Geometría Algebraica

Clase 3

Pedro Montero

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

07 de Agosto de 2023

§1.3 Prehaces y haces

1. Sea G grupo abeliano. El haz asociado al prehaz constante G es el haz $\underline{G}$ de funciones localmente constantes, i.e., $G^+ = \underline{G}$.
2. Sea $\mathscr{F}$ un haz de grupos abelianos en X y sea $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{F}$ un sub-haz. El **haz cociente** $\mathscr{F}/\mathscr{E} := (\mathscr{F}/\mathscr{E})^+_{\mathrm{pre}}$ es el haz asociado al prehaz

$$(\mathscr{F}/\mathscr{E})_{\mathrm{pre}}(U) \overset{\text{def}}{=} \mathscr{F}(U)/\mathscr{E}(U) \text{ para todo abierto } U \subseteq X.$$

3. Sea $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morfismo de haces de grupos abelianos. El **haz cokernel** $\operatorname{coker}\varphi = (\operatorname{coker}\varphi)^+_{\mathrm{pre}}$ es el haz asociado al prehaz

$$(\operatorname{coker}\varphi)_{\mathrm{pre}}(U) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{coker}(\varphi_U) \text{ para todo abierto } U \subseteq X.$$

Haz imagen

Sea $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morfismo de haces de grupos abelianos, y sea $(\operatorname{Im}\varphi)_{\mathrm{pre}}$ el prehaz imagen que definimos anteriormente como

$$(\operatorname{Im}\varphi)_{\mathrm{pre}}(U) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Im}(\varphi_U) \text{ para todo abierto } U \subseteq X.$$

El **haz imagen** como el haz asociado al prehaz imagen, i.e., $\operatorname{Im}\varphi = (\operatorname{Im}\varphi)^{+}_{\mathrm{pre}}$.

Observación práctica

Una sección $\sigma \in \mathscr{G}(U)$ pertenece a $(\operatorname{Im}\varphi)(U)$ si existe un cubrimiento abierto $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ y existen secciones $s_i \in \mathscr{F}(U_i)$ tales que $\varphi(s_i) = \sigma|_{U_i}$ para todo $i \in I$. En otras palabras, *son las secciones de $\mathscr{G}$ que provienen localmente de secciones de $\mathscr{F}$*.

Sea $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ morfismo de haces de grupos abelianos. Decimos que φ es:

(a) **inyectivo** si $\ker(\varphi) = 0$, donde 0 es el haz asociado al grupo trivial.

(b) **sobreyectivo** si $\operatorname{Im}\varphi \overset{\text{def}}{=} (\operatorname{Im}\varphi)^{+}_{\text{pre}} = \mathscr{G}$.

(c) un **isomorfismo** de haces si es inyectivo y sobreyectivo.

Proposición útil

Sea $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morfismo de haces de grupos abelianos en X. Entonces, φ es un isomorfismo si y sólo si para todo $x \in X$ el morfismo inducido

$$\varphi_x : \mathscr{F}_x \longrightarrow \mathscr{G}_x \text{ es un isomorfismo.}$$

En general, siempre hay un isomorfismo de haces

$$\mathscr{F} / \ker\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi.$$

($\Rightarrow$): Para $x \in X$, el morfismo de tallos $\varphi_x : \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$ se define considerando para todo germen $s_x \in \mathscr{F}_x$ un abierto $U \subseteq X$ tal que $x \in U$ y una sección $s \in \mathscr{F}(U)$ tal que $s_x = [(s, U)]$. Así, definimos $\varphi_x(s_x)$ como el germen de $\varphi(s) \in \mathscr{G}(U)$ en $\mathscr{G}_x$, i.e., $\varphi_x(s_x) := [(\varphi(s), U)]$. Luego, si φ es un isomorfismo entonces φ_x también lo es para todo $x \in X$.

