

CERTAMEN MAT426

PEDRO MONTERO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

En cada problema, debe **escoger solamente un ejercicio** para resolver, excepto en el Bonus (ver última página). Durante todo el Certamen denotamos por k un cuerpo algebraicamente cerrado, de característica arbitraria a menos que se especifique lo contrario. Todas las variedades algebraicas están definidas sobre k y, tal como se mencionó en curso, las supondremos reducidas y separadas, pero no necesariamente irreducibles ni suaves.

1. **Categorías (10 pts).** Dar una definición rigurosa, usando la notación del curso, de una de las siguientes nociones y dar un ejemplo.

- (a) Categorías aditivas y categorías abelianas.
- (b) Producto fibrado en una categoría.
- (c) Límite inductivo y proyectivo en una categoría.
- (d) 2-categoría.

2. **Prehaces y haces (10 pts).**

(a) Sea X un espacio topológico y sea G un grupo abeliano. Dado un punto $x_0 \in X$, definimos el **prehaz rascacielos** $i_{x_0}(G)$ por

$$(i_{x_0}(G))(U) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } x_0 \notin U \\ G & \text{si } x_0 \in U \end{cases}$$

para todo abierto $U \subseteq X$. Probar que $i_{x_0}(G)$ es un haz.

- (b) Sea \mathcal{F} un prehaz de grupos abelianos en un espacio topológico X , y sea \mathcal{F}^+ su haz asociado. Probar que para todo $x \in X$ se tiene un isomorfismo de grupos abelianos $\mathcal{F}_x \cong \mathcal{F}_x^+$.
- (c) Sea \mathcal{F} un haz de grupos abelianos en un espacio topológico X , y sea $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ una sección global. Probar que el **soporte** de s , definido como

$$\text{Supp}(s) := \{x \in X \mid s_x \neq 0 \text{ en } \mathcal{F}_x\}$$

es un subconjunto cerrado de X .

(d) Sea $U \subseteq X$ un abierto de un espacio topológico X , y sea $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ una sucesión exacta de haces de grupos abelianos en X . Probar que la sucesión de grupos abelianos

$$0 \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{G}) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{H})$$

es exacta, y mostrar un ejemplo tal que $\Gamma(U, \mathcal{G}) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{H})$ **no** sea sobreyectivo.

Indicación: Para el ejemplo, considerar la sucesión exponencial de Kodaira-Spencer.

3. **Espacios anillados y \mathcal{O}_X -módulos (10 pts).**

- (a) Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua entre espacios topológicos y sea \mathcal{F} (resp. \mathcal{G}) un haz en X (resp. en Y). Probar que el prehaz imagen directa $f_*\mathcal{F}$ es un **haz** en Y , y dar un ejemplo que muestre que el prehaz imagen inversa $(f^{-1}\mathcal{G})_{\text{pre}}$ **no** es necesariamente un haz en X .
- (b) Sea (X, \mathcal{O}_X) un espacio anillado, y sea \mathcal{L} un haz invertible (i.e., localmente libre de rango 1). Probar que $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^\vee \cong \mathcal{O}_X$.
- (c) Sea (X, \mathcal{O}_X) un espacio anillado, $U \subseteq X$ un abierto no-vacío y $i : U \hookrightarrow X$ la inclusión. Dado \mathcal{F} un \mathcal{O}_U -módulo, definimos el prehaz **extensión por cero** $i_1^{\text{pre}}\mathcal{F}$ en X mediante

$$(i_1^{\text{pre}}\mathcal{F})(V) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } V \not\subseteq U \\ \mathcal{F}(V) & \text{si } V \subseteq U \end{cases}$$

Probar que el haz asociado $i_1\mathcal{F} := (i_1^{\text{pre}}\mathcal{F})^+$ es un \mathcal{O}_X -módulo y que para todo $x \in X$ se tiene que $(i_1\mathcal{F})_x = \mathcal{F}_x$ si $x \in U$ y $(i_1\mathcal{F})_x = \{0\}$ si $x \notin U$.

4. **Variedades algebraicas afines y morfismos regulares (10 pts).**

(a) Sean $F, G \in k[X, Y]$ dos polinomios sin factores irreducibles comunes. Probar que $V(F) \cap V(G) \subseteq \mathbb{A}^2$ es un conjunto finito.

