Geometría Algebraica

Clase 5

Pedro Montero

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

14 de Agosto de 2023

§2.2 Funciones regulares y morfismos

Morfismos regulares

La noción de función regular se extiende naturalmente:

Definición (morfismo regular)

Sean $X \subseteq \mathbb{A}^n$, $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ subvariedades afines. Una función $f : X \to Y$ es un **morfismo regular** si $f = F|_X$ con $F : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ polinomial con $F(X) \subseteq Y$.

Un morfismo regular $f : X \to Y$ es un **isomorfismo** (o un **morfismo birregular**) si f es biyectiva y $f^{-1} : Y \to X$ es regular. Escribimos $X \cong Y$.

Relación con funciones regulares

Por definición, $\mathscr{O}(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{A}^1 \text{ morfismo regular}\}$. De manera más general, si $f : X \to Y$ morfismo regular, el **pullback** de f es

$$f^* : \mathscr{O}(Y) \longrightarrow \mathscr{O}(X),\ \varphi \longmapsto \varphi \circ f \quad \text{morfismo de } k\text{-álgebras.}$$

Ejemplos

1. Toda $f : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$, $x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ polinomial es regular.
2. Todo morfismo regular es continuo para la topología de Zariski.
3. Supogamos que $\mathrm{car}(k) = p > 0$ (e.g. $k = \overline{\mathbb{F}}_p$). La función
$$\mathrm{Fr} : \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^1, \; x \longmapsto x^p$$
El morfismo de k-álgebras asociado está dado por
$$\mathrm{Fr}^* : k[X] \longrightarrow k[X], \; X \longmapsto X^p.$$
4. Ejercicio: Sea $C \subseteq \mathbb{A}^2$ la parábola dada por
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 \text{ tal que } y = x^2\}.$$
Probar que $\mathcal{I}(C) = \langle X^2 - Y \rangle \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{A}^2) = k[X, Y]$ y que C es irreducible. Probar que las funciones $f : C \to \mathbb{A}^1$, $(x, y) \mapsto x$ y $g : \mathbb{A}^1 \to C$, $t \mapsto (t, t^2)$ son morfismos regulares e inversas una de la otra, y así $C \cong \mathbb{A}^1$. Finalmente, describir el pullback de f
$$f^* : \mathscr{O}(\mathbb{A}^1) \to \mathscr{O}(C).$$

Sean $X \subseteq \mathbb{A}^n$, $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ subvariedades afines. Hay una biyección

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Morfismos regulares} \\ f : X \longrightarrow Y \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Morfismos de } k\text{-álgebras} \\ \varphi : \mathscr{O}(Y) \longrightarrow \mathscr{O}(X) \end{array} \right\}, \ f \longmapsto f^*$$

Luego, $X \cong Y$ isomorfas $\Leftrightarrow \mathscr{O}(X) \cong \mathscr{O}(Y)$ isomorfas como k-álgebras.

Inyectividad: Si $(y_1, \ldots, y_m)$ son coord. en $\mathbb{A}^m$, con $y_i := y_i|_Y \in \mathscr{O}(Y)$ y si $f = (f_1, \ldots, f_m)$, entonces $f^*(y_i) \overset{\text{def}}{=} y_i \circ f \overset{\text{def}}{=} f_i$, i.e., f^* determina f.

Sobreyectividad: Sea $\varphi : \mathscr{O}(Y) \to \mathscr{O}(X)$ morfismo de k-álgebras, y $\varphi_i := \varphi(y_i) \in \mathscr{O}(X)$. Entonces, definimos $f : X \to \mathbb{A}^m$, $x \mapsto (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x))$ y debemos verificar que $f(X) \subseteq Y$: Sea $g \in \mathcal{I}(Y)$, como $g|_Y \equiv 0$ entonces

$$g(f(x)) \overset{\text{def}}{=} g(\varphi(y_1)(x), \ldots, \varphi(y_m)(x)) \overset{\text{def}}{=} \varphi(g(y_1, \ldots, y_m))(x) \equiv 0$$

Así, $g(f(x)) = 0 \ \forall g \in \mathcal{I}(Y)$, i.e., $f(x) \in V(\mathcal{I}(Y)) \overset{\text{def}}{=} Y$, y $f^* \overset{\text{def}}{=} \varphi$. $\square$

§2.3 Variedades algebraicas

Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado.

