Geometría Algebraica

Clase 2

Pedro Montero

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

1 de Agosto de 2023

§1.3 Prehaces y haces

Motivación (Jean Leray, 1945)

Hay varias propiedades *locales* de las funciones. Por ejemplo, si $U \subseteq \mathbb{C}$ es abierto no-vacío y $g : U \to \mathbb{C}$ función holomorfa tal que $g(z) \neq 0 \ \forall z \in U$

¿Existe $f : U \to \mathbb{C}$ función holomorfa tal que $g = e^f$?

La respuesta *depende* del abierto U. Por ejemplo,

(a) Si $U = \mathbb{C}$ la respuesta es **sí**: $f(z) := \int_1^z \frac{g'(s)}{g(s)} \, \mathrm{d}s$ funciona.

(b) Si $U = \mathbb{C}^*$ la respuesta es **no**: si $g = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^*}$, la existencia de f implicaría que existe un logaritmo complejo definido en $\mathbb{C}^*$ (imposible).

Localmente la respuesta es simpre afirmativa: tomar cualquier logaritmo en un pequeño disco $D(z_0, \varepsilon) \subseteq U$ y considerar $f := \log(g)$ en $D(z_0, \varepsilon)$.

Leitmotiv de la Teoría de Haces

Considerar propiedades locales y obtener enunciados **globales**.

Sea (X, τ) un espacio topológico no-vacío. Un sub-conjunto de abiertos $\mathscr{B} \subseteq \tau$ es una **base** si:

1. Los elementos de $\mathscr{B}$ cubren X, i.e., $X = \bigcup_{U \in \mathscr{B}} U$.
2. Para cada intersección no-vacía $U \cap V$ con $U, V \in \mathscr{B}$, se tiene que:

   Para todo $x \in U \cap V$, existe $W \in \mathscr{B}$ tal que $x \in W \subseteq U \cap V$.

Ejemplo: Sea $X = \mathbb{R}^n$ (o cualquier espacio métrico) con la topología euclideana, entonces $\mathscr{B} = \{\text{bolas abiertas}\}$ es una base.

Recíprocamente: si $\mathscr{B}$ es una familia de sub-conjuntos de X tales que:

(A1) Para todo $x \in X$, existe $U \in \mathscr{B}$ tal que $x \in U$.

(A2) Para toda intersección no-vacía $U \cap V \neq \varnothing$, con $U, V \in \mathscr{B}$ se tiene que:

Para todo $x \in U \cap V$, existe $W \in \mathscr{B}$ tal que $x \in W \subseteq U \cap V$.

Definimos la **topología generada** por $\mathscr{B}$ como la topología de X con abiertos dados por todas las posibles uniones (arbitrarias) de elementos de $\mathscr{B}$.

Un **prehaz** $\mathscr{F}$ en un espacio topológico X consiste en:

1. Para todo abierto $U \subseteq X$, un conjunto $\mathscr{F}(U)$.
2. Para cada inclusión de abiertos $U \hookrightarrow V$, una *aplicación de restricción*

$$\begin{aligned} r_{V,U} : \mathscr{F}(V) &\longrightarrow \mathscr{F}(U) \\ s &\longmapsto r_{V,U}(s) \overset{\text{def}}{=} s|_U \end{aligned}$$

   verificando que

   (a) Si $U \hookrightarrow V \hookrightarrow W$ son inclusiones de tres abiertos en X, entonces las restricciones

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(W) \arrow[r, "r_{W,V}"'] \arrow[rr, bend left, "r_{W,U}"] & \mathscr{F}(V) \arrow[r, "r_{V,U}"'] & \mathscr{F}(U) \end{tikzcd}$$

   conmutan, i.e., $r_{W,U} = r_{V,U} \circ r_{W,V}$.

   (b) Para todo abierto $U \subseteq X$, se tiene que $r_{U,U} = \mathrm{Id}_{\mathscr{F}(U)}$.

Secciones de un prehaz

Los elementos $s \in \mathscr{F}(U)$ son llamados **secciones** de $\mathscr{F}$ sobre U.

Por motivos que discutiremos más adelante, en la práctica se utilizan *tres* notaciones para denotar el conjunto de las secciones de $\mathscr{F}$ sobre U:

$$\mathscr{F}(U) \overset{\text{def}}{=} \Gamma(U, \mathscr{F}) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{H}^0(U, \mathscr{F}).$$

Frecuentemente, por "secciones de $\mathscr{F}$" nos referiremos al caso $U = X$. Los elementos de $\Gamma(X, \mathscr{F})$ son llamados **secciones globales** de $\mathscr{F}$.