Indicación: Usar la identidad de Bézout¹ en el dominio de ideales principales $k(X)[Y]$ para probar que existen polinomios $A(X, Y), B(X, Y)$ y $D(X)$, con D no-nulo, tales que $D = AF + BG$.

¹Ver [aquí](#) el enunciado de la identidad de Bézout para dominios de ideales principales.

- (b) Calcular el ideal de $S = \{(0, 0), (0, 1)\}$ en \mathbb{A}^2 .
- (c) Probar que la sub-variedad afín de \mathbb{A}^3 definida por las ecuaciones $X^2 = YZ$ y $XZ = X$ tiene 3 componentes irreducibles.

5. Variedades algebraicas proyectivas (10 pts).

- (a) Sea X una variedad algebraica proyectiva y supongamos que $f : X \hookrightarrow Y$ es una incrustación cerrada, donde Y es una variedad algebraica afín. Probar que $f(X)$ es un conjunto finito de puntos.
- (b) Supongamos que $\text{car}(k) \neq 2$ y sea $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(V)$ la proyectivización de $V \cong k^3$. Sea $C \subseteq \mathbb{P}^2$ una **cónica**, i.e., una hipersuperficie de \mathbb{P}^2 dada por un polinomio homogéneo $f \in k[X, Y, Z]$ de grado 2. Probar que, en una base conveniente de V , podemos suponer que

$$C = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2 \mid ax^2 + by^2 + cz^2 = 0\},$$

para ciertos $a, b, c \in k$. Deducir que si $abc \neq 0$ entonces $C \cong \mathbb{P}^1$.

- (c) Consideremos la incrustación de Veronese $\nu_3 : \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^3$, $[x, y] \mapsto [x^3, x^2y, xy^2, y^3]$, y sea $C = \nu_3(\mathbb{P}^1)$ la cúbica torcida de \mathbb{P}^3 . Sea

$$I = \langle T_0T_3 - T_1T_2, T_1^2 - T_0T_2, T_2^2 - T_1T_3 \rangle$$

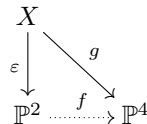
ideal homogéneo de $k[T_0, T_1, T_2, T_3]$. Probar que $C = V(I) \subseteq \mathbb{P}^3$.

6. Atlas algebraicos, producto de variedades y separación (10 pts).

- (a) Describir un atlas algebraico en \mathbb{P}^2 y deducir que es una variedad separada.
- (b) Sean $n, m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Probar que el producto $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ **no** es isomorfo a \mathbb{P}^{n+m} .
- (c) Sea X una variedad algebraica separada. Probar que todo abierto $U \subseteq X$ y todo cerrado $Y \subseteq X$ es una variedad algebraica separada.

7. Componentes irreducibles y aplicaciones racionales (10 pts).

- (a) Sea $f : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$, $[x_0, x_1, x_2, x_3] \mapsto [x_0x_3, x_1x_3, x_2x_3, x_0^2 - x_1x_2]$ aplicación racional. Determinar el dominio de definición $\text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{P}^3$, probar que $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^3)$ y determinar $f^{-1} : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$.
- (b) Probar que la curva $C = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 \mid y^2 = x^3 - 1\}$ **no** es birracional a \mathbb{A}^1 (i.e., no es racional).
Indicación: Suponer por contradicción que existe una aplicación birracional $\mathbb{A}^1 \dashrightarrow C$, $t \mapsto (x(t), y(t))$, donde $x(t) = p(t)/q(t)$, $y(t) = r(t)/s(t)$, y donde $p, q, r, s \in k[t]$ cumplen $(p, q) = (r, s) = 1$.
- (c) Sea $f : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^4$, $[x, y, z] \mapsto [x^2, y^2, xy, xz, yz]$ aplicación racional definida en $U = \text{Dom}(f) = \mathbb{P}^2 \setminus \{p\}$, donde $p = [0, 0, 1]$. Sea $X = \text{Bl}_p(\mathbb{P}^2) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{P}^2$ el blow-up de \mathbb{P}^2 en p . Probar que existe un morfismo regular² $g : X \rightarrow \mathbb{P}^4$ tal que el diagrama



es conmutativo, i.e., $g = f \circ \varepsilon$.

