

# RIEMANN-ROCH PARA SUPERFICIES

ENZO GIANNOTTA

RESUMEN. Presentaremos una introducción al número de intersección de dos curvas en una superficie y probaremos el Teorema de Riemann-Roch para superficies.

## ÍNDICE

1. Notación	1
2. Riemann-Roch para curvas	2
3. Número de intersección	2
4. Riemann-Roch para superficies	5
Referencias	7

Agradecimientos. Agradezco al profesor Pedro por sugerir este tema para la ayudantía, por compartir su tiempo para conversar sobre este tema, y por hacer disponible el material bibliográfico necesario para prepararlo.

## 1. NOTACIÓN

Todas las superficies, que notaremos  $S, S'$ , serán superficies suaves proyectivas irreducibles sobre un cuerpo algebraicamente cerrado  $k$ . Notaremos por  $D, D'$  a dos divisores de  $S$ ;  $D \sim D'$  significa que  $D$  y  $D'$  son linealmente equivalentes, es decir,  $D - D'$  es un divisor principal.  $\mathcal{O}_S(D)$  denota al haz invertible correspondiente al divisor  $D$ , y  $H^i(S, \mathcal{O}_S(D)) =: H^i(\mathcal{O}_S(D)) =: H^i(D)$  a su  $i$ -ésimo grupo de cohomología respecto del haz  $\mathcal{O}_S(D)$ .

Recordemos que si  $X$  es una variedad algebraica proyectiva de dimensión  $n$ , y  $\mathcal{F}$  es un haz coherente en  $X$  (por ejemplo, en estas notas estaremos trabajando exactamente dentro de este contexto). Definimos la **característica de Euler-Poincaré** de  $\mathcal{F}$  como la cantidad finita (gracias a los teoremas de finitud y anulación de Grothendieck; ver [Mon23, §5]):

$$\chi(\mathcal{F}) := \chi(X, \mathcal{F}) := \sum_{i \geq 0} (-1)^i h^i(X, \mathcal{F}) = \sum_{i=0}^n (-1)^i h^i(X, \mathcal{F}),$$

donde  $h^i(X, \mathcal{F}) := h^i(\mathcal{F}) := \dim_k(H^i(X, \mathcal{F}))$ . Por ejemplo, cuando  $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X(D)$  es el haz asociado a un divisor  $D$  de  $X$ , notaremos  $h^i(X, \mathcal{F}) =: h^i(D)$ ; es costumbre notar  $\ell(D)$  a la dimensión del **espacio de Riemann-Roch** de  $D$ , es decir, del espacio  $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ . Recordar que en este contexto (ver [Mon23, Lema 5.2.5]) la característica de Euler-Poincaré es **aditiva**, es decir, dada una sucesión exacta de haces coherentes en  $X$  (variedad proyectiva)

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

entonces

$$\chi(\mathcal{G}) = \chi(\mathcal{F}) + \chi(\mathcal{H}).$$

Si  $X$  es una variedad algebraica, se define el **grupo de Picard** de  $X$ , como el grupo abeliano

$$\text{Pic}(X) := \{\text{fibrados en recta en } X\} / \cong,$$

con la estructura de grupo dada por el producto tensorial de fibrados  $L \otimes L'$  y con inversa de un elemento  $L$  dada por su fibrado dual  $L^\vee$ .

Cuando  $X$  es una variedad algebraica suave e irreducible, se define el **fibrado en rectas canónico**  $\omega_X$  de  $X$  como

$$\omega_X := \det(\Omega_X^1),$$

donde  $\Omega_X^1$  es el *fibrado cotangente* de  $X$ . Un **divisor canónico**  $K_X$  es cualquier divisor tal que

$$\omega_X \cong \mathcal{O}_X(K_X) \quad \text{en } \text{Pic}(X).$$

Similarmente, su fibrado dual  $\omega_X^\vee \cong \mathcal{O}_X(-K_X)$  es llamado el **fibrado en rectas anticanónico**, y  $-K_X$  un **divisor anti-canónico**.