Ejercicio: Recordemos que $\mathbf{Top}(X)$ es la categoría cuyos objetos son los abiertos de X y cuyos morfismos son inclusiones. Probar que un prehaz es equivalente a un functor contravariante

$$\mathscr{F} : \mathbf{Top}(X) \to \mathbf{Conj}.$$

Cultura general: Esta observación es clave para definir el concepto de *Topología de Grothendieck*, donde se cambia $\mathbf{Top}(X)$ por otras categorías.

Ejemplos

1. Sea $X = \mathbb{R}^n$ (o una variedad diferenciable) y $\mathscr{F} = \mathscr{C}^\infty$ el prehaz con
$$\mathscr{C}^\infty(U) := \{f : U \longrightarrow \mathbb{R} \text{ función diferenciable}\},$$
que es una $\mathbb{R}$-álgebra. Aquí, $r_{V,U} : \mathscr{C}^\infty(V) \to \mathscr{C}^\infty(U)$, $f \mapsto f|_U$ es la restricción usual de funciones.
2. Sea S conjunto fijo. El **prehaz constante** $\mathscr{F} := S$ está dado por $S(U) \overset{\text{def}}{=} \mathscr{F}(U) := S$ para todo abierto $U \subseteq X$, y donde $r_{V,U} = \mathrm{Id}_S$.
3. Sea S conjunto fijo. Si $U \subseteq X$ abierto, una función $f : U \to S$ es *localmente constante* si $\forall x \in U$ existe una vecindad abierta $x \in V_x \subseteq U$ tal que $f|_{V_x}$ es una función constante[1]. El **prehaz de funciones localmente constantes** $\mathscr{F} := \underline{S}$ está dado por
$$\underline{S}(U) := \{f : U \to S \text{ función localmente constante}\},$$
donde las restricciones son las restricciones usuales de funciones.

[1] e.g. En $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$, la función $\operatorname{sgn}(x) := x/|x|$ es localmente constante.

4. Sea S un conjunto fijo y $\{*\}$ un singleton fijo, y sea $x_0 \in X$ un punto. El **prehaz rascacielo**, denotado $\iota_{x_0}(S)$ o $\iota_{x_0,*}(S)$, está dado por

$$(\iota_{x_0}(S))(U) := \begin{cases} \{*\} & \text{si } x_0 \notin U \\ S & \text{si } x_0 \in U \end{cases}$$

Queda como Ejercicio describir las aplicaciones de restricción $r_{V,U}$.

Estructura algebraica adicional

Consideraremos prehaces $\mathscr{F}$ tales que $\mathscr{F}(U)$ posee una estructura extra, y los morfismos de restricción la preservan. E.g., un **prehaz en grupos** es un prehaz $\mathscr{F}$ tal que $\mathscr{F}(U)$ es un grupo para todo abierto $U \subseteq X$, donde las

$$r_{V,U} : \mathscr{F}(V) \longrightarrow \mathscr{F}(U),\ s \mapsto s|_U$$

son morfismos de grupos, y donde *adicionalmente* imponemos $\mathscr{F}(\varnothing) = \{0\}$ es el grupo trivial. De manera análoga, se define la noción de prehaz en grupos abelianos, en k-espacios vectoriales, en k-álgebras, etc.

Morfismo de prehaces

Sean $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ dos prehaces en X con valores en la misma categoría $\mathscr{C}$[2]. Un **morfismo de prehaces** $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ consiste en:

1. Para todo abierto $U \subseteq X$, un morfismo $\varphi_U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ en $\mathscr{C}$.
2. Para cada inclusión de abiertos $U \hookrightarrow V$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(V) \arrow[r, "\varphi_V"] \arrow[d, "r_{V,U}"'] & \mathscr{G}(V) \arrow[d, "r_{V,U}"'] \\ \mathscr{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] & \mathscr{G}(U) \end{tikzcd}$$

es conmutativo, i.e., $\varphi_V(s)|_U = \varphi_U(s|_U)$ para toda $s \in \mathscr{F}(V)$.

[2] e.g. $\mathscr{C} = \mathbf{Conj}$ o $\mathscr{C} = \mathbf{Ab}$, etc.