8. Dimensión y morfismos finitos (10 pts).

- (a) Sea $f : X \rightarrow Y$ un morfismo entre variedades algebraicas. Probar que si $\dim(X) < \dim(Y)$ entonces f **no** es dominante.
- (b) Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ y sea $f : X \rightarrow \mathbb{A}^1$, $(x, y) \mapsto x$ morfismo regular. Probar que f es un morfismo finito.
- (c) Probar que la composición de morfismos finitos es un morfismo finito.
- (d) Sea $X = V(I) \subseteq \mathbb{P}^n$ variedad algebraica proyectiva definida por el ideal homogéneo $I \subseteq k[X_0, \dots, X_n]$, y sea $C(X) := V(I) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ el **cono afín** asociado a X . Probar que $\dim(C(X)) = \dim(X) + 1$.

9. Espacio tangente de Zariski (10 pts).

- (a) Sea X una variedad algebraica suave. Probar que X es irreducible si y sólo si X es conexa.
- (b) Supongamos que $\text{car}(k) \neq 2$. Sea $Q : k^{n+1} \rightarrow k$ una forma cuadrática no-nula, y sea $X = \{x \in \mathbb{P}^n \mid Q(x) = 0\}$ la hipersuperficie cuádrica asociada. Probar que X es suave si y sólo si Q es no-degenerada.

²De hecho, se puede probar que $g : \text{Bl}_p(\mathbb{P}^2) \hookrightarrow \mathbb{P}^4$ es un incrustamiento cerrado.

- (c) Supongamos que $\text{car}(k) = 0$. Sea $C_{a,b} = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2 \mid y^2z = x^3 + axz^2 + bz^3\} \subseteq \mathbb{P}^2$ cúbica plana, donde $a, b \in k$ constantes. Determinar un polinomio $\Delta(X, Y) \in k[X, Y]$ tal que $C_{a,b} \subseteq \mathbb{P}^2$ es suave si y sólo si $\Delta(a, b) \neq 0$.
- (d) Sea G un grupo algebraico y sea X un **espacio homogéneo** respecto a G (i.e., X es una variedad algebraica dotada de una acción regular y transitiva $G \times X \rightarrow X$, $(g, x) \mapsto gx$). Probar que X es una variedad suave.

10. Morfismos suaves, Teoremas de Bertini y Zariski (10 pts).

- (a) Sea X una variedad algebraica proyectiva normal e irreducible, y sea $C \subseteq X$ una curva algebraica irreducible. Probar que existe una curva algebraica **suave** \tilde{C} y un morfismo $f: \tilde{C} \rightarrow X$ tal que $f(\tilde{C}) = C$.
- (b) Sea $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una hipersuperficie irreducible de dimensión ≥ 2 , definida por un polinomio homogéneo de grado $d \geq 1$, y sea $H \subseteq \mathbb{P}^n$ un hiperplano general. Probar que $X \cap H$ es irreducible.
Indicación: Dada la incrustación de Veronese $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n \xrightarrow{\nu_d} \mathbb{P}^N$, probar que cada hiperplano $H \subseteq \mathbb{P}^n$ define un hiperplano $H' \subseteq \mathbb{P}^N$ tal que $X \cap H \cong \nu_d(X) \cap H'$. Aplicar el teorema de Bertini a $\nu_d(X)$.
- (c) Dar un ejemplo de un morfismo $f: \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ que sea étale pero cuyas fibras **no** sean irreducibles.

Bonus (30 puntos): El objetivo de este problema es estudiar más profundamente hipersuperficies del espacio proyectivo. Supongamos que $\text{car}(k) = 0$ y sea $d \in \mathbb{N}^{\geq 2}$.

