Geometría Algebraica

Clase 4

Pedro Montero

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

09 de Agosto de 2023

§2.1 Variedades algebraicas afines y Topología de Zariski

Sea k un cuerpo. Dotaremos al conjunto

$$k^n \overset{\text{def}}{=} \{(x_1, \ldots, x_n) \text{ donde } x_i \in k \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

de una topología, llamada la **topología de Zariski**, que permitirá definir un haz de k-álgebras llamado el *haz de funciones regulares*. Así, el espacio anillado correspondiente se llamará el **espacio afín**, y será denotado $\mathbb{A}^n$.

Notación: En todo lo que sigue, denotamos $\mathscr{O}(\mathbb{A}^n) := k[X_1, \ldots, X_n]$.

Definición (subvariedad afín)

Sea $S \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$ subconjunto. El conjunto

$$V(S) := \{(x_1, \ldots, x_n) \in k^n \text{ tal que } f(x_1, \ldots, x_n) = 0 \text{ para todo } f \in S\}$$

es llamado una **subvariedad afín** de k^n.

Ejemplos

1. $V(1) = \emptyset$ y $V(\emptyset) = V(0) = k^n$ son subvariedades afines.
2. $V(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n) = \{(a_1, \ldots, a_n)\}$.
3. En k^2 con $\mathscr{O}(\mathbb{A}^2) = k[X, Y]$, tenemos que $V(Y) = V(Y^2)$ es el eje x. ¡Dos polinomios diferentes pueden definir la misma subvariedad afín!
4. Todo sub-espacio lineal afín de k^n es una subvariedad afín.
5. Si $T \subseteq S \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$ entonces $V(S) \subseteq V(T)$, i.e., "mientras más ecuaciones, menos soluciones".

Simplificación

Sea $S \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$ subconjunto y $\langle S \rangle$ el *ideal generado* por S (i.e., sumas finitas de la forma $\sum f_i g_i$ con $f_i \in S$ y $g_i \in \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$ arbitrario). Entonces,

$$V(S) = V(\langle S \rangle).$$

En particular, *siempre* podemos suponer que $S = I \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$ es un ideal.

Teorema de la base de Hilbert

Teorema (Hilbert, 1890)

El anillo $\mathscr{O}(\mathbb{A}^n) \stackrel{\text{def}}{=} k[X_1, \ldots, X_n]$ es **noetheriano**, i.e., se verifican las condiciones equivalentes siguientes:

(i) Toda sucesión creciente de ideales es eventualmente constante, i.e., si

$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq \cdots$$

son ideales en $\mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$, entonces $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $I_m = I_{m+1}\ \forall m \geq N$.

(ii) Todo ideal $I \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$ está generado por *finitos* polinomios.

Luego, si $S \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$ subconjunto y si $I = \langle S \rangle$ ideal asociado, entonces existen $f_1, \ldots, f_r \in \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$ tales que $I = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$. En particular,

$$V(S) = V(f_1, \ldots, f_r).$$

Toda subvariedad afín puede definirse por finitas ecuaciones polinomiales.

Como consecuencia de la definición de $S \mapsto V(S)$ se verifica (Ejercicio):

1. Intersección arbitraria de subvariedades afines de k^n es también una subvariedad afín de k^n: $\bigcap_{i\in I} V(S_i) = V(\bigcup_{i\in I} S_i)$.
2. Unión finita de subvariedades afines de k^n es también una subvariedad afín de k^n: $V(S_1) \cup V(S_2) = V(S_1 S_2)$.

En particular, las subvariedades afines $V(S) \subseteq k^n$ verifican los axiomas de los conjuntos *cerrados* de una topología.

Topología de Zariski

Definimos la **topología de Zariski** de k^n como la topología obtenida al declarar como cerrados a las subvariedades afines, i.e., conjuntos de la forma $V(S)$ para cierto $S \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$. Los **abiertos de Zariski** son los

$$U = k^n \setminus V(S) \text{ para cierto } S \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{A}^n).$$

El **espacio afín** $\mathbb{A}^n$ es k^n dotado de la topología de Zariski.

Un espacio topológico X es **noetheriano** si toda sucesión *decreciente* de conjuntos cerrados es eventualmente constante. En otras palabras, si

$$F_0 \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_n \supseteq \cdots$$

subconjuntos cerrados de X, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $F_m = F_{m+1}$ $\forall m \geq N$.

El espacio afín $\mathbb{A}^n$ es un espacio topológico noetheriano.

