Presentación del curso MAT426

Clase 0

Pedro Montero

Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

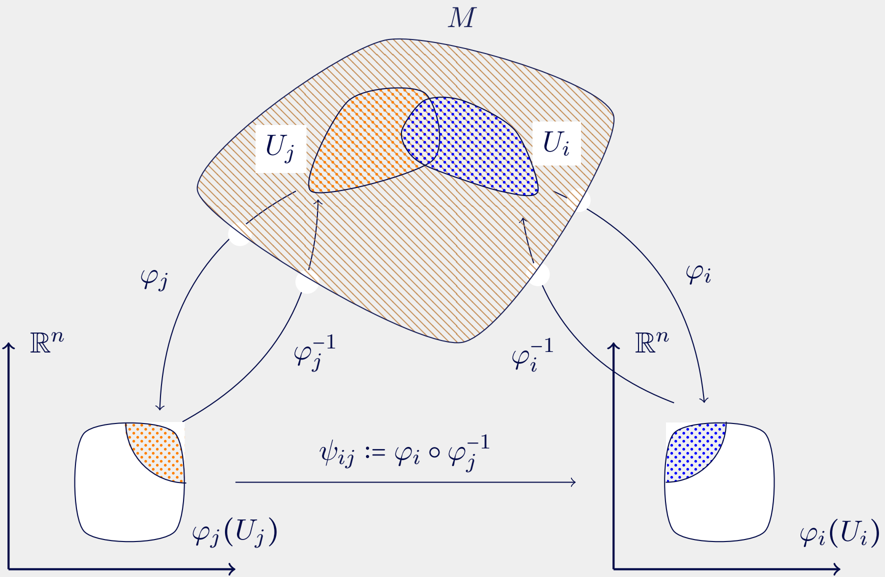
28 de Julio de 2023

Motivación histórica

Una **variedad diferenciable** M está dada por

- *Cartas locales*: homeomorfismos $\varphi_i : U_i \xrightarrow{\sim} V_i := \varphi_i(U_i) \subseteq \mathbb{R}^n$,
- *Cambios de carta*: $\psi_{ij} := \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ en las intersecciones $U_i \cap U_j$, y cada ψ_{ij} de clase $\mathscr{C}^\infty$ en $\varphi_j(U_i \cap U_j) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Así, M luce localmente como $\mathbb{R}^n$.


M
U_j
U_i
φ_j
φ_i
φ_j^{-1}
φ_i^{-1}
$\mathbb{R}^n$
$\mathbb{R}^n$
$\psi_{ij} := \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$
$\varphi_j(U_j)$
$\varphi_i(U_i)$

$f : M \to \mathbb{R}$ es una **función diferenciable** si

> *Para toda carta local* $U_i \subseteq M$*,* $f_i := f|_{U_i} : U_i \to \mathbb{R}$ *cumple que* $F_i := f_i \circ \varphi_i^{-1} : V_i \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto F_i(\mathbf{x})$ *es* $\mathscr{C}^\infty$*.*

Ejemplo: Si $p \in U_i$ y escribimos

$$\varphi_i(p) = (x_1(p), \ldots, x_n(p)) \in \mathbb{R}^n,$$

cada $x_j : U_i \longrightarrow \mathbb{R}$, $p \mapsto x_j(p)$ es una función diferenciable.

Leitmotiv

Si conocemos **todas** las posibles funciones diferenciables en una variedad M, entonces podemos conocer dicha variedad al determinar las funciones coordenada en cada carta.

Observación clave (A. Grothendieck)

Hay 2 formas equivalentes de definir qué es una variedad diferenciable M:

1. A partir de un **atlas** (i.e., cartas locales y cambios de cartas).
2. A partir de un **"haz"** de funciones diferenciables:

M es un espacio topológico con un *haz* $\mathscr{F} := \mathscr{C}^\infty_M$ de **funciones regulares**

$$U \subseteq M \text{ abierto} \mapsto \mathscr{F}(U) = \mathscr{C}^\infty_M(U) := \{f : U \longrightarrow \mathbb{R}\},$$

tal que $\forall p \in M$ existen abiertos $p \in U_p \subseteq M$ y $V_p \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que

$$\mathscr{C}^\infty_M(U_p) \cong \mathscr{C}^\infty(V_p) \overset{\text{def}}{=} \{F : V_p \longrightarrow \mathbb{R} \text{ función diferenciable}\}$$

son isomorfas como $\mathbb{R}$-álgebras.

Observación clave (A. Grothendieck)

El segundo punto de vista (menos tradicional) señala que M está determinada por todas sus funciones regulares.

Ventaja matemática

Este punto de vista permite cambiar $\mathbb{R}$ por **otros cuerpos** (¡o incluso anillos!). Así, podemos generalizar la geometría diferencial a muchos otros contextos: son los primeros pasos de la **geometría algebraica**.

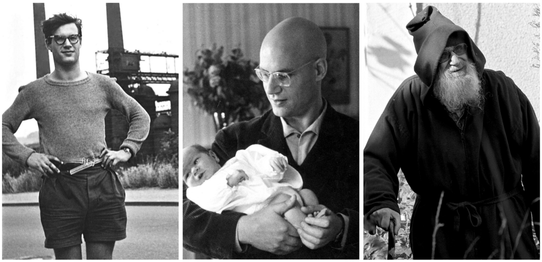


Figure: Alexander Grothendieck (1928 – 2014). Medalla Fields 1966.

Temario del Curso

Temario de MAT426

Nuestro paseo por la **Geometría Algebraica**, desde sus comienzos hasta herramientas avanzadas que se usan actualmente en problemas de investigación, será el siguiente:

1. Categorías, Haces y Espacios Anillados.
2. Variedades afines y proyectivas. Variedades algebraicas y Separación.
3. Componentes irreducibles, Dimensión y Morfismos finitos.
4. Puntos lisos, Teorema de Bertini y Teorema principal de Zariski.
5. Fibrados vectoriales y $\mathscr{O}_X$-módulos localmente libres.

Temario de MAT426 (continuación)

6. Haces coherentes, Cohomología de Čech, Algebra Homológica y Functores derivados.
7. Teoremas de anulación y finitud de cohomología, Dualidad de Serre-Grothendieck.
8. Teorema de Riemann-Roch para curvas algebraicas.