Ejercicio 4.3.7. — Sea $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo regular entre variedades algebraicas. Probar que el functor imagen directa

$$f_* : \mathbf{Qcoh}(X) \longrightarrow \mathbf{Qcoh}(Y),\ \mathscr{F} \longmapsto f_*\mathscr{F}$$

es *exacto por la izquierda.*

Ejercicio 4.4.15. — Probar que si $f : K^\bullet \longrightarrow L^\bullet$ y $g : L^\bullet \longrightarrow K^\bullet$ son morfismos de complejos en $\mathscr{C}$ tales que

$$f \circ g \sim \mathrm{Id}_{L^\bullet} \text{ y } g \circ f \sim \mathrm{Id}_{K^\bullet}$$

entonces f y g son quasi-isomorfismos, y $\mathrm{H}^i(f)^{-1} = \mathrm{H}^i(g)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Singularidades Du Val A_n, D_n, E_6, E_7, E_8

CARLOS ASENCIO

Clasificación ADE

Definición 1.0.1. Un diagrama de Dynkin, es un grafo compuesto de vértices y aristas, ya sean simples o multiples, cuya finalidad es representar la clasificación de *álgebras de Lie semisimples sobre cuerpos algebraicamente cerrados*.

Definición 1.0.2. Un diagrama de Dynkin se dice **simplemente entrelazado** si este no presenta aristas multiples.

Ejemplo 1.0.1.

Diagrama de Dynkin dirigido

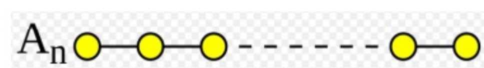
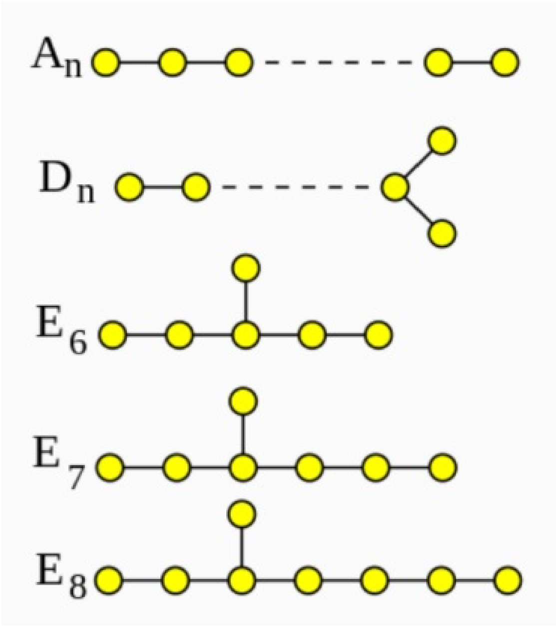


Diagrama de Dynkin no dirigido

Definición 1.0.3. La clasificación ADE relaciona objetos matemáticos que están en correspondencia con diagramas de Dynkin simplemente entrelazados.

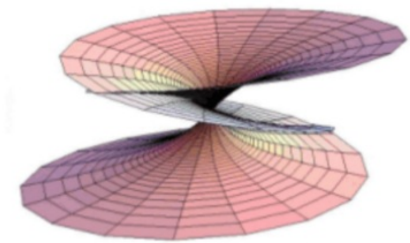
La lista completa de los diagramas de Dynkin simplemente entrelazados corresponde a:

A_n, D_n, E_6, E_7, E_8



Singularidades de Du Val

Definición 2.0.1. Una singularidad de Du Val es una singularidad aislada de una superficie compleja, que corresponde a una superficie doble ramificada del plano.



Superficie doble ramificada

Observación 2.0.1. Las singularidades de Du Val se conocen también como *Singularidad sencilla de superficie, singularidad Kleiniana o de Klein, o doble punto racional*.

Observación 2.0.2. Las singularidades de Du Val son parte de las singularidades canónicas (también llamadas singularidades racionales de Gorenstein), en estricto rigor corresponden a las singularidades canónicas en dimensión 2.