Definición (variedad algebraica afín)

Una **variedad algebraica afín** sobre k es un espacio anillado $(X, \mathscr{O}_X)$ que es isomorfo a un *cerrado* de Zariski de un espacio afín, junto con su haz de funciones regulares.

El haz estructural $\mathscr{O}_X$ se omite si es claro en el contexto. El tallo $\mathscr{O}_{X,x}$ de gérmenes de funciones regulares en $x \in X$ es una k-álgebra **local**, i.e, posee un único ideal maximal dado por

$$\mathfrak{m}_x := \{f \in \mathscr{O}_{X,x} \text{ tal que } f(x) = 0\}.$$

En efecto, todo germen fuera de $\mathfrak{m}_x$ es invertible. Más aún, el morfismo

$$\mathrm{ev}_x : \mathscr{O}_{X,x} \twoheadrightarrow k,\ f \longmapsto f(x)$$

induce un isomorfismo $\mathscr{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x \cong k$ para todo $x \in X$.

Definición (variedad algebraica)

Una **variedad algebraica** (reducida) sobre k es un espacio anillado $(X, \mathscr{O}_X)$ tal que:

1. X es un espacio topológico noetheriano.
2. Todo punto de X admite una vecindad abierta $U \subseteq X$ tal que el espacio anillado $(U, \mathscr{O}_U)$ es una variedad algebraica afín, donde $\mathscr{O}_U \overset{\text{def}}{=} \mathscr{O}_X|_U$. En tal caso, decimos que U es un **abierto afín** de X.

Un **morfismo** de variedades algebraicas

$$(X, \mathscr{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathscr{O}_Y)$$

es un morfismo entre los espacios anillados subyacentes.

Sean X e Y variedades algebraicas. Una función continua $f : X \to Y$ es un **morfismo regular** si

> *Para toda función regular $u : V \to k$ definida sobre un abierto $V \subseteq Y$ (i.e., $u \in \mathscr{O}_Y(V)$), la función definida mediante el pullback $f^*(u) := u \circ f : f^{-1}(V) \to k$ es una función regular en $f^{-1}(V) \subseteq X$ (i.e., $f^*(u) \in f_*\mathscr{O}_X(V) \overset{\text{def}}{=} \mathscr{O}_X(f^{-1}(V))$.*

Luego, f define un morfismo de haces en k-álgebras dado por el pullback

$$f^* : \mathscr{O}_Y \longrightarrow f_*\mathscr{O}_X$$

y luego un morfismo de espacios anillados $(f, f^*) : (X, \mathscr{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathscr{O}_Y)$.

Teorema (Todo morfismo entre variedades algebraicas es regular)

Sean X, Y variedades algebraicas, y un morfismo de espacios anillados

$$(f, \varphi) : (X, \mathscr{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathscr{O}_Y)$$

con $f : X \to Y$ continua y $\varphi : \mathscr{O}_Y \to f_* \mathscr{O}_X$ morfismo de haces en k-álgebras. Entonces, $f : X \to Y$ es un morfismo regular y además $\varphi = f^*$.

Idea de prueba: El enunciado es local en X e Y, por lo que podemos asumir que son afines, $A = \mathscr{O}(X)$, $B = \mathscr{O}(Y)$, y $\varphi : B \to A$ morfismo de k-álgebras.

Sea $x \in X$ y $\mathfrak{m}_x \subseteq A$ el ideal maximal asociado. El ideal $\eta := \varphi^{-1}(\mathfrak{m}_x) \subseteq B$ es primo y se verifica que $B/\eta \hookrightarrow A/\mathfrak{m}_x \cong k$ es un isomorfismo, y luego $\eta = \eta_y \subseteq B$ es el ideal maximal asociado a $y \overset{\text{def}}{=} f(x) \in Y$.

Morfismos regulares

Luego, para toda función regular $u \in B \overset{\text{def}}{=} \mathscr{O}(Y)$ se tiene

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[d, mapsto] & \in B \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & A \ni \arrow[d] & \varphi(u) \arrow[d, mapsto] \\
u_y \arrow[d, mapsto] & \in \mathscr{O}_{Y,y} \arrow[d, "\mathrm{ev}_y"] & \mathscr{O}_{X,x} \ni \arrow[d, "\mathrm{ev}_x"'] & \varphi(u)_x \arrow[d, mapsto] \\
u(y) & \in \mathscr{O}_{Y,y}/\eta_y \cong k \arrow[r, "\mathrm{Id}_k"] & k \cong \mathscr{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x \ni & \varphi(u)(x)
\end{tikzcd}$$

Así, para todo $x \in X$ se cumple $(f^*(u))(x) \overset{\text{def}}{=} u(f(x)) \overset{\text{def}}{=} u(y) = \varphi(u)(x)$ y luego $\varphi = f^*$ en B. En particular, f es un morfismo regular. $\square$

Un morfismo regular $f : X \to Y$ es un **isomorfismo** (o un **morfismo birregular**) si f es biyectiva y $f^{-1} : Y \to X$ es un morfismo regular.