Cuando  $X$  sea una variedad algebraica irreducible suave, tenemos un “diccionario” entre fibrados en rectas, divisores de Weil, y divisores de Cartier; el cual utilizaremos libremente (cf. [Mon23, §3]):

$$\begin{array}{ccc} \text{Pic}(X) & \xleftarrow{L \mapsto \mathcal{L}, \text{ con } \mathcal{L}(U) := H^0(U, L|_U)} & \{\text{haces invertibles}\} / \cong \\ \uparrow & & \\ [D] \mapsto \mathcal{O}_X(D) & & \\ \downarrow & & \\ \text{Div}(X)/\text{PDIV}(X) & \xleftarrow{D = [(f_i, U_i)] \mapsto \hat{D} = \sum_Y \nu_Y(f_i) Y} & \text{WDiv}(X)/\text{PWDIV}(X) \end{array}$$

## 2. RIEMANN-ROCH PARA CURVAS

En [Mon23, §5] vimos el Teorema de Riemann-Roch para curvas  $X = C$  (Teorema 5.2.8):

Sea  $X = C$  una curva algebraica proyectiva irreducible, de género  $g(C) := h^0(C, \omega_C) = h^1(C, \mathcal{O}_C)$ . Entonces para todo  $L \cong \mathcal{O}_C(D) \in \text{Pic}(C)$ , se tiene que

$$\chi(C, \mathcal{O}_C(D)) = \chi(C, \mathcal{O}_C) + \deg(D).$$

Equivalentemente,

$$h^0(C, \mathcal{O}_C(D)) - h^0(C, \mathcal{O}_C(K_C - D)) = \deg(D) + 1 - g(C).$$

Informalmente, el Teorema de Riemann-Roch dice que para el caso de una variedad proyectiva irreducible  $X$  que sea una curva, podemos escribir la característica de Euler-Poincaré de un divisor  $D$  en función de invariantes geométricos de  $X$  y una cantidad que se define geométricamente en función de  $D$  (en el caso  $X = C$  su grado). El propósito de estas notas es probar un enunciado similar para  $X = S$  una superficie proyectiva suave irreducible.

## 3. NÚMERO DE INTERSECCIÓN

**Definición 3.1.** Sean  $C$  y  $C'$  dos curvas irreducibles distintas en una superficie  $S$ , y  $x \in C \cap C'$ , notemos por  $\mathcal{O}_x$  al anillo local de  $S$  en  $x$ . En  $\mathcal{O}_x$ , notemos por  $f$  una ecuación que define  $C$ , y similarmente  $g$  a otra que define  $C'$ . Luego definimos la **multiplicidad de intersección** de  $C$  y  $C'$  en  $x$  como la cantidad

$$m_x(C \cap C') := \dim_k \mathcal{O}_x / (f, g).$$

**Observación 3.2.** A priori podría suceder que la dimensión de  $\mathcal{O}_x/(f, g)$  como  $k$ -espacio vectorial sea infinita, sin embargo, como  $C$  y  $C'$  son curvas distintas, resulta que  $\dim_k \mathcal{O}_x/(f, g)$  es finita, ya que podemos aplicar el siguiente resultado (cf. [Ati18, Corolario 11.8])

Sea  $k$  un cuerpo algebraicamente cerrado y  $B$  un dominio íntegro el cual es una  $k$ -álgebra finitamente generada. Entonces para todo ideal primo  $\mathfrak{p}$  de  $B$ ,

$$\text{height}(\mathfrak{p}) + \dim_{\text{Krull}}(B/\mathfrak{p}) = \dim_{\text{Krull}}(B).$$