($\Leftarrow$): Si $\varphi_x : \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$ es un isomorfismo $\forall x \in X$ entonces φ es inyectivo, pues si $s \in \mathscr{F}(U)$ sección sobre $U \subseteq X$ con $\varphi(s) = 0$ en $\mathscr{G}(U)$ entonces $\varphi_x(s_x) = 0$ en $\mathscr{G}_x$ $\forall x \in U$. Como φ_x inyectivo, tenemos que $s_x = 0$ $\forall x \in U$ y luego $s = 0$ pues $\mathscr{F}$ es un haz. La sobreyectividad queda como Ejercicio.

Por último, para deducir el isomorfismo de haces $\mathscr{F}/\ker\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi$ basta utilizar para todo $x \in X$ el teorema del isomorfismo (clásico) para cada morfismo de grupos abelianos $\varphi_x : \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$, y aplicar el resultado anterior.

$\square$

Sucesiones exactas de haces

Sea $\{\mathscr{F}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una colección de haces de grupos abelianos en X, y sean $\varphi_n : \mathscr{F}_n \to \mathscr{F}_{n+1}$ morfismos de haces para todo $n \in \mathbb{Z}$. Decimos que la sucesión

$$\cdots \xrightarrow{\varphi_{n-2}} \mathscr{F}_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} \mathscr{F}_n \xrightarrow{\varphi_n} \mathscr{F}_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} \cdots$$

es **exacta** si $\ker \varphi_n = \operatorname{Im} \varphi_{n-1} \overset{\text{def}}{=} (\operatorname{Im} \varphi_{n-1})^+_{\text{pre}}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Más aún, una **sucesión exacta corta** de haces es una sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{G} \xrightarrow{\psi} \mathscr{H} \longrightarrow 0,$$

i.e., φ es inyectivo, ψ es sobreyectivo, y además $\ker \psi = \operatorname{Im} \varphi$.

Ejemplo: la sucesión exponencial (Kodaira–Spencer, 1953)

Sea $X = \mathbb{C}$ (o una variedad compleja). La **sucesión exponencial**

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\iota} \mathscr{O}_X \xrightarrow{\exp(2\pi i \cdot)} \mathscr{O}_X^\times \longrightarrow 0,$$

donde $\mathscr{O}_X$ (resp. $\mathscr{O}_X^\times$) es el haz de funciones holomorfas (resp. el haz de funciones holomorfas que no se anulan), es **exacta**.

§1.4 Espacios anillados y $\mathscr{O}_X$-módulos

Recuerdo: Sea A un anillo (conmutativo con unidad). Un A-módulo M es esencialmente un A-espacio vectorial: es un grupo abeliano $(M,+)$ donde podemos multiplicar por "*escalares*" en el anillo A.

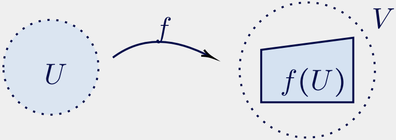
Objetivo: Extender lo anterior a un espacio topológico X, permitiendo que el anillo A varíe en cada abierto $U \subseteq X$. Para ello necesitamos:

Sea $f : X \to Y$ función continua y $V \subseteq Y$ abierto, entonces $f^{-1}(V)$ es un abierto de X. Luego, a partir de un prehaz $\mathscr{F}$ en X podemos definir naturalmente un prehaz $f_*\mathscr{F}$ en Y mediante:

$$(f_*\mathscr{F})(V) := \mathscr{F}(f^{-1}(V)) \text{ para todo } V \subseteq Y \text{ abierto.}$$

El prehaz $f_*\mathscr{F}$ es llamado el **prehaz imagen directa**.

La imagen $f(U) \subseteq Y$ de un abierto $U \subseteq X$ **no** es necesariamente un abierto de Y. Dado un prehaz $\mathscr{G}$ en Y **no** podemos utilizar la fórmula "*inocente*" $\mathscr{G}(f(U))$, donde $U \subseteq X$ abierto, para definir un prehaz en X.