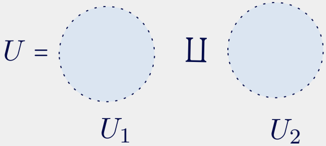
Ejemplo de morfismo de prehaces

Sea G grupo abeliano, y sea G (resp. $\underline{G}$) el prehaz de funciones const. (resp. loc. const.) en X con valores en G. Hay un morfismo de prehaces

$$\varphi : G \longrightarrow \underline{G},$$

donde para $U \subseteq X$ abierto, el morfismo $\varphi_U : G(U) \longrightarrow \underline{G}(U)$ envía $g \in G(U) \overset{\text{def}}{=} G$ en la función (globalmente) constante $f : U \to G$, $x \mapsto f(x) = g$.

Notar que si $U = U_1 \sqcup U_2$ es unión disjunta de dos abiertos $U_1, U_2 \subseteq X$,



y si G es un grupo no-trivial con $g_1 \neq g_2$ elementos de G, entonces

$$f(x) = \begin{cases} g_1 & \text{si } x \in U_1 \\ g_2 & \text{si } x \in U_2 \end{cases}$$

es loc. constante en U, pero **no** es constante en U (i.e., φ_U **no** es isom.)

Operaciones básicas

Sean $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ dos prehaces de grupos abelianos en X, y sea $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morfismo de prehaces. Definimos los prehaces

1. $\ker \varphi$ que envía el abierto $U \subseteq X$ en
$$(\ker \varphi)(U) := \ker \left[\varphi_U : \mathscr{F}(U) \longrightarrow \mathscr{G}(U)\right].$$
2. $\operatorname{Im} \varphi$ que envía el abierto $U \subseteq X$ en
$$(\operatorname{Im} \varphi)(U) := \operatorname{Im} \left[\varphi_U : \mathscr{F}(U) \longrightarrow \mathscr{G}(U)\right].$$

Si $\mathscr{E}$ es un prehaz de grupos abelianos, entonces $\mathscr{E}$ es un **sub-prehaz** de $\mathscr{F}$, y escribimos $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{F}$, si para todo abierto $U \subseteq X$ se tiene $\mathscr{E}(U) \subseteq \mathscr{F}(U)$ es un sub-grupo abeliano y el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathscr{E}(V) \arrow[r, hook] \arrow[d, "r_{V,U}"'] & \mathscr{F}(V) \arrow[d, "r_{V,U}"] \\ \mathscr{E}(U) \arrow[r, hook] & \mathscr{F}(U) \end{tikzcd}$$

es conmutativo para todo par de abiertos $U \subseteq V$ de X.

En particular, $\ker\varphi \subseteq \mathscr{F}$ e $\operatorname{Im}\varphi \subseteq \mathscr{G}$ son sub-prehaces.

Para todo sub-prehaz $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{F}$ definimos el **prehaz cociente** mediante

$$(\mathscr{F}/\mathscr{E})(U) := \mathscr{F}(U)/\mathscr{E}(U)$$

para todo abierto $U \subseteq X$.

Definimos el **prehaz cokernel** mediante

$$(\operatorname{coker}\varphi)(U) := \mathscr{G}(U)/(\operatorname{Im}\varphi)(U)$$

para todo abierto $U \subseteq X$.

Henri Cartan & Jean-Pierre Serre notan la importancia de la noción de Haz[3] en Geometría Algebraica (1952–1953)

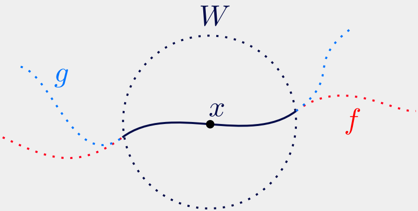
[3] o Gavilla, Sheaf (inglés), Faisceau (francés), Feixe (portugués), Fascio (italiano).

Motivación

Sea $X = \mathbb{R}^n$ y $\mathscr{C}^\infty$ el prehaz de funciones diferenciables en X. Dado $x \in X$, los **gérmenes** de funciones diferenciables en x son clases de equiv. de pares

$$\{(f, U), \text{ donde } x \in U \text{ abierto y } f \in \mathscr{C}^\infty(U)\},$$

con $(f, U) \sim (g, V)$ si existe un abierto $x \in W \subseteq U \cap V$ tal que $f|_W = g|_W$.