*Ejemplo 3.3.* Cuando  $m_x(C \cap C') = 1$ , geoméricamente lo que está pasando es que  $C$  y  $C'$  son **transversales** en  $x$ , i.e.,  $f$  y  $g$  forman un sistema local de coordenadas en un entorno abierto de  $x$  (por ejemplo, si las tangentes de  $C$  y  $C'$  en  $x$  son distintas). En efecto, notar que  $m_x(C \cap C') = 1$  si y solo si  $f$  y  $g$  generan el ideal maximal  $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_x$ . Claramente si  $(f, g) = \mathfrak{m}_x$  se tiene que  $\mathcal{O}_x/(f, g) = \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x$  es un cuerpo pues estamos cocientando por un ideal maximal. Recíprocamente, si  $\mathcal{O}_x/(f, g)$  tiene dimensión 1, es un cuerpo, y por lo tanto  $(f, g)$  es un ideal maximal de  $\mathcal{O}_x$ ; como  $(f, g) \subset \mathfrak{m}_x$  se sigue que de hecho vale la igualdad.

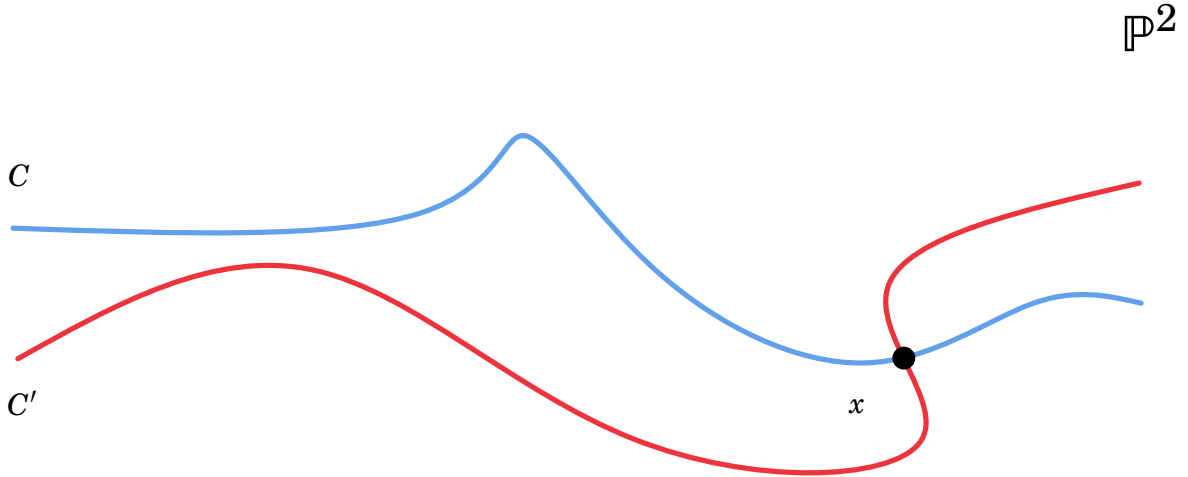


FIGURA 1. Ejemplo de dos curvas  $C$  y  $C'$  tales que se cortan transversalmente en  $x \in C \cap C'$ , i.e.,  $m_x(C \cap C') = 1$ .

**Definición 3.4.** Sean  $C$  y  $C'$  dos curvas irreducibles distintas en  $S$ , definimos el **número de intersección**:

$$\langle C, C' \rangle := \sum_{x \in C \cap C'} m_x(C \cap C').$$

**Observación 3.5.** Nuevamente, podría suceder que la cantidad de la derecha sea infinita, pero ya vimos que cada término es finito, y más aún, notemos que la sumatoria tiene una cantidad finita de términos pues, al ser  $C$  y  $C'$  curvas irreducibles distintas, no se pueden intersectar en más de finitos puntos:  $C \cap C'$  es un cerrado de  $C$  que no tiene muchas posibilidades, puede tener dimensión 1 o 0, y el primer caso no sucede pues  $C \neq C'$ .