Sea $V = k[X_0, \dots, X_n]_d$ el k -espacio vectorial de polinomios homogéneos de grado d en las variables X_0, \dots, X_n , y consideremos la proyectivización $\mathbb{P}^N \cong \mathbb{P}(V)$, donde $N = \binom{n+d}{d} - 1$. Dado que $V(f) = V(\lambda f) \subseteq \mathbb{P}^n$ para todos $f \in V \setminus \{0\}$ y $\lambda \in k^\times$, tenemos que los puntos de \mathbb{P}^N parametrizan hipersuperficies de grado d en \mathbb{P}^n . Por abuso de notación, denotaremos por $[X] \in \mathbb{P}^N$ al punto $[f]$ de $\mathbb{P}(V)$ que corresponde a la hipersuperficie $X = V(f) \subseteq \mathbb{P}^n$.

- (i) Consideremos la sub-variedad de incidencia, cerrada³ en $\mathbb{P}^N \times \mathbb{G}(r, n)$, dada por

$$I = \{([X], [\Lambda]) \in \mathbb{P}^N \times \mathbb{G}(r, n) \mid \Lambda \subseteq X\}.$$

Probar que I es irreducible y determinar su dimensión.

Indicación: Probar que la fibra $\text{pr}_2^{-1}([\Lambda]) \subseteq \mathbb{P}^N$ es un subespacio lineal y determinar su dimensión. Notar que, módulo cambio de coordenadas, se puede suponer que $\Lambda = \{x_0 = \dots = x_{n-r-1} = 0\} \subseteq \mathbb{P}^n$.

- (ii) Deducir que si $\delta := (r+1)(n-r) - \binom{d+r}{r} < 0$, entonces una hipersuperficie general de grado d en \mathbb{P}^n no contiene subespacios lineales $\Lambda \cong \mathbb{P}^r$ de dimensión r . En particular, una superficie general de grado ≥ 4 en \mathbb{P}^3 no contiene rectas.

Indicación: Considerar la fibra $F_r(X) := \text{pr}_1^{-1}([X]) = \{[\Lambda] \in \mathbb{G}(r, n) \mid \Lambda \subseteq X\} \subseteq \mathbb{G}(r, n)$.

- (iii) Consideremos la sub-variedad de incidencia, cerrada⁴ en $\mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^n$, dada por

$$J = \{([X], x) \in \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^n \mid x \in X_{\text{sing}}\},$$

y donde $\pi := \text{pr}_1: J \rightarrow \mathbb{P}^N$ y $\sigma := \text{pr}_2: J \rightarrow \mathbb{P}^n$ son las dos proyecciones. Probar que $\sigma^{-1}(x) \cong \mathbb{P}^{N-n-1}$ para todo $x \in \mathbb{P}^n$, y deducir que J es irreducible de dimensión $\dim(J) = N - 1$.

Indicación: Utilizar el criterio Jacobiano para deducir que $\sigma^{-1}(x)$ está dada por $n+1$ ecuaciones lineales independientes en \mathbb{P}^N . Notar que, módulo cambio de coordenadas, se puede suponer $x = [1, 0, \dots, 0]$.

- (iv) Con la notación del punto (iii), sea $Z := \pi(J) \subseteq \mathbb{P}^N$. Probar que si $\dim(Z) < N - 1$ entonces toda hipersuperficie singular de grado d en \mathbb{P}^n tiene infinitos puntos singulares.
- (v) Sea $Y = V(g) \subseteq \mathbb{P}^{n-1}$ hipersuperficie suave en \mathbb{P}^{n-1} dada por el polinomio homogéneo $g \in k[X_1, \dots, X_n]$, y consideremos el **cono proyectivo** $\mathcal{C}(Y) := V(g) \subseteq \mathbb{P}^n$, obtenido al considerar $g \in k[X_0, \dots, X_n]$. Probar que $\mathcal{C}(Y)$ es una hipersuperficie de grado d en \mathbb{P}^n con un único punto singular en $p = [1, 0, \dots, 0]$, y deducir que necesariamente $\dim(Z) = N - 1$.
- (vi) Deducir que el conjunto de hipersuperficies singulares de grado d de \mathbb{P}^n está parametrizado por una hipersuperficie irreducible $\Delta \subseteq \mathbb{P}^{N-1}$.

³Puede usarse directamente, sin demostración, el hecho que I es cerrada.

⁴Puede usarse directamente, sin demostración, el hecho que J es cerrada.