Sea X una variedad algebraica. Entonces, todo abierto y todo cerrado de X posee una estructura inducida de variedad algebraica.

- **Abiertos:** Sea $U \subseteq X$ abierto no-vacío, con $\mathscr{O}_U \overset{\text{def}}{=} \mathscr{O}_X|_U$. Como U noetheriano, basta probar que U está cubierto por abiertos afines (i.e., abiertos isomorfos a *cerrados* de Zariski en algún espacio afín):

  Como $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, con U_i abierto afín, tenemos $U = \bigcup_{i \in I} V_i$ con $V_i := U \cap U_i$ abierto en una variedad algebraica afín $U_i =: Y$.

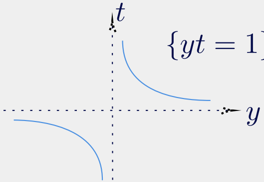
  Sea $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ cerrado de Zariski y $V \subseteq Y$ abierto Zariski dado por

  $Y \backslash V = Y \cap V(f_1, \ldots, f_m) \overset{\text{def}}{=} \{y \in Y \text{ tal que } f_1(y) = \cdots = f_m(y) = 0\}$

  Así, $V = \bigcup_{i=1}^{m} U_{f_i}$ con $U_{f_i} := Y \setminus V(f_i) \overset{\text{def}}{=} \{y \in Y \text{ tal que } f_i(y) \neq 0\}$.

  Veamos que cada U_{f_i} es un *abierto afín* (i.e., isomorfo a una subvariedad afín de algún espacio afín):

Subvariedades algebraicas



$$\{yt = 1\} \cong \{y \neq 0\} \subseteq \mathbb{A}^1$$

En $\mathbb{A}^{n+1}$ con coord. $(y,t) \overset{\text{def}}{=} (y_1, \ldots, y_n, t)$ consideramos el *cerrado* Zariski

$$W_i := \{(y,t) \in \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1 = \mathbb{A}^{n+1} \text{ tal que } y \in Y \text{ y tal que } f_i(y)t = 1\},$$

y notar que $W_i \to U_{f_i}$, $(y,t) \mapsto y$ morfismo regular biyectivo con inversa regular $y \mapsto (y, \frac{1}{f_i(y)})$. Así, $(U, \mathscr{O}_U)$ variedad algebraica.

Si $X \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad algebraica afín y $f \in \mathscr{O}(X)$ función regular, entonces

$$U_f := \{x \in X \text{ tal que } f(x) \neq 0\} \subseteq X$$

es un abierto afín. Dichos abiertos son llamados **abiertos principales** de la topología de Zariski de X, pues forman una base de dicha topología.

- **Cerrados:** Sea $Y \subseteq X$ cerrado no-vacío, y luego noetheriano. Notar que si $Y \subseteq X \subseteq \mathbb{A}^n$ subvariedades afines, Y determinada por el ideal

$$\mathcal{I}_X(Y) := \mathcal{I}(Y)/\mathcal{I}(X) \text{ en el cociente } \mathscr{O}(X) \cong \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)/\mathcal{I}(X).$$

La idea general será ver Y como un cerrado dentro de un abierto afín:

Sea $\mathcal{I}_Y \subseteq \mathscr{O}_X$ el haz de ideales de funciones que se anulan en Y, i.e.,

$$\mathcal{I}_Y(U) := \{f \in \mathscr{O}_X(U) \text{ tal que } f(x) = 0 \text{ para todo } x \in U \cap Y\},$$

entonces definimos[1] $\mathscr{O}_Y := (\mathscr{O}_X/\mathcal{I}_Y)|_Y$, y $(Y, \mathscr{O}_Y)$ espacio anillado.