El conjunto de gérmenes de funciones diferenciables en $x \in X$ se llama el **tallo** de $\mathscr{C}^\infty$ en x, y se denota $\mathscr{C}^\infty_x$. Queda como Ejercicio probar que $\mathscr{C}^\infty_x$ es un anillo local con ideal maximal dado por $\mathfrak{m}_x = \{f \in \mathscr{C}^\infty_x,\ f(x) = 0\}$.

Sea $\mathscr{F}$ un prehaz en X. El **tallo**[4] de $\mathscr{F}$ en un punto $x \in X$ está dado por

$$\mathscr{F}_x := \varinjlim_{U \ni x} \mathscr{F}(U) \overset{\text{def}}{=} \left(\coprod_{\substack{U \subseteq X \text{ abierto} \\ \text{tal que } x \in U}} \mathscr{F}(U) \right) / \sim,$$

donde

> *Para $s \in \mathscr{F}(U)$ y $t \in \mathscr{F}(V)$ se tiene que $(s, U) \sim (t, V)$ en $\mathscr{F}_x$ si existe un abierto $x \in W \subseteq U \cap V$ tal que $s|_W = t|_W$ en $\mathscr{F}(W)$.*

Si U es una vecindad abierta del punto $x \in X$ y $s \in \mathscr{F}(U)$, denotamos por $s_x = [(s, U)]$ la clase de s en el tallo $\mathscr{F}_x$ y la llamamos el **germen** de la sección s en el punto $x \in X$.

[4] En inglés, *stalk*.

Sea $\mathscr{F}$ un prehaz de grupos abelianos en X. Decimos que $\mathscr{F}$ es un **haz** si se cumplen las siguientes condiciones para todo abierto $U \subseteq X$:

1. **Pegado.** Si $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ es un cubrimiento abierto, y si $s_i \in \mathscr{F}(U_i)$ son secciones tales que $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ para todos $i, j \in I$. Entonces, existe una sección $s \in \mathscr{F}(U)$ tal que $s|_{U_i} = s_i$ para todo $i \in I$.
2. **Unicidad.** Si $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ es un cubrimiento abierto, y si $s \in \mathscr{F}(U)$ es una sección sobre U tal que $s|_{U_i} = 0$ en $\mathscr{F}(U_i)$ para todo $i \in I$. Entonces, $s = 0$ en $\mathscr{F}(U)$.

Por definición, un **morfismo de haces** $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ es símplemente un morfismo entre los prehaces subyacentes.

Definición intuitiva

Un haz es un prehaz donde exigimos que secciones locales s_i en abiertos U_i que cubren un abierto U, y que coinciden en las intersecciones $U_i \cap U_j$, puedan pegarse de manera única en una sección s sobre el abierto U.

Ejemplos

1. El prehaz $\mathscr{C}^\infty$ de funciones diferenciables es un haz.
2. Sean X e Y espacios topológicos. El prehaz $\mathscr{C}(X;Y)$ en X que asocia a cada abierto $U \subseteq X$ el conjunto
$$\mathscr{C}(X;Y)(U) \overset{\text{def}}{=} \{f : U \to Y \text{ función continua}\}$$
es un haz[5].
3. Sea G un grupo abeliano. El prehaz constante G **no** siempre es un haz. E.g., si $U = U_1 \amalg U_2$ es unión disjunta de dos abiertos no-vacíos, $|G| \geq 2$, y si $g_i \in G(U_i) \overset{\text{def}}{=} G$ son elementos diferentes con $i = 1, 2$. Entonces, **no** existe $g \in G(U) \overset{\text{def}}{=} G$ tal que $g|_{U_1} = g_1$ y $g|_{U_2} = g_2$.
4. Sea G un grupo abeliano. El prehaz $\underline{G}$ de funciones localmente constantes en X con valores en G, es un haz.
5. Ejercicio: Sea G un grupo abeliano y $x_0 \in X$ un punto. Probar que el prehaz rascacielo $\iota_{x_0}(G)$ es un haz.

[5] Esto es consecuencia del "*pasting lemma*" en topología.