Recordemos que  $C$  y  $C'$  se pueden pensar como haces invertibles  $\mathcal{O}_S(-C)$  y  $\mathcal{O}_S(-C')$  respectivamente, luego definimos el haz

$$\mathcal{O}_{C \cap C'} := \mathcal{O}_S / (\mathcal{O}_S(-C) \oplus \mathcal{O}_S(-C')).$$

Resulta que este haz es un *haz rascacielos*, concentrado en el conjunto finito  $C \cap C'$ ; en cada uno de estos puntos  $x$ , tenemos que  $(\mathcal{O}_{C \cap C'})_x = \mathcal{O}_x/(f, g)$ . Por lo tanto

$$\langle C, C' \rangle = h^0(S, \mathcal{O}_{C \cap C'}) = \chi(S, \mathcal{O}_{C \cap C'}).$$

**Teorema 3.6.** *Para  $L$  y  $L'$  dos fibrados en rectas de  $\text{Pic}(S)$ , definimos*

$$\langle L, L' \rangle := \chi(\mathcal{O}_S) - \chi(L^\vee) - \chi(L'^\vee) + \chi(L^\vee \otimes L'^\vee).$$

*Entonces se tiene que  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \text{Pic}(S) \times \text{Pic}(S) \rightarrow \mathbb{R}$  es una forma simétrica bilineal en el grupo abeliano  $\text{Pic}(S)$ , de tal suerte que si  $C$  y  $C'$  son dos curvas irreducibles distintas en  $S$ , se tiene que*

$$\langle \mathcal{O}_S(C), \mathcal{O}_S(C') \rangle = \langle C, C' \rangle.$$

En otras palabras, el invariante geométrico número de intersección se puede traducir a un invariante cohomológico pensando a las curvas como haces invertibles.

La demostración detallada del teorema se encuentra en [Bea96]. Daré solamente un bosquejo:

*Sketch de la demostración.*

**Lema 3.7.** (a) *Sean  $s \in H^0(S, \mathcal{O}_S(C))$  y  $s' \in H^0(S, \mathcal{O}_S(C'))$  secciones no nulas que se anulan en  $C$  y  $C'$  respectivamente. Entonces la sucesión*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(-C - C') \xrightarrow{(s', -s)} \mathcal{O}_S(-C) \oplus \mathcal{O}_S(-C') \xrightarrow{(s, s')} \mathcal{O}_S \longrightarrow \mathcal{O}_{C \cap C'} \longrightarrow 0$$

*es exacta.*

(b) *Sea  $C$  una curva suave irreducible en  $S$ . Para todo  $L \in \text{Pic}(S)$ , se tiene que*

$$\langle \mathcal{O}_S(C), L \rangle = \deg(L|_C)$$

(c) *Sea  $D$  un divisor en  $S$ , y  $H$  una sección por un hiperplano de  $S$ , entonces existe  $n \geq 0$  tal que  $D + nH$  es una sección por un hiperplano. En particular, podemos escribir  $D \sim A - B$ , donde  $A$  y  $B$  son curvas suaves de  $S$  con  $A \sim D + nH$  y  $B \sim nH$ .*

(El ítem (c) fue visto en clase).

Ahora, el ítem (a) y la aditividad de la característica de Euler-Poincaré nos da  $\langle \mathcal{O}_S(C), \mathcal{O}_S(C') \rangle = \langle C, C' \rangle$ , pues desarrollando la definición del lado izquierdo, se puede ver que es igual a  $\chi(\mathcal{O}_{C \cap C'}) = h^0(C \cap C') = \langle C, C' \rangle$ . Luego para probar el teorema basta probar la bilinearidad (que la forma es simétrica es obvio). Si  $L$  y  $L'$  son dos haces invertibles. Por el ítem (c), podemos escribir  $L' = \mathcal{O}_S(A - B)$ , donde  $A$  y  $B$  son dos curvas suaves en  $S$ . Consideremos la expresión

$$s(L_1, L_2, L_3) := \langle L_1, L_2 \otimes L_3 \rangle - \langle L_1, L_2 \rangle - \langle L_1, L_3 \rangle;$$