Si $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ cubrimiento afín, $Y = \bigcup_{i \in I} Z_i$ con $Z_i := Y \cap U_i$ cerrado en la variedad algebraica afín U_i. Notamos que si $Z \subseteq X \subseteq \mathbb{A}^n$ son subvariedades afines entonces $\mathscr{O}_X|_Z \cong \mathscr{O}_Z$ (¡restricción de polinomios!), y luego $\mathscr{O}_Y|_{Z_i} \cong \mathscr{O}_{Z_i}$. Así, $(Y, \mathscr{O}_Y)$ es una variedad algebraica. $\square$

[1] A diferencia de $\mathscr{O}_X|_Y$, el haz $(\mathscr{O}_X/\mathcal{I}_Y)|_Y$ tiene la ventaja de que sus secciones pueden ser vistas como funciones regulares en Y, y no en una *vecindad* abierta de Y.

Una **variedad quasi-afín** es un abierto de una variedad algebraica afín. En general, una variedad quasi-afín **no** es una variedad afín:

Sea $X = \mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$ variedad algebraica con cubrimiento afín

$$U \cup V = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \text{ tal que } x \neq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \text{ tal que } y \neq 0\},$$

entonces $\Gamma(X, \mathscr{O}_X) \overset{\text{def}}{=} \mathscr{O}_X(X) \cong \mathscr{O}(\mathbb{A}^2)$. En efecto, $f \in \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ se escribe

$$f = \frac{P}{X^n} = \frac{Q}{Y^m}$$

con $P, Q \in \mathscr{O}(\mathbb{A}^2)$, y así $P \cdot Y^m = Q \cdot X^n$. Luego, Y^m divide a Q y X^n divide a P, i.e., $f \in \mathscr{O}(\mathbb{A}^2)$.

Si X fuese afín, entonces habría una biyección (Nullstellensatz) entre puntos de X e ideales maximales de $\mathscr{O}(X) \cong \mathscr{O}(\mathbb{A}^2)$. Sin embargo, $\mathfrak{m}_{(0,0)} \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{A}^2) \cong \mathscr{O}(X)$, pero $(0,0) \notin X$. Así, X **no** es variedad algebraica afín.

Consideremos la siguiente relación de equivalencia en el conjunto $k^{n+1} \setminus \{0\}$:

Dos vectores $x, y \in k^{n+1}$ no-nulos son equivalentes si y sólo si son colineales, i.e., si existe $\lambda \in k^*$ tal que $y = \lambda x$.

El cociente es el **espacio proyectivo de dimension** n sobre k, y se denota $\mathbb{P}^n(k)$ (o $\mathbb{P}^n$). La clase de $x = (x_0, \ldots, x_n) \in k^{n+1} \setminus \{0\}$ en $\mathbb{P}^n$ se denota

$$[x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{P}^n$$

y se dice que $x_0, \ldots, x_n$ son "*las*" **coordenadas homogéneas** de $[x] \in \mathbb{P}^n$ (¡a pesar que están definidas módulo multiplicación por $\lambda \in k^*$!).

Sea X espacio topológico y $\sim$ relación de equivalencia en X. Si $Y := X/\sim$ conjunto cociente y $\pi : X \twoheadrightarrow Y$, $x \mapsto [x]$ proyección canónica, la **topología cociente** en Y se obtiene declarando como abiertos de Y los subconjuntos

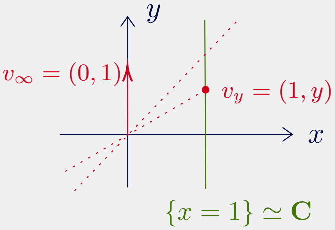
$$V \subseteq Y \text{ tales que } \pi^{-1}(V) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \text{ tal que } [x] \in V\} \text{ es un abierto en } X.$$

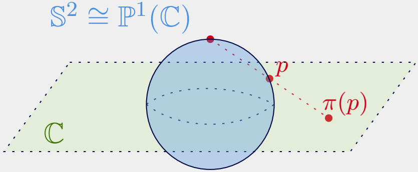
Más generalmente, si V es un k-espacio vectorial no-nulo, se define el espacio proyectivo asociado a V, también llamado la **proyectivización de V** como

$$\mathbb{P}(V) := \{\ell \subseteq V \text{ sub-espacio vectorial tal que } \dim_k(\ell) = 1\}.$$

Notar que si $W \subseteq V$ sub-espacio vectorial no-nulo, entonces $\mathbb{P}(W) \subseteq \mathbb{P}(V)$.

Ejemplo: Notar que $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\mathbb{C}^2) \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\} \simeq \mathbb{S}^2$.