En efecto, se tiene que:

1. La función $I \mapsto V(I)$ es decreciente.
2. La función $V(I) \mapsto \mathcal{I}(V(I))$ es decreciente y $I \subseteq \mathcal{I}(V(I))$, donde

$$\mathcal{I}(V(I)) := \{f \in \mathscr{O}(\mathbb{A}^n) \text{ tal que } f(x) = 0 \text{ para todo } x \in V(I)\}.$$

Así, una sucesión decreciente de cerrados en $\mathbb{A}^n$

$$V(I_0) \supseteq V(I_1) \supseteq V(I_2) \supseteq \cdots \supseteq V(I_n) \supseteq \cdots$$

induce una sucesión *creciente* de ideales $J_m := \mathcal{I}(V(I_m))$ de $\mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$:

$$J_0 \subseteq J_1 \subseteq J_2 \subseteq \cdots \subseteq J_n \subseteq \cdots \quad \square$$

Un espacio topológico X es **quasi-compacto** si todo cubrimiento abierto de X admite un sub-cubrimiento finito.

Todo espacio topológico noetheriano X (e.g. $\mathbb{A}^n$) es quasi-compacto.

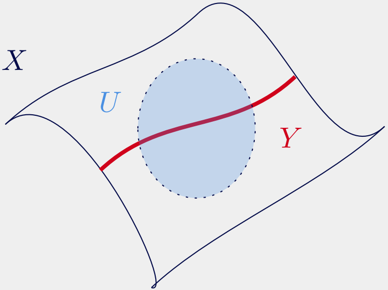
Sea $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ cubrimiento abierto. Para $i \in I$, sea $F_i := X \setminus U_i$ cerrado. Notar que si $J \subseteq I$ entonces los $\{U_j\}_{j \in J}$ cubren X si y sólo si $\bigcap_{j \in J} F_j = \emptyset$.

Supongamos, por contradicción, que toda intersección finita de cerrados de la forma F_i es no-vacía. Agregando intersecciones si fuese necesario, podemos asumir que $\{F_i\}_{i \in I}$ es estable por intersecciones finitas.

Como X es un espacio noetheriano, existe un elemento minimal no-vacío F_m en esta familia (Lema de Zorn). En particular, $F_m \cap F_i \subseteq F_m$ es una igualdad $\forall i \in I$, i.e., $F_m \subseteq F_i$ $\forall i \in I$. Esto contradice $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$. $\square$

Topología de Zariski inducida

Sea (X, τ) espacio topológico y $Y \subseteq X$ subconjunto. Entonces, la **topología inducida** en Y es la topología τ_Y obtenida al declarar que $V \in \tau_Y$ si y sólo si $V = Y \cap U$ para cierto $U \in \tau$.



Así, un subconjunto de un espacio noetheriano es también noetheriano.

Todo subconjunto del espacio afín $\mathbb{A}^n$ es un espacio topológico noetheriano respecto a la topología de Zariski (inducida), y por ende quasi-compacto.

§2.2 Funciones regulares y morfismos

Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ subconjunto. El **ideal de** V está dado por

$$\mathcal{I}(V) := \{f \in \mathscr{O}(\mathbb{A}^n) \text{ tal que } f(x) = 0 \text{ para todo } x \in V\}.$$

Por definición, tenemos que:

1. $\mathcal{I}(\emptyset) = \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$.
2. Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ subconjunto. Entonces, $X \subseteq V(\mathcal{I}(X))$ con igualdad si y sólo si X es una subvariedad afín. Así, para $X \subseteq \mathbb{A}^n$ arbitrario:

   $$V(\mathcal{I}(X)) = \overline{X}^{\mathrm{Zar}} \quad \textbf{(adherencia de Zariski)}$$

3. Si $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{A}^n$, entonces $\mathcal{I}(Y) \subseteq \mathcal{I}(X)$, i.e., "mientras más puntos, menos ecuaciones".
4. Si $X, Y \subseteq \mathbb{A}^n$, entonces $\mathcal{I}(X \cup Y) = \mathcal{I}(X) \cap \mathcal{I}(Y)$.
5. Sea $S \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$ subconjunto arbitrario. Entonces, $S \subseteq \mathcal{I}(V(S))$ y dicha inclusión en general **no** es una igualdad, incluso en el caso en que S sea un ideal. Por ejemplo, $\mathcal{I}(V(\langle Y^2 \rangle)) = \langle Y \rangle$ en $k[X, Y]$.

Sea X un espacio topológico (no-vacío). Decimos que X es **irreducible** si *no* es la unión de dos subconjuntos cerrados estrictos. En otras palabras, si $X = X_1 \cup X_2$ con X_1, X_2 cerrados, entonces $X = X_1$ o bien $X_2 = X$.