claramente la expresión es simétrica en las tres variables, y el ítem (b) implica que si  $L_1 = \mathcal{O}_S(C)$  para una curva irreducible suave  $C$  de  $S$ , entonces  $s(L_1, L_2, L_3) = 0$ ; simétricamente, si  $L_2$  o  $L_3$  es  $\mathcal{O}_S(C)$  también se anula la expresión. Tomando  $L_1 = L$ ,  $L_2 = L'$  y  $L_3 = \mathcal{O}_S(B)$ , despejamos,

$$\langle L, L' \rangle = \langle L, \mathcal{O}_S(A) \rangle - \langle L, \mathcal{O}_S(B) \rangle.$$

Así, el ítem (b) prueba que  $\langle L, L' \rangle$  es lineal en  $L$  (ambos términos lo son). La simetría implica que es lineal en la segunda coordenada también. ◻

En otras palabras, que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sea bilineal en  $\text{Pic}(S)$ , implica que:

- (I)  $\langle L \otimes L', L'' \rangle = \langle L, L'' \rangle + \langle L', L'' \rangle$ .
- (II)  $\langle L^\vee, L' \rangle = -\langle L, L' \rangle$  y  $\langle \mathcal{O}_S, L \rangle = 0$ .

(En la primera coordenada. Similarmente, en la segunda valen estas identidades).

*Observación 3.8.* Dados dos divisores en  $S$ , digamos  $D$  y  $D'$ , la gracia del teorema es que podemos calcular el producto  $\langle \mathcal{O}_S(D), \mathcal{O}_S(D') \rangle$  reemplazando  $D$  y  $D'$  por divisores linealmente equivalentes (pues su representante en  $\text{Pic}(S)$  no cambia!).

Esto tiene dos implicancias:

**Proposición 3.9.** (1) Sea  $C$  una curva suave,  $f : S \rightarrow C$  un morfismo sobreyectivo,  $F$  una fibra de  $f$ . Entonces  $\langle \mathcal{O}_S(F), \mathcal{O}_S(F) \rangle = 0$ .

(2) Si  $S'$  es una superficie y  $g : S \rightarrow S'$  es un morfismo genéricamente finito de grado  $d$ , entonces

$$\langle \mathcal{O}_S(g^*D), \mathcal{O}_S(g^*D') \rangle = d \langle \mathcal{O}_S(D), \mathcal{O}_S(D') \rangle.$$

*Demostración.* (1) Escribamos  $F = f^*\{x\}$  para algún  $C$ . Existe un divisor  $A$  en  $C$  linealmente equivalente a  $x$  tal que  $x \notin A$ , con lo cual  $F \sim f^*A$ . Como  $f^*A$  es una combinación lineal de fibras de  $f$  distintas de  $F$ , tenemos que

$$\langle \mathcal{O}_S(F), \mathcal{O}_S(F) \rangle = \langle \mathcal{O}_S(F), f^*A \rangle = 0.$$

(2) Por el ítem (c), basta probar la fórmula para el caso en el que  $D$  y  $D'$  son secciones de hiperplanos de  $S$ . Existe un abierto  $U$  de  $S'$  tal que las fibras de  $g$  tienen grado  $d$ . Entonces podemos mover  $D$  y  $D'$  de tal manera que se intersecten transversalmente y la intersección caiga en  $U$ . Consecuentemente,  $g^*D$  y  $g^*D'$  se intersectan transversalmente y además  $g^*D \cap g^*D' = g^{-1}(D \cap D')$ , y se sigue el resultado. ◻