El **grupo multiplicativo** $\mathbb{G}_m := (k^*, \times)$ actúa en $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}$ por

$$\lambda \cdot (x_0, \ldots, x_n) = (\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{G}_m.$$

Así, $\pi : \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} \twoheadrightarrow \mathbb{P}^n \overset{\text{def}}{=} (\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{G}_m, \ (x_0, \ldots, x_n) \mapsto [x_0, \ldots, x_n]$. Dotamos a $\mathbb{P}^n$ de la topología de Zariski (cociente). Más aún, definimos

$$\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n} := \pi_*((\mathscr{O}_{\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}})^{\mathbb{G}_m}),$$

i.e., $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n} = \pi_*(\mathscr{F})$ es la imagen directa por π del sub-haz $\mathscr{F} \overset{\text{def}}{=} (\mathscr{O}_{\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}})^{\mathbb{G}_m}$ de $\mathscr{O}_{\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}}$ dado por las funciones regulares que son $\mathbb{G}_m$-invariantes.

Concretamente, una sección (local) de $\mathscr{O}_{\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}}$ es una función racional $u(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ donde $P, Q \in \mathscr{O}(\mathbb{A}^{n+1})$. Las secciones $\mathbb{G}_m$-invariantes cumplen

$$u(\lambda x) = u(x), \text{ i.e., } \frac{P(\lambda x)}{Q(\lambda x)} = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Esto equivale a $P(\lambda x) = \lambda^d P(x)$ y $Q(\lambda x) = \lambda^d Q(x)$ para cierto $d \in \mathbb{N}$. Así, una sección local de $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}$ es una función racional dada por el cociente de dos *polinomios homogéneos del mismo grado*.

$\mathbb{P}^n$ COMO VARIEDAD ALGEBRAICA

El espacio anillado $(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n})$ es una variedad algebraica: Sea $A_i \cong \mathbb{A}^n$

$A_i := \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^{n+1}$ tal que $x_i = 1\} \subseteq \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}$ subespacio afín.

Sea $U_i := \{[x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{P}^n$ tal que $x_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^n$ abierto Zariski con $\pi(A_i) \stackrel{\text{def}}{=} U_i$. Más aún, podemos encontrar una inversa $\varphi_i : U_i \xrightarrow{\sim} A_i$

$$\varphi_i([x]) = \varphi_i([x_0, \ldots, x_n]) := \frac{x}{x_i} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{x_0}{x_1}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right),$$

bien definida y da un homeomorfismo entre U_i y A_i (de inversa $\pi|_{A_i}$).
Por otro lado, si $V \subseteq A_i \cong \mathbb{A}^n$ abierto Zariski y $f \in \mathscr{O}_{A_i}(V)$ entonces

$$\varphi_i^*(f) \stackrel{\text{def}}{=} f \circ \varphi_i : \varphi_i^{-1}(V) \longrightarrow k \text{ es regular en } \varphi_i^{-1}(V).$$

Así, obtenemos un isomorfismo $\varphi_i^* : \mathscr{O}_{A_i} \xrightarrow{\sim} (\varphi_i)_*(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}|_{U_i})$ dado por

$$(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}|_{U_i})(\varphi_i^{-1}(V)) \cong \mathscr{O}_{A_i}(V)$$

$$\frac{P(x_0,\dots,x_n)}{Q(x_0,\dots,x_n)} \xmapsto{(\varphi_i^*)^{-1}} \frac{P(x_0,\dots,x_{i-1},1,x_{i+1},\dots,x_n)}{Q(x_0,\dots,x_{i-1},1,x_{i+1},\dots,x_n)}$$

$$\varphi_i^*(f) \overset{\text{def}}{=} \frac{A\left(\frac{x_0}{x_i},\dots,\frac{x_n}{x_i}\right)}{B\left(\frac{x_0}{x_i},\dots,\frac{x_n}{x_i}\right)} \xleftarrow{\varphi_i^*} f = \frac{A(x_0,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)}{B(x_0,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)}$$

Luego, obtenemos un isomorfismo de espacios anillados

$$(\varphi_i,\varphi_i^*) : (U_i, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}|_{U_i}) \xrightarrow{\sim} (A_i, \mathscr{O}_{A_i})$$

para cada $i \in \{0,1,\dots,n\}$, y luego $(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n})$ variedad algebraica. $\square$

Ejercicio importante: Probar que $\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}) \cong k$. Notar que $f : \mathbb{P}^n \to k$ regular se restringe a cada $U_i \subseteq \mathbb{P}^n$, y deducir que debe ser **constante**.