Kernel es un haz

Sea $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morfismo de haces de grupos abelianos. Entonces, el prehaz $\ker \varphi$ es siempre un haz:

Sea $U \subseteq X$ un abierto y $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ un cubrimiento abierto. Consideremos secciones $s_i \in \mathscr{F}(U_i)$ tales que $s_i \in (\ker \varphi)(U_i)$ para todo $i \in I$, i.e., $\varphi_{U_i}(s_i) = 0$ en $\mathscr{G}(U_i)$. Si tenemos que

$$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} \text{ en } \mathscr{F}(U_i \cap U_j) \text{ para todos } i, j \in I,$$

entonces el hecho que $\mathscr{F}$ es un *haz* implica que existe una única sección $s \in \mathscr{F}(U)$ tal que $s|_{U_i} = s_i$ para todo $i \in I$. Más aún, tenemos que

$$\varphi_U(s)|_{U_i} = \varphi_{U_i}(s|_{U_i}) = \varphi_{U_i}(s_i) = 0 \text{ en } \mathscr{G}(U_i) \text{ para todo } i \in I.$$

Dado que $\mathscr{G}$ es un *haz*, tenemos que $\varphi_U(s) = 0$ y luego $s \in (\ker \varphi)(U)$. $\square$

Ejercicio 1.3.20 del Apunte: Probar que $\operatorname{Im} \varphi$ no necesariamente es un haz.

Nos gustaría poder definir un haz imagen.
¿Cómo construir un haz a partir de un prehaz?

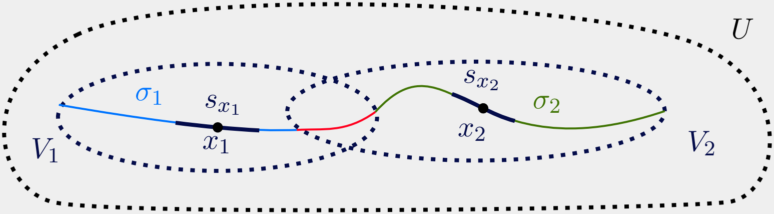
Sea $\mathscr{F}$ un prehaz de grupos abelianos en X. Definimos el prehaz $\mathscr{F}^+$ en X como el prehaz que asocia a cada abierto $U \subseteq X$ al grupo $\mathscr{F}^+(U)$ de "*gérmenes compatibles*" de $\mathscr{F}$ sobre U. Más formalmente,

$$\mathscr{F}^+(U) := \left\{ (s_x)_{x \in U} \in \prod_{x \in U} \mathscr{F}_x \text{ tal que } (\star) \right\},$$

donde la condición de compatibilidad $(\star)$ está dada por

> $(\star)$ *Para todo $x \in U$, existe una vecindad abierta $V \subseteq U$ de x y una sección $\sigma \in \mathscr{F}(V)$ tal que los gérmenes $\sigma_y = s_y$ coinciden en $\mathscr{F}_y$ para todo $y \in V$.*

En términos geométricos, tenemos que:

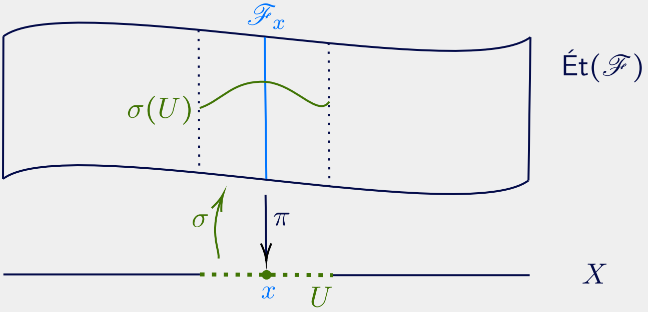


Más aún, para todo prehaz $\mathscr{F}$ hay un morfismo natural $j : \mathscr{F} \to \mathscr{F}^+$ que para todo abierto $U \subseteq X$ y toda sección $s \in \mathscr{F}(U)$ asocia $j_U(s) := (s_x)_{x \in U}$, el conjunto de gérmenes $s_x \in \mathscr{F}_x$ para todo $x \in U$.

Definimos el *espacio étalé* de $\mathscr{F}$ como el conjunto

$$\text{Ét}(\mathscr{F}) := \coprod_{x \in X} \mathscr{F}_x,$$

que viene dotado de una proyección natural $\pi : \text{Ét}(\mathscr{F}) \to X$.



Una sección $s \in \mathscr{F}(U)$ define una función

$$\sigma : U \longrightarrow \text{Ét}(\mathscr{F}),\ x \longmapsto s_x \in \mathscr{F}_x$$

Proposición: $\mathscr{F}^+$ es un haz en X

Los subconjuntos de $\text{Ét}(\mathscr{F})$ de la forma $\sigma(U)$ verifican los axiomas de una base de una topología, y permiten ver a $\text{Ét}(\mathscr{F})$ como un espacio topológico.