*Ejemplo 3.10* (Teorema de Bezout). Tomemos  $S = \mathbb{P}^2$ . Recordemos que  $\text{Pic}(\mathbb{P}^2) \cong \mathbb{Z}$ : más precisamente, toda curva de grado  $d$  es linealmente equivalente a  $dL$  para una recta  $L$ . Así, sean  $C$  y  $C'$  dos curvas de grado  $d$  y  $d'$ , y sean  $L$  y  $L'$  dos rectas distintas; como  $C \sim dL$  y  $C' \sim d'L'$ , el Teorema 3.6 implica el Teorema de Bezout:

$$\langle C, C' \rangle = \langle \mathcal{O}_S(C), \mathcal{O}_S(C') \rangle = \langle dL, d'L' \rangle = dd' \langle L, L' \rangle = dd'.$$

#### 4. RIEMANN-ROCH PARA SUPERFICIES

Recordemos Teorema de dualidad de Serre (cuya demostración vimos en [Mon23, Teorema 5.1.3]):

**Teorema 4.1** (Dualidad de Serre). Sea  $X$  una variedad algebraica proyectiva suave e irreducible de dimensión  $n$ , y sea  $\omega_X = \det(\Omega_X^1)$ . Entonces, para todo fibrado vectorial  $E \rightarrow X$ ,

$$H^i(X, E) \cong H^{n-i}(X, E^\vee \otimes \omega_X)^\vee.$$

En particular,  $h^i(X, E) = h^i(X, E^\vee \otimes \omega_X)$ .

En nuestro caso  $X = S$ , deducimos que  $\chi(L) = \chi(\omega_S \otimes L^\vee)$  por la definición de número de Euler-Poincaré.

Gracias a esto podemos probar el Teorema de Riemann-Roch para superficies:

**Teorema 4.2** (Riemann-Roch para superficies). Para todo  $L \in \text{Pic}(S)$ , se tiene

$$\chi(L) = \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}(\langle L, L \rangle - \langle L, \omega_S \rangle).$$

*Demostración.* Primero calculemos por definición:

$$\langle L^\vee, L \otimes \omega_S^\vee \rangle := \chi(\mathcal{O}_S) - \chi(L) - \chi(\omega_S \otimes L^\vee) + \chi(\omega_S).$$

Por dualidad de Serre 4.1,  $\chi(\omega_S) = \chi(\mathcal{O}_S)$  y  $\chi(\omega_S \otimes L^\vee) = \chi(L)$ , y por lo tanto

$$\langle L^\vee, L \otimes \omega_S^\vee \rangle = 2(\chi(\mathcal{O}_S) - \chi(L)).$$

Por otro lado, aplicando bilinealidad (3.6) del lado izquierdo:

$$\begin{aligned} \langle L^\vee, L \otimes \omega_S^\vee \rangle &= \langle L^\vee, L \rangle + \langle L^\vee, \omega_S^\vee \rangle \\ &= -\langle L, L \rangle + \langle L, \omega_S \rangle. \end{aligned}$$

Juntando ambas igualdades obtenemos el teorema.  $\square$

*Observación 4.3.* Podemos reescribir el enunacio de Riemann-Roch en término de divisores. Sea  $h^i(D) := h^i(S, \mathcal{O}_S(D))$  y  $K_S$  un divisor canónico, i.e.,  $\mathcal{O}_S(K_S) = \omega_S$ . En este lenguaje la dualidad de Serre 4.1 nos queda  $h^i(D) = h^{n-i}(K_S - D)$  con  $n = \dim(S) = 2$ . Así, Riemann-Roch 4.2 se reescribe como:

$$h^0(D) + h^0(K - D) - h^1(D) = \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}(\langle \mathcal{O}_S(D), \mathcal{O}_S(D) \rangle - \langle \mathcal{O}_S(D), \mathcal{O}_S(K_S) \rangle).$$

Usualmente no tendremos información de  $h^1(D)$ , aún así Riemann-roch nos provee de la siguiente desigualdad útil:

$$h^0(D) + h^0(K_S - D) \geq \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}(\langle \mathcal{O}_S(D), \mathcal{O}_S(D) \rangle - \langle \mathcal{O}_S(D), \mathcal{O}_S(K_S) \rangle).$$

