Geometría Algebraica

Clase 1

Pedro Montero

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

31 de Julio de 2023

§1.1 Categorías y functores

Una **categoría** $\mathscr{C}$ consiste en:

1. Una colección de **objetos**, denotada $\operatorname{Obj}(\mathscr{C})$.
2. Para todo par de objetos A, B en $\mathscr{C}$, un conjunto $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ cuyos elementos $f \in \operatorname{Hom}(A, B)$ son llamados **morfismos**, y que cumplen:
   (a) Podemos componerlos, i.e., existe una función

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}(A,B) \times \operatorname{Hom}(B,C) &\longrightarrow \operatorname{Hom}(A,C) \\ (f,g) &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

   (b) La composición es asociativa, i.e., $(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$.
   (c) Para todo objeto A, existe un (único) morfismo $\operatorname{Id}_A \in \operatorname{Hom}(A, A)$ tal que $\operatorname{Id}_A \circ f = f$ y $g \circ \operatorname{Id}_A = g$ para todos f, g.

Abuso de Notación

Los $\operatorname{Hom}(A, B)$ son conjuntos *arbitrarios*, pero es común denotar $\varphi : A \to B$ cuando $\varphi \in \operatorname{Hom}(A, B)$. Además, se utiliza como (abuso de) notación "$A \in \mathscr{C}$" o "$A \in \operatorname{Obj}(\mathscr{C})$" cuando A es un objeto de $\mathscr{C}$.

Isomorfismos

Un **isomorfismo** entre A, B en $\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ es un morfismo $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ tal que $\exists!\ g \in \mathrm{Hom}(B, A)$ que cumple

$$f \circ g = \mathrm{Id}_B \quad \text{y} \quad g \circ f = \mathrm{Id}_A \,.$$

Diremos que A y B son **isomorfos**, y escribiremos $A \cong B$.

Un **automorfismo** de A es un isomorfismo $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, A)$.

Ejemplos de Categorías

Las categorías más comunes que usaremos son:

1. **Conj**, la categoría de conjuntos.
2. **Anillos**, la categoría de anillos.
3. **An**, la categoría de anillos conmutativos con unidad.
4. **Grp**, la categoría de grupos.
5. **Ab**, la categoría de grupos abelianos.
6. $\mathbf{Vec}_k$, la categoría de k-espacios vectoriales.
7. A-**Mod**, la categoría de A-módulos.
8. **Top**, la categoría de espacios topológicos.
9. $\mathbf{Man}^\infty$, la categoría de variedades diferenciables (de clase $\mathscr{C}^\infty$).

Cada una con sus morfismos evidentes (Ejercicio: describirlos).

Categoría de A-módulos

La categoría A-$\mathbf{Mod}$ cumple que cada $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ es un grupo abeliano. Más adelante, diremos que A-$\mathbf{Mod}$ es una *categoría abeliana*. Notar que si $A = k$ entonces k-$\mathbf{Mod} = \mathbf{Vec}_k$, y si $A = \mathbb{Z}$ entonces $\mathbb{Z}$-$\mathbf{Mod} = \mathbf{Ab}$.

Categoría asociada a un espacio topológico

Sea X un espacio topológico. Definimos la categoría $\mathbf{Top}(X)$ como la categoría cuyos objetos son los abiertos de X, y cuyos morfismos son:

$$\mathrm{Hom}(U,V) = \begin{cases} \{\iota : U \hookrightarrow V\} & \text{si } U \subseteq V \\ \varnothing & \text{si } U \nsubseteq V \end{cases}$$

(Ejercicio: describir la composición de morfismos).