Es un Ejercicio de Topología demostrar que X es irreducible si y sólo si se satisface alguna de las condiciones equivalentes siguientes:

1. Todo par de abiertos no-vacíos de X se intersectan.
2. Todo abierto no-vacío de X es denso.

En particular, si X espacio topológico irreducible entonces X **no** es un espacio de Hausdorff (a menos que sea un conjunto de un elemento).

Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ subvariedad afín. Entonces, X es irreducible $\Leftrightarrow$ $\mathcal{I}(X) \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$ es un ideal primo.

($\Rightarrow$): Sean $f, g \in \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$ tales que fg se anula en X, i.e., $fg \in \mathcal{I}(X)$. Entonces, $X \subseteq V(fg) \overset{\text{def}}{=} V(f) \cup V(g)$ y así $X = X_1 \cup X_2$ con $X_1 := V(f) \cap X$ y $X_2 := V(g) \cap X$ cerrados en X. Como X irreducible, $X_1 = X$ o bien $X_2 = X$, i.e., $X \subseteq V(f)$ o bien $X \subseteq V(g)$, i.e., $f \in \mathcal{I}(X)$ o bien $g \in \mathcal{I}(X)$. Así, $\mathcal{I}(X)$ es un ideal primo.

($\Leftarrow$) Si $X = X_1 \cup X_2$, con $X_i \subsetneq X$ cerrado propio, entonces $X_i \subsetneq X$ implica que $\exists f_i \in \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$ que se anula en X_i pero no en X, i.e., $\exists f_1, f_2 \in \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$ tales que $f_i \notin \mathcal{I}(X)$. Sin embargo, $f_1 f_2 \in \mathcal{I}(X)$ pues f_i se anula en X_i y $X = X_1 \cup X_2$. Esto contradice que $\mathcal{I}(X)$ ideal primo. $\square$

Sea k un cuerpo de cardinal infinito (e.g. k algebraicamente cerrado). Entonces, $\mathcal{I}(\mathbb{A}^n) = \langle 0 \rangle$ y $\mathbb{A}^n$ es irreducible.

Como k infinito, todo $f \in \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$ que se anula sobre $\mathbb{A}^n$ es nulo. En efecto, basta fijar $n-1$ variables para obtener un polinomio en una variable con infinitas raíces, que por ende es nulo. La conclusión $\mathcal{I}(\mathbb{A}^n) = \langle 0 \rangle$ se obtiene por inducción en n. Así, $\mathbb{A}^n$ es irreducible pues $\mathcal{I}(\mathbb{A}^n) = \langle 0 \rangle$ ideal primo. $\square$

Sea A un anillo conmutativo con unidad, y sea $I \subseteq A$ un ideal. El conjunto

$$\sqrt{I} := \{f \in A \text{ tal que existe } m \in \mathbb{N}^{\geq 1} \text{ tal que } f^m \in I\}$$

es un ideal de I que verifica $I \subseteq \sqrt{I}$, llamado el **radical** de I.

Decimos que I es un **ideal radical** si $I = \sqrt{I}$.

Más aún, $I \subseteq A$ es un ideal radical si y sólo si A/I es un **anillo reducido** (i.e., el único elemento nilpotente de A/I es el 0). En particular, hay inclusiones

$$\{\text{ideales maximales}\} \subseteq \{\text{ideales primos}\} \subseteq \{\text{ideales radicales}\}$$

para todo anillo conmutativo con unidad A.

Teorema de los ceros de Hilbert (1893)

Sea $k = \overline{k}$ un cuerpo algebraicamente cerrado (e.g. $k = \mathbb{C}$), y sea $I \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{A}^n) \stackrel{\text{def}}{=} k[X_1, \dots, X_n]$ un ideal. Entonces:

1. **Nullstellensatz débil.** Si $I = \mathfrak{m}$ es un ideal maximal, entonces
$$\mathfrak{m} = \langle X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n \rangle$$
para ciertos $a_1, \dots, a_n \in k$.
2. **Nullstellensatz.** Para todo ideal I se cumple que
$$\mathcal{I}(V(I)) = \sqrt{I}.$$

En particular, $V(I) = \emptyset$ si y sólo si $I = \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$.

Convención: En todo lo que sigue del curso, asumiremos que k es un cuerpo algebraicamente cerrado

La aplicación $X \mapsto \mathcal{I}(X)$ establece una *biyección* decreciente (con inversa dada por $I \mapsto V(I)$) entre:

1. Subvariedades afines de $\mathbb{A}^n$ e ideales radicales de $\mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$.
2. Subvariedades afines irreducibles de $\mathbb{A}^n$ e ideales primos de $\mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$.
3. Puntos de $\mathbb{A}^n$ e ideales maximales de $\mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$.

