Problema 1

Sea $X = \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ el círculo, sea $\mathscr{F} = \underline{\mathbb{Z}}$ el haz de funciones localmente constantes a valores en $\mathbb{Z}$ (notar que este haz **no** es quasi-coherente pues no es un $\mathscr{O}_X-$módulo). Calcular $\check{H}^i(\mathbb{S}^1, \mathscr{F})$.

Solución:
Tomemonos el cubrimiento $\mathscr{U}$ usual de $\mathbb{S}^1$, $U = \mathbb{S}^1 \backslash \{(0,1)\}, V = \mathbb{S}^1 \backslash \{(0,-1)\}$, notemos que $U \cap V = \mathbb{S}^1 \backslash \{(0, \pm 1)\}$ tiene dos componentes conexas

$$\begin{aligned}
\Gamma(U, \mathscr{F}) &= \{\text{funciones localmente constantes de } U \text{ en } \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z} \\
\Gamma(V, \mathscr{F}) &= \{\text{funciones localmente constantes de } V \text{ en } \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z} \\
\Gamma(U \cap V, \mathscr{F}) &= \{\text{funciones localmente constantes de } U \cap V \text{ en } \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Recordemos la definición de cocadenas de Čech

$$C^p(\mathscr{U}, \mathscr{F}) = \prod_{i_0 < \cdots < i_p} \mathscr{F}(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p})$$

así en este caso tenemos

$$\begin{aligned}
C^0(\mathscr{U}, \mathscr{F}) &= \mathscr{F}(U) \times \mathscr{F}(V) = \Gamma(U, \mathscr{F}) \times \Gamma(V, \mathscr{F}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\
C^1(\mathscr{U}, \mathscr{F}) &= \mathscr{F}(U \cap V) = \Gamma(U \cap V, \mathscr{F}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Y obtenemos el complejo

$$0 \longrightarrow C^0 \xrightarrow{d_0} C^1 \longrightarrow 0$$

y concluimos que la cohomología es

$$\begin{aligned}
&\check{H}^0(\mathscr{U}, \mathscr{F}) = \ker d_0 = \{(a,b) \in C^0 | b|_{U\cap V} - a|_{U \cap V} = 0\} = \{(a,a) | a \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z} \\
&\check{H}^1(\mathscr{U}, \mathscr{F}) = C^1 / \operatorname{Im}(d_0) = \{(a,b) \in C^1\} / \{b|_{U\cap V} - a|_{U\cap V} | (a,b) \in C^0\} \simeq (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) / \langle (1,1) \rangle \simeq \mathbb{Z} \\
&\check{H}^p(\mathscr{U}, \mathscr{F}) = 0, \text{ para } p > 1
\end{aligned}$$

Problema 2

Probar que $\mathbb{A}^n\backslash\{0\}$ no es afín para $n \geq 2$.

Demostración:
Si $n \geq 2$ entonces tenemos un incrustamiento cerrado de $\mathbb{A}^2\backslash\{0\}$ en $\mathbb{A}^n\backslash\{0\}$, por lo que bastaría con analizar el caso $n = 2$ (cerrado dentro de una variedad afín es afín por definición). Como $X = \mathbb{A}^2\backslash\{0\}$ es variedad algebraica, el haz $\mathscr{O}_X$ es un haz coherente (directo de la definición) y tenemos el cubrimiento abierto, afín, finito $\mathscr{U} = \{U_1 = \mathbb{A}^2\backslash\{y = 0\}, U_2 = \mathbb{A}^2\backslash\{x = 0\}\}$

entonces el *Teorema Fundamental del Cálculo de Cohomología de Haces Coherentes* nos da:

$$\check{H}^p_{\mathscr{U}} \simeq H^p(X, \mathscr{F}),\ \forall p \geq 0$$

y $H^1(X, \mathscr{O}_X)$ no es nada sino el cokernel del mapa

$$\begin{aligned} d_0 : \mathscr{O}_X(U_1) \times \mathscr{O}_X(U_2) &\to \mathscr{O}_X(U_1 \cap U_2) \\ (P_1, P_2) &\mapsto P_1|_{U_1 \cap U_2} - P_2|_{U_1 \cap U_2} \end{aligned}$$

y tenemos

$$\begin{aligned} \mathscr{O}_X(U_1) = \mathscr{O}_X(\{y \neq 0\}) &= k[X_1, X_2, X_2^{-2}] \\ \mathscr{O}_X(U_2) &= k[X_1, X_2, X_1^{-1}] \\ \mathscr{O}_X(U_1 \cap U_2) &= k[X_1, X_2, X_1^{-1}, X_2^{-2}] \end{aligned}$$

puesto que $X_1^{-1}X_2^{-2} \notin \operatorname{Im}(d_0)$ tenemos que $H^1(X, \mathscr{O}_X) \neq 0$, así que X no es afín.

Problema 3

Calcular $\operatorname{Pic}(\mathbb{P}^1)$.

Solución:
Sabemos que $\mathbb{P}^1$ está cubierto por abiertos afines U_1, U_2. Tenemos $H^q(U_i, \mathscr{O}_X^*) = 0$ para $q \geq 2$ por el Teorema de anulación de Grothendieck pues U_i tiene dimensión 1 y para $q = 1$ pues $\operatorname{Pic}(U_i) = \operatorname{Pic}(\mathbb{A}^1) = 0$. Similarmente $H^q(U_1 \cap U_2, \mathscr{O}_X^*) = 0$ para $q \geq 1$. Así, se cumplen las hipótesis para el Teorema de Leray, que nos permite calcular la cohomología usando la cohomología de Čech.
Notemos que

$$\begin{aligned} \Gamma(U_i, \mathscr{O}_X^*) &= k[X_i]^* \simeq k^*, \text{ pues } k \text{ es algebraicamente cerrado} \\ \Gamma(U_1 \cap U_2, \mathscr{O}_X^*) &= k[X, X^{-1}]^* \simeq k^* \times \langle X^{-1} \rangle \simeq k^* \times \mathbb{Z} \end{aligned}$$

por tanto el cokernel de la aplicación

$$\begin{aligned} d_0 : \Gamma(U_1, \mathscr{O}_{\mathscr{X}}^*) \times \Gamma(U_2, \mathscr{O}_X^*) &\to \Gamma(U_1 \cap U_2, \mathscr{O}_X^*) \\ (s_1, s_2) &\mapsto s_1/s_2 \end{aligned}$$

es isomorfo a $\mathbb{Z}$ y por tanto, $\operatorname{Pic}(\mathbb{P}^1) \simeq H^1(X, \mathscr{O}_X^*) \simeq \mathbb{Z}$.