Functores covariantes y contravariantes

Un **functor covariante** $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ entre dos categorías cumple que:

1. Asigna a cada $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ un objeto $F(A) \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})$.
2. Asigna a cada morfismo $f : A \to B$ en $\mathscr{C}$ un morfismo $F(f) : F(A) \to F(B)$ en $\mathscr{D}$, i.e., existe una función

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A), F(B))$$

   $\forall A, B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, compatibles con la composición y la identidad:
   - (a) Para todo $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, se cumple $F(\mathrm{Id}_A) = \mathrm{Id}_{F(A)}$.
   - (b) Para cada $f : A \to B$ en $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ y cada $g : B \to C$ en $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, C)$ se tiene que $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

En particular, si $A \cong B$ en $\mathscr{C}$, entonces $F(A) \cong F(B)$ en $\mathscr{D}$.

Functor contravariante

El functor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es **contravariante** si se modifica (2) por

Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ entonces $F(f) : F(B) \to F(A)$ es el morfismo asociado en $\mathscr{D}$. Además, $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ en este caso.

1. **Functor identidad**: Sea $\mathscr{C}$ una categoría. El **functor identidad** $\mathrm{Id}_{\mathscr{C}} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ está definido mediante $\mathrm{Id}_{\mathscr{C}}(A) = A$ (resp. $\mathrm{Id}_{\mathscr{C}}(f) = f$) para todo objeto A (resp. todo morfismo f) en $\mathscr{C}$.
2. **Functores de olvido**: Permiten "olvidar" estructura extra. E.g., $\mathbf{An} \to \mathbf{Conj}$ asocia al anillo $(A, +, \cdot)$ el conjunto A subyacente, y asocia al morfismo de anillos $f : A \to B$ la función f.
3. **Extensión de escalares**: Sea $A \in \mathbf{An}$ anillo abeliano y B una A-álgebra. Entonces

$$F : A\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow B\text{-}\mathbf{Mod},\ M \longmapsto M \otimes_A B$$

es un functor covariante.

Pullback y Pushforward

Sea A un anillo abeliano y P un A-módulo.

4. $F : A\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$, $M \mapsto \mathrm{Hom}_A(M, P)$ es contravariante y se denota $\mathrm{Hom}_A(\,\cdot\,, P)$, el morfismo $F(f) \overset{\text{def}}{=} f^*$ es el **pullback** de f.

   Si M, N son A-módulos y $f : M \to N$ morfismo en $A\text{-}\mathbf{Mod}$

   $$f^* : \mathrm{Hom}_A(N, P) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, P),\ \varphi \mapsto f^*(\varphi) \overset{\text{def}}{=} \varphi \circ f.$$

   es el pullback de f.

5. $F : A\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$, $M \mapsto \mathrm{Hom}_A(P, M)$ es covariante y se denota $\mathrm{Hom}_A(P, \,\cdot\,)$, el morfismo $F(f) \overset{\text{def}}{=} f_*$ es el **pushforward** de f.

   Si M, N son A-módulos y $f : M \to N$ morfismo en $A\text{-}\mathbf{Mod}$

   $$f_* : \mathrm{Hom}_A(P, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P, N),\ \varphi \mapsto f_*(\varphi) \overset{\text{def}}{=} f \circ \varphi.$$

   es el pushforward de f.

§1.2 Transformaciones naturales y functores adjuntos

¿Cuándo dos categorías $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ son "isomorfas"?

Transformación natural entre functores

Sean $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y $G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ dos functores covariantes.

Una **transformación natural** $\varphi : F \to G$ es una colección de aplicaciones $\{\varphi_A : F(A) \to G(A)\}_{A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})}$ compatibles con los morfismos entre ellos:

Para todo $f : A \to B$ morfismo en $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\varphi_A"'] & F(B) \arrow[d, "\varphi_B"] \\ G(A) \arrow[r, "G(f)"] & G(B) \end{tikzcd}$$

es conmutativo (i.e. $\varphi_B \circ F(f) = G(f) \circ \varphi_A$).

En particular, si cada $\varphi_A : F(A) \xrightarrow{\sim} G(A)$ es un isomorfismo en $\mathscr{D}$ entonces decimos que $\varphi : F \xrightarrow{\sim} G$ es un **isomorfismo natural** entre F y G.