Sea  $g(C) := h^1(C, \mathcal{O}_C)$  el género de una curva  $C$  suave irreducible en  $S$ , entonces podemos deducir la siguiente fórmula a partir de Riemann-Roch:

**Teorema 4.4** (Fórmula del Género). *Sea  $C$  una curva irreducible suave en  $S$ . Entonces*

$$g(C) = 1 + \frac{1}{2}(\langle \mathcal{O}_S(C), \mathcal{O}_S(C) \rangle - \langle \mathcal{O}_S(C), \mathcal{O}_S(K_S) \rangle).$$

*Demostración.* Primero, tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(-C) \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0,$$

la cual utilizando la aditividad de la característica de Euler-Pincaré nos da

$$\chi(\mathcal{O}_C) = \chi(\mathcal{O}_S) - \chi(\mathcal{O}_S(-C)).$$

Como  $\chi(\mathcal{O}_C) := 1 - g(C)$ , nos queda,

$$1 - g(C) = \chi(\mathcal{O}_S) - \chi(\mathcal{O}_S(-C)).$$

Finalmente, obtenemos la fórmula aplicando Riemann-Roch con  $L = \mathcal{O}_S(-C)$ , pues nos dice que

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{O}_S(-C)) &= \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}(\langle \mathcal{O}_S(-C), \mathcal{O}_S(-C) \rangle - \langle \mathcal{O}_S(-C), \mathcal{O}_S(K_S) \rangle) \\ &= \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}(\langle \mathcal{O}_S(C), \mathcal{O}_S(C) \rangle + \langle \mathcal{O}_S(C), \mathcal{O}_S(K_S) \rangle), \end{aligned}$$

con lo cual podemos reemplazar esto arriba y despejar  $g(C)$ .  $\square$

*Ejemplo 4.5.* Cuando  $S = \mathbb{P}^2$ , si  $C$  es una curva irreducible suave de grado  $d$  en  $S$ , como  $\text{Pic}(S) \cong \mathbb{Z}$ , podemos elegir cualquier fibrado en rectas  $L$  y se tiene que  $C \sim dL$ . Recordar que  $\omega_S = -3L'$  para cualquier otra recta  $L'$  distinta de  $L$ . Entonces la Fórmula del Género 4.4 implica que

$$g(C) = 1 + \frac{1}{2}(d^2 \langle L, L \rangle - 3d \langle L, L' \rangle).$$

Ahora,  $\langle L, L' \rangle = 1$  porque  $L$  y  $L'$  son dos rectas distintas en  $\mathbb{P}^2$ ; por otro lado,  $\langle L, L \rangle := \chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) - 2\chi(L^\vee) + \chi(L^\vee \otimes L^\vee)$ , pero cada característica de Euler-Poincaré se puede calcular conociendo los coeficientes de cohomología (ver [Mon23, Teorema 4.2.1]):  $\chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) = 1$ ,  $\chi(L^\vee) = 0$ ,  $\chi(L^\vee \otimes L^\vee) = 0$ , ya que podemos notar que  $L^\vee \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$  y  $L^\vee \otimes L^\vee \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)$ . Consecuentemente,

$$g(C) = 1 + \frac{1}{2}(d^2 - 3d) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

En particular, si  $C$  es una curva elíptica, entonces  $g(C) = 1$  porque  $d = 3$ .

#### REFERENCIAS

- [Ati18] Michael Atiyah, *Introduction to commutative algebra*, CRC Press, 2018.
- [Bea96] Arnaud Beauville, *Complex algebraic surfaces*, no. 34, Cambridge University Press, 1996, Estas notas se basan en el Capítulo 1.
- [Mon23] Pedro Montero, *Notas de curvas algebraicas (mat426)*, [http://pmontero.mat.utfsm.cl/mat426\\_2023\\_2.html](http://pmontero.mat.utfsm.cl/mat426_2023_2.html), 2023.