Finalmente, notamos que el conjunto $\mathscr{F}^+(U)$ coincide exactamente con el conjunto de funciones $\sigma : U \to \text{Ét}(\mathscr{F})$ que son *continuas* respecto a la topología que acabamos de definir. En particular, $\mathscr{F}^+$ es un haz en X. $\square$

LEMA: $j_U : \mathscr{F}(U) \xrightarrow{\simeq} \mathscr{F}^+(U)$, $s \mapsto (s_x)_{x\in U}$ SI $\mathscr{F}$ HAZ

Supongamos que $\mathscr{F}$ es un haz, y sea $U \subseteq X$ abierto.

- INYECTIVIDAD: Sea $s \in \mathscr{F}(U)$ con $j_U(s) \overset{\text{def}}{=} (s_x)_{x\in U} = 0$ en $\mathscr{F}^+(U)$. Por definición de $\mathscr{F}_x$, $\exists U = \cup_{i\in I} U_i$ cubrimiento abierto con $s|_{U_i} = 0$ para todo $i \in I$. Luego, $s = 0$ pues $\mathscr{F}$ haz. $\square$
- SOBREYECTIVIDAD: Sean $(s_x)_{x\in U} \in \mathscr{F}^+(U)$ gérmenes compatibles. Por definición, $\exists U = \cup_{i\in I} U_i$ cubrimiento abierto y $\sigma_i \in \mathscr{F}(U_i)$ con $(\sigma_i)_x = s_x$ para todo $x \in U_i$. Luego, $(\sigma_i)_x = (\sigma_j)_x$ para $x \in U_i \cap U_j$. Como j_U inyectiva, $\sigma_i|_{U_i\cap U_j} = \sigma_j|_{U_i\cap U_j}$ $\forall i, j \in I$ y luego $\exists!\, \sigma \in \mathscr{F}(U)$ con $\sigma|_{U_i} = \sigma_i$ para todo $i \in I$ (pues $\mathscr{F}$ haz). Así, $\sigma_x = s_x$ $\forall x \in U$. $\square$

Teorema: Haz asociado a un prehaz

Sea $\mathscr{F}$ un prehaz de grupos abelianos en X. Entonces, el haz $\mathscr{F}^+$ junto con el morfismo canónico de prehaces $j : \mathscr{F} \to \mathscr{F}^+$ cumplen la propiedad universal siguiente:

Para todo haz de grupos abelianos $\mathscr{G}$ en X y todo morfismo de prehaces $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$, $\exists!$ morfismo de haces $\varphi^+ : \mathscr{F}^+ \to \mathscr{G}$ tal que

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "j"'] & \mathscr{G} \\ \mathscr{F}^+ \arrow[ur, "\exists!\, \varphi^+"'] & \end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo.

Así, el par $(\mathscr{F}^+, j)$ es único módulo un único isomorfismo. Diremos que $\mathscr{F}^+$ es el **haz asociado** a $\mathscr{F}$ (o **hacificación** de $\mathscr{F}$).

Teorema: Haz asociado a un prehaz

- Functorialidad de j: un morfismo de prehaces $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ induce un morfismo de haces $\varphi^+ : \mathscr{F}^+ \to \mathscr{G}^+$ y el diagrama sgte el conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "j"'] & \mathscr{G} \arrow[d, "j"] \\ \mathscr{F}^+ \arrow[r, "\varphi^+"] & \mathscr{G}^+ \end{tikzcd}$$

- $\mathscr{G}$ haz implica $j : \mathscr{G} \xrightarrow{\sim} \mathscr{G}^+$ isomorfismo y luego obtenemos

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "j"'] & \mathscr{G} \\ \mathscr{F}^+ \arrow[ur, "\varphi^+"'] & \end{tikzcd} \tag{†}$$

- Unicidad de φ^+: Sea $\sigma = (s_x)_{x \in U} \in \mathscr{F}^+(U)$, y sean $U = \cup_{i \in I} U_i$ y $\sigma_i \in \mathscr{F}(U_i)$ tal que $(\sigma_i)_x = s_x \ \forall x \in U_i$. Así, $\varphi^+_U(\sigma)|_{U_i} = \varphi_{U_i}(\sigma_i)$ (†). Por último, $\mathscr{G}$ haz implica que $\varphi_{U_i}(\sigma_i)$ determinan completamente $\varphi^+(\sigma)$ (pues determinan $\varphi^+_U(\sigma)|_{U_i}$). $\square$