Ejemplo 2.0.1. A_1

Sea $X = V(x^2, y^2, z^2) \subseteq \mathbb{A}^3$ *una variedad. Notemos que el punto* $P = (0, 0, 0)$ *es la única singularidad de la variedad* X*, a este punto se le conoce como* punto ordinario doble. *Notemos que nuestra variedad* X *corresponde a un cono cuadrático, el cual se puede ver graficado de la siguiente forma (Esto se hace mas evidente al hacer el cambio de* $z \longrightarrow iz$*)*

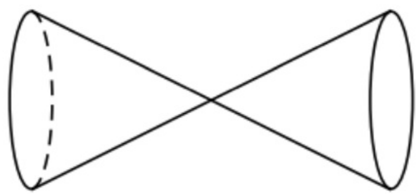


Figura 2.1: Variedad X

El *Blow-up* de $\mathbb{A}^3$ en P se puede cubrir por 3 cartas afines, las cuales denominaremos $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, las que estarán definidas de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccc} \sigma_1 : \mathbb{A}^3 \longrightarrow \mathbb{A}^3 & \sigma_2 : \mathbb{A}^3 \longrightarrow \mathbb{A}^3 & \sigma_3 : \mathbb{A}^3 \longrightarrow \mathbb{A}^3 \\ (x, y_1, z_1) \longrightarrow (x, xy_1, xz_1) & (x_1, y, z_1) \longrightarrow (x_1 y, y, yz_1) & (x_1, y_1, z) \longrightarrow (x_1 z, y_1 z, z) \end{array}$$

Ahora consideremos la carta σ_1, y veamos que le ocurre a la ecuación que define a nuestra variedad X : $x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (xy_1)^2 + (xz_1)^2 = x^2 + x^2y_1^2 + x^2z_1^2 = x^2(1 + y_1^2 + z_1^2)$

Aquí se obtiene la variedad $B_1 = V(1 + y_1^2 + z_1^2, x)$ y $\sigma_1 : B_1 \longrightarrow X$ corresponde a la restricción del Blow-up.

Además notemos que $\sigma_1^{-1}(P) = \Gamma$ que es una curva que se obtiene al intersectar $x = 0$ con B_1.

Veamos ahora que ocurre con la carta σ_2 :

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x_1 y)^2 + y^2 + (y z_1)^2 = x_1^2 y^2 + y^2 + y^2 z_1^2 = y^2(1 + x_1^2 + z_1^2).$$

Aquí se obtiene la variedad $B_2 = V(1 + x_1^2 + z_1^2, y)$ *y* $\sigma_2 : B_2 \longrightarrow X$ *corresponde a la restricción del* Blow-up, *además notemos que* $\sigma_2^{-1}(P) = \Gamma$ *que es una curva que se obtiene al intersectar* $y = 0$ *con* B_2.

Finalmente, veamos la carta σ_3 :

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x_1 z)^2 + (y_1 z)^2 + z^2 = x_1^2 z^2 + y_1^2 z^2 + z^2 = z^2(1 + x_1^2 + y_1^2).$$

Aquí se obtiene la variedad $B_3 = V(1 + x_1^2 + y_1^2, z)$ *y* $\sigma_3 : B_3 \longrightarrow X$ *corresponde a la restricción del* Blow-up, *además notemos que* $\sigma_3^{-1}(P) = \Gamma$ *que es una curva que se obtiene al intersectar* $z = 0$ *con* B_3.

Por otra parte, si consideramos la carta σ_1*, para que las derivadas parciales den cero, se debe cumplir que* $y_1 = z_1 = 0$*, esto es análogo para* σ_2 *y* σ_3*. Por tanto al pegar las 3 cartas, lo cual nos entregará el* Blow-up *completo, se obtiene la superficie* B*, la cual es suave.*

Graficamente, lo que esta ocurriendo es que el punto P *de nuestra variedad* X *se puede ver como la intersección de infinitas rectas, las cuales, al momento de hacer el* Blow-up*, se "despegan y alinean", paralelas entre si.*

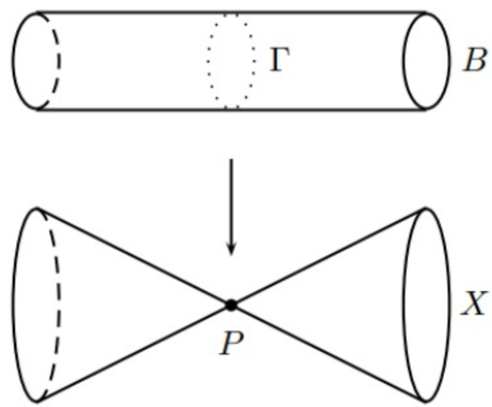


Figura 2.2: El *blow up* de X en P