Sea X un espacio topológico. Un subconjunto $A \subseteq X$ es **localmente cerrado** si es un subconjunto cerrado de un abierto de X.

En otras palabras, si $A = U \cap F$ es la intersección de un abierto U y un cerrado F de X. En particular, considerando $U = X$ (resp. $F = X$), todo cerrado (resp. abierto) de X es localmente cerrado.

Definición (función regular)

Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ un subconjunto localmente cerrado. Una **función regular** en X es una función $f : X \longrightarrow k$ tal que para todo punto $x \in X$ existe una vecindad abierta $x \in U_x \subseteq X$ y polinomios $P_x, Q_x \in \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$ tales que $Q_x(x) \neq 0$, y tales que

$$f|_{U_x} = \left.\frac{P_x}{Q_x}\right|_{U_x}.$$

Denotamos por $\mathscr{O}(X) := \{f : X \longrightarrow k \text{ función regular}\}$ al k-álgebra de funciones regulares en X.

Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ un *cerrado* de Zariski (i.e., una subvariedad afín). Entonces, toda $f : X \to k$ regular es la restricción de $P \in \mathscr{O}(\mathbb{A}^n) \stackrel{\mathsf{def}}{=} k[X_1, \ldots, X_n]$, i.e., $f = P|_X$. En otras palabras,

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}(X) \stackrel{\iota}{\hookrightarrow} \mathscr{O}(\mathbb{A}^n) \xrightarrow{\mathrm{res}_X} \mathscr{O}(X) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta, y en particular $\mathscr{O}(X) \cong \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)/\mathcal{I}(X)$.

Sea $X = V(I) \subseteq \mathbb{A}^n$ cerrado de Zariski, con $I \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$ ideal. Sea $f : X \to k$ función regular, y veamos que f es restricción de un polinomio:

Fijamos para cada $x \in X$ una vecindad abierta $U_x \subseteq X$ de $x \in X$ y polinomios P_x, Q_x tales que $fQ_x = P_x$ en U_x. Como U_x abierto Zariski,

$$X \setminus U_x = X \cap V(A_1, \ldots, A_m) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \{y \in X,\ A_1(y) = \cdots = A_m(y) = 0\}$$

para ciertos $A_i \in \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$. En particular, $(A_1 f Q_x)(y) = (A_1 P_x)(y)\ \forall y \in X$.

Redefiniendo $Q_x := A_1 Q_x$ y $P_x := A_1 P_x$, obtenemos que $fQ_x = P_x$ ahora es válida en todo X. Cambiando la numeración si fuera necesario para que $A_1(x) \neq 0$, tenemos que $Q_x(x) \neq 0$ por definición de Q_x.

Sea $J := \langle \{Q_x\}_{x \in X} \rangle \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$. Por definición, los Q_x **no** tienen ceros comunes en X, i.e., $\emptyset = V(J) \cap X \overset{\text{def}}{=} V(J) \cap V(I) \overset{\text{def}}{=} V(I + J)$.

Nullstellensatz: $V(I + J) = \emptyset \Leftrightarrow I + J = \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$. En particular, existen $B \in I$ y $\sum_{j=1}^r G_{x_j} Q_{x_j} \in J$ tales que $B + \sum_{j=1}^r G_{x_j} Q_{x_j} = 1$.

Como $X = V(I)$, $B = 0$ en X y por ende

$$f = f \cdot 1 = \sum_{j=1}^r G_{x_j}(fQ_{x_j}) = \sum_{j=1}^r G_{x_j} P_{x_j} =: P.$$

La última parte se deduce al considerar $\operatorname{res}_X : \mathscr{O}(\mathbb{A}^n) \twoheadrightarrow \mathscr{O}(X),\ P \longmapsto P|_X$ y notar que $\ker(\operatorname{res}_X) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{I}(X)$. $\square$

Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ un subconjunto localmente cerrado. Definimos el **haz de funciones regulares** en X como el haz en k-álgebras $\mathscr{O}_X$ que a cada abierto $U \subseteq X$ asocia el k-álgebra

$$\mathscr{O}_X(U) := \mathscr{O}(U) \overset{\text{def}}{=} \{f : U \longrightarrow k \text{ función regular}\}.$$

Más aún, si dotamos a k de la topología de Zariski (i.e., lo pensamos como la **recta afín** $\mathbb{A}^1$) entonces toda función regular es continua (Ejercicio).

Así, si denotamos por $\mathscr{C}_X$ al haz de funciones continuas $f : X \to \mathbb{A}^1$ respecto a las correspondientes topologías de Zariski, entonces

$$\mathscr{O}_X \subseteq \mathscr{C}_X$$

es un subhaz.