Solución: *aproximar* la imagen $f(U) \subseteq Y$ por abiertos de Y, i.e., considerar vecindades abiertas de $f(U)$ y gérmenes de secciones:

$$(f^{-1}\mathscr{G})_{\mathrm{pre}}(U) := \varinjlim_{\substack{V \subseteq Y \text{ abierto} \\ \text{tal que } f(U) \subseteq V}} \mathscr{G}(V) \quad \textbf{(prehaz imagen inversa)}$$

Los elementos de $(f^{-1}\mathscr{G})_{\mathrm{pre}}(U)$ son (clases de equivalencia de) gérmenes (s, V) con $s \in \mathscr{G}(V)$ y $f(U) \subseteq V$ abierto de Y, y donde $(s_1, V_1) \sim (s_2, V_2)$ si existe $W \subseteq Y$ abierto tal que $f(U) \subseteq W \subseteq V_1 \cap V_2$ y $s_1|_W = s_2|_W$.

En general $(f^{-1}\mathscr{G})_{\mathrm{pre}}$ **no** es un haz . Por lo anterior, si $\mathscr{G}$ es un haz en Y, entonces definimos el **haz imagen inversa** $f^{-1}\mathscr{G}$ como el haz asociado al prehaz $(f^{-1}\mathscr{G})_{\mathrm{pre}}$, i.e., $f^{-1}\mathscr{G} := (f^{-1}\mathscr{G})^{+}_{\mathrm{pre}}$.

Más generalmente, se deja como Ejercicio verifcar:

1. Si $\mathscr{F}$ es un haz en X, entonces $f_*\mathscr{F}$ es un haz en Y.
2. Dar un ejemplo que muestre que incluso si $\mathscr{G}$ es un haz, **no** necesariamente $(f^{-1}\mathscr{G})_{\mathrm{pre}}$ es un haz en X.
3. Sean $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ haces de grupos abelianos en X e Y, respectivamente. Probar que hay un isomorfismo de grupos abelianos

$$\mathrm{Hom}(f^{-1}\mathscr{G}, \mathscr{F}) \cong \mathrm{Hom}(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F}),$$

i.e., los functores f^{-1} y f_* son adjuntos.

El caso de inclusiones

Supongamos $X \subseteq Y$ sub-espacio topológico y sea $\iota : X \hookrightarrow Y$ la función continua dada por la inclusión.

Dado un haz $\mathscr{G}$ en Y, denotamos el haz imagen inversa $\iota^{-1}\mathscr{G}$ en X mediante $\mathscr{G}|_X$, y lo llamamos la **restricción de $\mathscr{G}$ a X**. Por ejemplo:

1. En el caso en que $X = V$ sea un *abierto* de Y, tenemos que $\mathscr{G}|_V$ es el haz en V que asocia a todo abierto $U \subseteq V$ el grupo abeliano $\mathscr{G}(U)$.
2. En el caso en que $X = \{y\}$ es un punto de Y, entonces $\mathscr{G}|_y$ es el haz constante $\mathscr{G}_y$ en $\{y\}$ (Ejercicio).

Espacios anillados

Sea k un cuerpo. Un **espacio anillado** en k-álgebras es un par $(X, \mathscr{O}_X)$ donde X es un espacio topológico y un haz $\mathscr{O}_X$ de k-álgebras (conmutativas con unidad) llamado el **haz estructural**.

Un **morfismo de espacios anillados** en k-álgebras es un par

$$(f, \varphi) : (X, \mathscr{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathscr{O}_Y)$$

formado por una $f : X \to Y$ continua y un morfismo de haces de k-álgebras

$$\varphi : \mathscr{O}_Y \longrightarrow f_* \mathscr{O}_X,$$

llamado[1] el *pullback de funciones regulares de Y a X*.