Equivalencia de categorías

Si $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ y $G : \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ son functores covariantes, definimos

$$G \circ F : \mathscr{A} \to \mathscr{C}$$

por $(G \circ F)(A) := G(F(A))$ para $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$, y para $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A_1, A_2)$

$$(G \circ F)(f) := G(F(f)) : G(F(A_1)) \to G(F(A_2)).$$

Categorías equivalentes

Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ dos categorías. Decimos que $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ son **equivalentes** si existen functores covariantes $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ tales que $F \circ G$ es naturalmente isomorfo a $\mathrm{Id}_{\mathscr{D}}$ y $G \circ F$ es naturalmente isomorfo a $\mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$, i.e.,

$$\text{existen } G \circ F \xrightarrow{\sim} \mathrm{Id}_{\mathscr{C}} \text{ y } F \circ G \xrightarrow{\sim} \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}$$

isomorfismos naturales.

En este caso, decimos que F y G definen una **equivalencia de categorías**.

Ejemplo de Álgebra Lineal

Sea k un cuerpo y considere las categorías

1. $\mathscr{V}_k$ cuyos objetos son los k-espacios vectoriales $\{k^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, y con $\mathrm{Hom}(k^n, k^m) := M_{m\times n}(k)$ matrices (respecto a las bases canónicas).
2. $\mathbf{Vec}_k^{\mathrm{fin}}$ cuyos objetos son k-espacios vectoriales de dimensión finita, y con $\mathrm{Hom}(V, W) := \{f : V \to W \text{ lineal}\}$.

Sea $F : \mathscr{V}_k \to \mathbf{Vec}_k^{\mathrm{fin}}$ que asocia $F(k^n) = k^n$ y para toda matriz $A \in M_{m\times n}$ asociamos $F(A) = f_A$, con $f_A : k^n \to k^m$, $v \mapsto Av$. El functor "elegir base"

$$G : \mathbf{Vec}_k^{\mathrm{fin}} \to \mathscr{V}_k$$

que envía[1] V en $(V, \mathscr{B}_V) \cong k^{\dim_k(V)}$ y $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ en $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_V,\mathscr{B}_W}(f)$, cumple que

$$F \circ G \xrightarrow{\sim} \mathrm{Id}_{\mathbf{Vec}_k^{\mathrm{fin}}} \quad \text{y} \quad G \circ F \xrightarrow{\sim} \mathrm{Id}_{\mathscr{V}_k}.$$

[1] Para $V = k^n$ escogemos la base canónica $\mathscr{B}_{k^n} = (e_1, \ldots, e_n)$.

Más adelante, veremos que para un cuerpo k:

Hay una equivalencia entre las categorías de "**variedades algebraicas afines sobre** k" y de "k-**álgebras** (abelianas) **finitamente generadas y reducidas** (i.e. sin nilpotentes no-nulos)".

Esto permitirá generalizar al contexto algebraico la equivalencia entre las dos formas posibles de definir una variedad diferenciable (cf. Clase 0).

Adjunción en Análisis Funcional

Sea $u : H \to H$ es un operador lineal acotado en un espacio de Hilbert H, entonces el Teorema de representación de Riesz (1907) implica que existe un único $u^* : H \to H$ lineal acotado tal que

$$\langle u(f), g \rangle = \langle f, u^*(g) \rangle$$

para todos $f, g \in H$. Además, decimos que u^* es el **adjunto** de u.

Esta noción se generaliza naturalmente al contexto de categorías:

Sean $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ functores covariantes. Decimos que (F, G) es un par de **functores adjuntos** si $\forall A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C}), B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})$ hay una *biyección natural*

$$\tau_{AB} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A), B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, G(B)),$$

i.e., si $f : A_2 \to A_1$ y $g : B_1 \to B_2$ son morfismos en $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$, resp., entonces:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A_1), B_1) \arrow[r, "\sim", "\tau_{A_1B_1}"'] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A_1, G(B_1)) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A_2), B_2) \arrow[r, "\sim", "\tau_{A_2B_2}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A_2, G(B_2))
\end{tikzcd}$$

es conmutativo[2]. En este caso, decimos que F es el **adjunto izquierdo** de G, y que G es el **adjunto derecho** de F, y escribimos $F \dashv G$.

