MAT426 CURVAS ALGEBRAICAS
AYUDANTÍA 9

CRISTÓBAL LOYOLA

1. Problemas

Problema 1. Determinar las posibles $X_{d_1,...,d_r} \subset \mathbb{P}^n$ intersecciones completas de Calabi-Yau de dimensión ≤ 3.

Solución. La dimensión de la variedad $X_{d_1,...,d_r}$ debe ser $d := n - r$ donde r es el número de ecuaciones en $\mathbb{P}^n$ que definen la variedad. Por la fórmula de adjunción para $X_{d_1,...,d_r}$ se debe satisfacer que

$$\omega_X \simeq \mathcal{O}\big(\sum_{i=1}^{r} d_i - n - 1\big),$$

y como buscamos que $X_{d_1,...,d_r}$ sea de Calabi-Yau, necesariamente $\omega_X \simeq \mathcal{O}_X$ es trivial, así

$$d_1 + d_2 + ... + d_r = n + 1 = d + r + 1.$$

Haremos el siguiente supuesto sobre los d_i.

(S1) El primero es que $d_1, ..., d_r \geq 2$. Si $d_i = 1$ para algún i, entonces estamos intersectando un hiperplano, el cual es isomorfo al espacio proyectivo $\mathbb{P}^{n-1}$ y en tal caso podemos descartar dicha coordenada incrustando nuestra variedad en $\mathbb{P}^{n-1}$.

Ahora, podemos suponer sin pérdida de generalidad $d_1 \leq ... \leq d_r$, así

$$2r \leq d_1 r \leq d_1 + ... + d_r = d + r + 1,$$

lo cual implica $1 \leq r \leq d + 1$. A continuación caracterizaremos el caso $r = d + 1$, por lo cual será descartado del análisis posterior.

(S2) En base al supuesto (S1), observamos que por la desigualdad MA-MG tenemos

$$d + r + 1 = d_1 + ... + d_r \geq r(d_1 \cdot ... \cdot d_r)^{1/r} \geq 2r.$$

Como la igualdad en MA-MG sólo se alcanza cuando todos los términos son iguales, en el caso en que $d + 1 = r$ necesariamente $d_1 = ... = d_r = 2$.

Como buscamos que $d \leq 3$ con $1 \leq r < d + 1$, tenemos tres casos para analizar.

1. Si $d = 1$ entonces $1 \leq r < 2$. El único caso es $r = 1$ tenemos $d_1 = 3$ y $n = 2$, lo cual corresponde a una curva elíptica
2. Si $d = 2$ se tiene $1 \leq r < 3$ con $n = r + 2$ y $d_1 + ... + d_r = r + 3$.
   - Si $r = 1$ tenemos $d_1 = 4$ y $n = 3$.
   - Si $r = 2$ tenemos $d_1 + d_2 = 5$ y $n = 4$. En este caso, por simetría el único par es $(d_1, d_2) = (3, 2)$.
3. Por último, si $d = 3$ tenemos $1 \leq r < 4$ con $n = r + 3$ y $d_1 + ... + d_r = r + 4$.
   - Si $r = 1$ entonces $d_1 = 5$ y $n = 4$.
   - Si $r = 2$ entonces $d_1 + d_2 = 6$ y $n = 5$. Por simetría en este caso los pares son $(2, 4)$ y $(3, 3)$.
   - Si $r = 3$ entonces $d_1 + d_2 + d_3 = 7$ y $n = 6$. Aquí los pares son $(2, 2, 3)$ y sus permutaciones.

Esto cubre todos los casos posibles, donde la caracterización de cada variedad se puede ver caso a caso. ■

Date: 17 de noviembre de 2020.

Problema 2. Sea X una variedad de Fano y suponer que existe $Y \in |-K_X|$ divisor anticanónico suave. Probar que Y es una variedad de Calabi-Yau.

Demostración. Si $Y \in |-K_X|$ entonces $Y = V(s)$ donde s es una sección global no nula de $H^0(X, \omega_X^\vee)$. Por otro lado, en este caso tenemos que $\omega_X^\vee \simeq \mathcal{O}_X(Y)$, así por la fórmula de adjunción

$$\omega_Y \simeq (\omega_X \otimes \omega_X^\vee)|_Y \simeq \mathcal{O}_Y,$$

es decir, ω_Y es trivial. Por definición sigue que Y es de Calabi-Yau. □

2. Variedades completas

A continuación introducimos un tipo de variedad algebraica que nos permitirá establecer un análogo entre variedades algebraicas y variedades compactas (como espacio topológico).

Definición 1. Una variedad algebraica X se dice **completa** si para cualquier variedad algebraica Y, la proyección $p_2 : X \times Y \to Y$ es cerrada, es decir, mapea conjuntos cerrados en conjuntos cerrados.

El siguiente resultado deja en evidencia el por qué las variedades completas son un buen análogo a las variedades compactas.

Lema 2.

1. *Si Z es una subvariedad cerrada de X y X es completa, entonces Z es completa.*
2. *Si $f : X \to Y$ es un morfismo con Y separada y X completa, entonces $f(X) \subset Y$ es una subvariedad cerrada y completa.*
3. *Si X, Y son completas, entonces $X \times Y$ es completa.*

Ejemplo 3. En clases demostramos que si X es una variedad proyectiva, entonces para toda variedad algebraica Y, la proyección $p_Y : X \times Y \to Y$ es cerrada. Por lo tanto toda variedad proyectiva es completa, lo cual coincide con nuestra primera intuición, pues el espacio proyectivo visto como espacio topológico es un espacio compacto.