Dado que la composición de morfismos de espacios anillados está bien definida, obtenemos una categoría. En particular, tenemos la noción de isomorfismo de espacios anillados en k-álgebras.

[1] En muchos textos (e.g. Hartshorne), φ se denota $f^\sharp : \mathscr{O}_Y \to f_* \mathscr{O}_X$.

1. Sea M una variedad diferenciable, y sea $\mathscr{O}_M := \mathscr{C}_M^\infty$ el haz de funciones diferenciables en M. Entonces, $(M, \mathscr{O}_M)$ es un espacio anillado en $\mathbb{R}$-álgebras.
2. Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ un espacio anillado en k-álgebras. Si $U \subseteq X$ es un abierto, entonces podemos considerar el haz de k-álgebras $\mathscr{O}_U \stackrel{\text{def}}{=} \mathscr{O}_X|_U$ que permite considerar a U como un espacio anillado también.

   Queda como Ejercicio construir un morfismo de espacios anillados

$$(U, \mathscr{O}_U) \to (X, \mathscr{O}_X).$$

Intuición

Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ un espacio anillado en k-álgebras. Si pensamos $\mathscr{O}_X$ como un anillo que varía a medida que variamos los abiertos U de X, entonces podemos considerar módulos sobre cada uno de los anillos $\mathscr{O}_X(U)$.

Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ un espacio anillado en k-álgebras. Un $\mathscr{O}_X$-**módulo** es un haz $\mathscr{F}$ de k-espacios vectoriales tal que para todo abierto $U \subseteq X$ el k-espacio vectorial $\mathscr{F}(U)$ es un $\mathscr{O}_X(U)$-módulo, y tal que para cada inclusión de abiertos $V \subseteq U \subseteq X$ las aplicaciones lineales $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$, $s \mapsto s|_V$ son compatibles con las estructuras de módulos.

Un **morfismo de** $\mathscr{O}_X$**-módulos** $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ es un morfismo de haces de k-espacios vectoriales tal que para todo abierto $U \subseteq X$ la aplicación

$$\varphi_U : \mathscr{F}(U) \longrightarrow \mathscr{G}(U) \text{ es } \mathscr{O}_X(U)\text{-lineal.}$$

Obtenemos una categoría $\mathscr{O}_X$-**Mod**, donde

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \overset{\text{def}}{=} \{\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G} \text{ morfismo de } \mathscr{O}_X\text{-módulos}\}.$$

son grupos abelianos que además poseen[2] estructura de $\mathscr{O}_X(X)$-módulo.

[2] Dado $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ y $\lambda \in \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$, definimos $\lambda\varphi$ como el morfismo de $\mathscr{O}_X$-módulos que en el abierto $U \subseteq X$ está dado por $(\lambda\varphi)(s) := \lambda|_U \cdot s \ \forall s \in \mathscr{F}(U)$.

Podemos generalizar muchas construcciones clásicas al contexto de $\mathscr{O}_X$-módulos, en ocasiones considerando el haz asociado al prehaz en cuestión:

1. La noción de sub-$\mathscr{O}_X$-módulo $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{F}$, y el $\mathscr{O}_X$-módulo cociente $\mathscr{F}/\mathscr{E}$. Para este último, se considera el haz asociado.
2. Dado $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$, los haces $\ker(\varphi)$, $\operatorname{Im}(\varphi)$ y $\operatorname{coker}(\varphi)$ son $\mathscr{O}_X$-módulos, donde para los dos últimos se considera el haz asociado. Así, podemos hablar de sucesiones exactas de $\mathscr{O}_X$-módulos.
3. Si $\{\mathscr{F}_i\}_{i \in I}$ es una colección arbitraria de $\mathscr{O}_X$-módulos, entonces la **suma directa** $\bigoplus_{i \in I} \mathscr{F}_i$ es un $\mathscr{O}_X$-módulo.
4. Dados $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ dos $\mathscr{O}_X$-módulos, el **producto tensorial** $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{G}$ es el haz asociado al prehaz