[2]La flecha vertical izquierda se obtiene mediante $F(f) : F(A_2) \to F(A_1)$ al considerar un morfismo $h : F(A_1) \to B_1$ y asociarle $g \circ h \circ F(f) : F(A_2) \to B_2$.

Adjunción entre $(\,\cdot\,)\otimes_A N$ y $\mathrm{Hom}_A(N,\,\cdot\,)$

Sea A un anillo y M,N,P tres A-módulos. Recordemos que

$$\mathrm{Bil}_A(M\times N,P)\overset{\text{def}}{=}\{B:M\times N\to P \text{ aplicación } A\text{-bilineal}\}.$$

Por un lado, la *propiedad universal* del producto tensorial $\otimes_A$ nos dice que

$$\mathrm{Bil}_A(M\times N,P)\cong\mathrm{Hom}_A(M\otimes_A N,P) \text{ en } A\text{-}\mathbf{Mod}.$$

Por otro lado, fijando la primera variable de $B:M\times N\to P$ obtenemos una aplicación A-lineal $\widehat{B}:M\to\mathrm{Hom}_A(N,P)$, $m\mapsto B(m,\,\cdot\,)$ y por ende

$$\mathrm{Bil}_A(M\times N,P)\cong\mathrm{Hom}_A(M,\mathrm{Hom}_A(N,P)) \text{ en } A\text{-}\mathbf{Mod}.$$

Luego, para todos M,N,P obtenemos un isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_A(\underbrace{M\otimes_A N}_{:=F(M)},P)\cong\mathrm{Hom}_A(M,\underbrace{\mathrm{Hom}_A(N,P)}_{:=G(P)}) \tag{$\star$}$$

ADJUNCIÓN ENTRE $(\,\cdot\,) \otimes_A N$ Y $\mathrm{Hom}_A(N, \cdot\,)$

$$\mathrm{Hom}_A(\underbrace{M \otimes_A N}_{:=F(M)}, P) \cong \mathrm{Hom}_A(M, \underbrace{\mathrm{Hom}_A(N, P)}_{:=G(P)}) \qquad (\star)$$

Con un poco de paciencia, se verifica que $(\star)$ es *functorial*, y así

$$\begin{aligned} F : A\text{-}\mathbf{Mod} &\longrightarrow A\text{-}\mathbf{Mod} \\ M &\longmapsto M \otimes_A N \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} G : A\text{-}\mathbf{Mod} &\longrightarrow A\text{-}\mathbf{Mod} \\ P &\longmapsto \mathrm{Hom}_A(N, P) \end{aligned}$$

son adjuntos para todo N *fijo*, i.e., $(\,\cdot\,) \otimes_A N$ y $\mathrm{Hom}_A(N, \cdot\,)$ son adjuntos.

Caso particular importante

Cuando $A = k$ es un cuerpo y U, V, W son k-espacios vectoriales de dimensión finita. Entonces[a], $\mathrm{Hom}_k(V, W) \cong V^* \otimes_k W$. Luego,

$$\mathrm{Hom}_k(U \otimes_k V, W) \cong \mathrm{Hom}_k(U, V^* \otimes_k W).$$

En geometría, la notación $(\,\cdot\,)^*$ se utiliza para denotar al **pullback**, por lo que el espacio dual de un k-e.v. será denotado $V^\vee$ (en lugar de V^*).

En particular, el isomorfismo anterior se reescribe como:

$$\mathrm{Hom}_k(U \otimes_k V, W) \cong \mathrm{Hom}_k(U, V^\vee \otimes_k W).$$

[a] Explícitamente, $V^* \otimes_k W \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(V, W)$ envía el tensor simple $\varphi \otimes w$ en la aplicación lineal $v \mapsto \varphi(v)w$. Dicha aplicación anterior es inyectiva, y está definida entre dos e.v. de dimensión finita de la misma dimensión, y luego es un isomorfismo.