{1}{z} \text{ morfismo birregular.}$$

Lo anterior se extiende a $\mathbb{P}^n$ (Ejercicio) considerando las cartas locales en los **abiertos estándar** $U_i := \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n \text{ tal que } x_i \neq 0\}$

$$\alpha_i : U_i \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n,\ [x_0, \dots, x_n] \longmapsto \left(\frac{x_0}{x_1}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right).$$