$$U \longmapsto \mathscr{F}(U) \otimes_{\mathscr{O}_X(U)} \mathscr{G}(U).$$

Ejemplos más usados

5. Si $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ $\mathscr{O}_X$-módulos y $U \subseteq X$ un abierto, entonces $\mathscr{F}|_U$ y $\mathscr{G}|_U$ son $\mathscr{O}_U$-módulos. El $\mathscr{O}_X$-módulo dado por el prehaz de grupos abelianos
$$U \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_U}(\mathscr{F}|_U, \mathscr{G}|_U)$$
es un haz, que denotamos $\mathscr{H}\!om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ o $\mathscr{H}\!om(\mathscr{F}, \mathscr{G})$.
6. Sea $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo. El $\mathscr{O}_X$-módulo **dual** de $\mathscr{F}$ está dado por
$$\mathscr{F}^\vee := \mathscr{H}\!om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{O}_X).$$
7. Podemos hablar del álgebra tensorial, álgebra exterior, y álgebra simétrica de $\mathscr{O}_X$-módulos. Por ejemplo, para $d \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ la **potencia exterior** $\bigwedge^d \mathscr{F}$ de un $\mathscr{O}_X$-módulo $\mathscr{F}$ es el haz asociado al prehaz
$$U \longmapsto \bigwedge^d \mathscr{F}(U).$$
8. Un $\mathscr{O}_X$-módulo $\mathscr{F}$ es **libre** si $\mathscr{F} \cong \mathscr{O}_X^{\oplus I} \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{i \in I} \mathscr{O}_X$ para cierto conjunto de índices I. El cardinal de I es el **rango** de F.

9. Un $\mathscr{O}_X$-módulo $\mathscr{F}$ es **localmente libre** si existe un cubrimiento abierto $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ tal que $\mathscr{F}|_{U_i}$ es un $\mathscr{O}_{U_i}$-módulo libre, i.e.,
$$\mathscr{F}|_{U_i} \cong \mathscr{O}_{U_i}^{\oplus r_i}.$$
Si X espacio topológico *conexo*, todos los rangos r_i son iguales a un mismo valor r, llamado el **rango** del $\mathscr{O}_X$-módulo localmente libre $\mathscr{F}$.
10. Un **haz invertible** en X es un $\mathscr{O}_X$-módulo localmente libre $\mathscr{L}$ de rango 1, i.e., tal que X puede cubrirse por abiertos $\{U_i\}_{i\in I}$ tales que $\mathscr{L}|_{U_i} \cong \mathscr{O}_{U_i}$ para todo $i \in I$. En particular, si $\mathscr{F}$ es un $\mathscr{O}_X$-módulo, entonces $\mathscr{F}|_{U_i} \otimes_{\mathscr{O}_{U_i}} \mathscr{L}|_{U_i} \cong \mathscr{F}|_{U_i}$ para todo $i \in I$.
11. Un **haz de ideales** $\mathcal{I}$ es un sub-$\mathscr{O}_X$-módulo de $\mathscr{O}_X$. En otras palabras, para todo abierto $U \subseteq X$ se tiene que $\mathcal{I}(U)$ es un ideal de $\mathscr{O}_X(U)$.

Pullback y Pushforward

Consideremos un morfismos de espacios anillados

$$(f,\varphi):(X,\mathscr{O}_X)\longrightarrow(Y,\mathscr{O}_Y),$$

donde $f:X\to Y$ continua y $\varphi:\mathscr{O}_Y\to f_*\mathscr{O}_X$ es un morfismo de haces de k-álgebras, i.e., para todo abierto $V\subseteq Y$ tenemos un morfismo de k-álgebras

$$\varphi_V:\mathscr{O}_Y(V)\longrightarrow f_*\mathscr{O}_X(V)\overset{\text{def}}{=}\mathscr{O}_X(f^{-1}(V)).$$

Sea $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo en X y $\mathscr{G}$ un $\mathscr{O}_Y$-módulo en Y. Entonces:

- El haz **imagen directa** (o **pushforward**) $f_*\mathscr{F}$ es un $f_*\mathscr{O}_X$-módulo. Dado que poseemos un morfismo de haces $\varphi:\mathscr{O}_Y\to f_*\mathscr{O}_X$ podemos definir una estructura de $\mathscr{O}_Y$-módulo en $f_*\mathscr{F}$.