2.1. Algunos resultados importantes.

A continuación enunciaremos algunos resultados que nos permitirán consolidar de mejor manera las ideas intuitivas sobre variedades completas, en relación a los resultados obtenidos sobre variedades proyectivas y la analogía a las variedades compactas.

2.1.1. Morfismos sobre variedades completas. En un análogo a los resultados enunciados en la sección §`11. Variedades algebraicas proyectivas` se tiene el siguiente resultado para variedades completas.

Proposición 4. *Si X es una variedad algebraica completa e irreducible, entonces $\mathcal{O}(X) \simeq k$, es decir, las funciones regulares globales son constantes.*

Ejemplo 5. Supongamos que X es una variedad afín, irreducible y completa. Por el resultado anterior $\mathcal{O}(X) \simeq k$. Por otro lado, como consecuencia del Nullstellensatz los puntos de X están en biyección con los ideales maximales de $\mathcal{O}(X)$, sin embargo, el único ideal maximal de k es el cero, luego necesariamente X debe ser un punto.

2.1.2. Lema de Chow. El siguiente resultado mostrado por Wei-Liang Chow es una suerte de recíproco parcial al **Ejemplo 3**, que nos dice formalmente que las variedades completas no son tan distintas a las variedades proyectivas.

Proposición 6. *(Lema de Chow) Sea X una variedad algebraica completa. Entonces existe una variedad algebraica proyectiva Z y un morfismo birracional sobreyectivo $f : Z \to X$.*

Observación 7. Existen variedades completas no proyectivas. Los ejemplos son altamente no triviales, sin embargo sobre *variedades tóricas* se pueden encontrar ejemplos interesantes desde un punto de vista geométrico.

2.1.3. Variedades completas como espacios compactos. El objetivo de esta subsección es demostrar el siguiente resultado, que nos permite consolidar de algún modo la intuición de que las variedades completas son un análogo a las variedades compactas cuando el cuerpo corresponde a $\mathbb{C}$.

Teorema 8. *Una variedad algebraica definida sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ es completa si y solo si es compacta para la topología euclideana.*

Para esto, requerimos un par de resultados (técnicos) previos. Primero, introducimos una definición en el contexto de espacios topológicos.

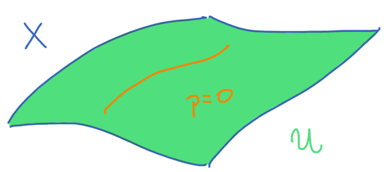
Definición 9. Sea X un espacio topológico. Un conjunto S es localmente cerrado si $S = \mathcal{U} \cap Z$ donde $\mathcal{U}$ es un conjunto abierto y Z es un conjunto cerrado. Diremos que S es constructible si es unión finita de conjuntos localmente cerrados.

Con esta definición, procedemos a enunciar el siguiente Teorema sobre conjuntos constructibles, que se debe a Claude Chevalley[1].

Teorema 10. *(Chevalley) Sea $f : X \to Y$ un morfismo regular entre variedades algebraicas y sea $S \subset X$ un conjunto constructible. Entonces $f(S)$ también es constructible. En particular,* $\mathrm{Im}(f)$ *es constructible.*

Por otro lado, enunciamos un resultado relativo a la densidad de los abiertos de Zariski para la topología fuerte.

Proposición 11. *Sea X una variedad algebraica compleja e irreducible y sea $\mathcal{U}$ un abierto de Zariski no vacío. Entonces $\mathcal{U}$ es denso para la topología fuerte.*



La demostración del resultado anterior es bastante técnica, por lo cual la omitiremos. Sin embargo, de manera intuitiva, dado que un abierto Zariski $\mathcal{U}$ es el complemento de un cerrado Zariski Z definido a través de la ecuación $p = 0$, por lo cual éste de algún modo tiene 'interior vacío' en la topología fuerte. Con esta figura en mente, sigue que el conjunto $\mathcal{U}$ ha de ser un conjunto denso en X con la topología fuerte.

Ejemplo 12. Todo punto en $\mathbb{A}^n(\mathbb{C})$ puede ser aproximado por puntos donde $p \neq 0$.

Demostración de 8. ($\Longrightarrow$) Primero supongamos que X es completa. Entonces por el lema de Chow existe una variedad proyectiva Z y un morfismo $p_2 : Z \to X$ sobreyectivo y birracional. Entonces $Z \subset \mathbb{P}^n$ es una cerrada contenida en un compacto, por lo cual Z es compacto y en consecuencia X también es compacta.

($\Longleftarrow$) Suponer ahora que X es compacta. Entonces para toda variedad algebraica Y, la proyección $p_2 : X \times Y \to Y$ es cerrada para la topología fuerte.

Si $Z \subset X \times Y$ es un cerrado de Zariski, éste es cerrado para la topología fuerte, por lo cual $p_2(Z)$ es también cerrado para la topología fuerte. Sin embargo, por el **Teorema de Chevalley** el conjunto $p_2(Z)$ es constructible, en particular contiene un conjunto abierto $\mathcal{U}$ que es denso en la cerradura de Zariski, es decir,

$$\mathcal{U} \subset p_2(Z) \subset \overline{\mathcal{U}} = \overline{p_2(Z)}.$$

Por otro lado $p_2(Z) \subset \overline{\mathcal{U}}^{str} \subset \overline{p_2(Z)}$, así por la **Proposición 11** sigue que $\overline{\mathcal{U}}^{str} = \overline{p_2(Z)}$. Como $p_2(Z)$ es cerrado entonces $\overline{\mathcal{U}} = p_2(Z)$. ☐

Email address: `cristobal.loyola@sansano.usm.cl`

[1]Claude Chevalley fue un matemático francés, conocido por ser un miembro fundador del grupo Bourbaki.