Como antes, si $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo en X y $\mathscr{G}$ un $\mathscr{O}_Y$-módulo en Y. Entonces:

- El haz imagen inversa $f^{-1}\mathscr{G}$ es un $f^{-1}\mathscr{O}_Y$-módulo. Por otra parte, la *adjunción* entre f^{-1} y f_* implica que hay un isomorfismo

$$\mathrm{Hom}(f^{-1}\mathscr{O}_Y, \mathscr{O}_X) \cong \mathrm{Hom}(\mathscr{O}_Y, f_*\mathscr{O}_X)$$

y $\varphi : \mathscr{O}_Y \to f_*\mathscr{O}_X$ corresponde a un único $\psi : f^{-1}\mathscr{O}_Y \to \mathscr{O}_X$. Así, $\mathscr{O}_X$ es dotado de estructura de $f^{-1}\mathscr{O}_Y$-módulo a través de ψ. Para obtener un $\mathscr{O}_X$-módulo basta considerar la *extensión por escalares*:

$$f^*\mathscr{G} := f^{-1}\mathscr{G} \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_Y} \mathscr{O}_X.$$

El $\mathscr{O}_X$-módulo $f^*\mathscr{G}$ es el **pullback** de $\mathscr{G}$.

Adjunción a nivel de espacios anillados

Tal como antes, f^* y f_* son functores adjuntos:

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(f^*\mathscr{G}, \mathscr{F}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F}).$$

Entra en escena la estrella de la película...

El haz canónico

Sea $X = \mathbb{R}^n$ (o variedad diferenciable) y $\mathscr{O}_X := \mathscr{C}^\infty_X$. Si elegimos coordenadas (locales) $x_1, \ldots, x_n$ de X y denotamos por $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n$ sus diferenciales, entonces el **haz cotangente** Ω^1_X está definido por:

Para cada abierto $U \subseteq X$, los elementos de $\Omega^1_X(U)$ son 1-formas diferenciales

$$\omega(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x)\,\mathrm{d}x_j, \quad \text{donde } f_j \in \mathscr{O}_X(U).$$

Así, $\Omega^1_X|_U \cong \mathscr{O}_U^{\oplus n}$, i.e., Ω^1_X haz localmente libre de rango $n = \dim_{\mathbb{R}}(X)$.

El haz canónico

Más generalmente, podemos considerar el haz $\Omega_X^d := \bigwedge^d \Omega_X^1$ de d-formas diferenciales, cuyas secciones sobre el abierto $U \subseteq X$ son de la forma

$$\omega(x) = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_d \leq n} f_{j_1,\ldots,j_d}(x)\, \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_d}, \quad \text{donde } f_{j_1,\ldots,j_d} \in \mathscr{O}_X(U).$$

Así, Ω_X^d es un haz localmente libre de rango $\binom{n}{d}$. En particular,

$$\omega_X := \Omega_X^n \overset{\text{def}}{=} \bigwedge^n \Omega_X^1$$

es un *haz invertible*, que llamamos el **haz canónico** de X. El haz dual

$$\mathscr{T}_X := \mathscr{H}\!om_{\mathscr{O}_X}(\Omega_X^1, \mathscr{O}_X)$$

es el **haz tangente** de X, con secciones llamadas *campos vectoriales*.

Leitmotiv de la Geometría Algebraica Moderna

Toda la geometría de X debería estar gobernada por ω_X.