Ayudantía 8 (MAT426)

Eric Zepeda

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María

1. Ayudantía

1. Sea X una variedad Algebraica Suave e irreducible y sea $f \in k(X)\backslash\{0\}$. Probar que $f \in \mathscr{O}(X)$ es regular si y sólo si todos los coeficientes de $div(f)$ son ≥ 0. Deducir que para todo $d \geq 1$ el divisor dH_0 en $\mathbb{P}^n$ **no** es principal.

2. Sea $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{A}^3/z^2 = xy\}$ un cono en A^3 y $L = \{x = z = 0\}$ recta en X. Probar que $Cl(X) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ generado por $[L]$ (que cumple $[2L] = 0$ en $Cl(X)$)

2. Homología Singular

"*One should realize that the homology groups describe what man does in his home. The cohomology groups describe what co-man does in his home*"(Jean Gallier y Jocelyn Quaintance, 2016,p.8).

Partiremos dejando en claro que hay muchos tipos de grupos de homología (Simplicial, singular, cellular, etc.), pero todos surgen de la misma manera. Esto es, de una secuencia (posiblemente infinita) llamada *complejo de cadenas*

$$\cdots \xrightarrow{d_{p+2}} C_{p+1} \xrightarrow{d_{p+1}} C_p \xrightarrow{d_p} \cdots \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{d_0} 0$$

Con C_i, $i \in \mathbb{N}$, espacios vectoriales o en el caso más general, grupos abelianos (tipicamente generados libremente). Los mapeos $d_p : C_p \to C_{p-1}$ son lineales u homomorfismos de grupos abelianos (para el segundo caso) tal que

$$d_p \circ d_{p+1} = 0 \quad \forall p \geq 0 \tag{1}$$

Los elementos de C_p son llamados *p-cadenas* y los mapeos *operadores frontera (También mapeos frontera).* La idea detrás de la condición (1) es que los elementos de la forma $d_p(x) \in C_{p-1}$ con $c \in C_p$ sean fronteras y cada frontera no tenga frontera. Por ejemplo en $\mathbb{R}^2$ los puntos de la frontera bola unitaria cerrada $\overline{\mathbb{B}(0,1)} = B_p(C)$ forma la circunsferencia unitaria y los puntos de esta, no tienen frontera. La prueba de ello, es que por (1), $B_p = Im\ d_{p+1}(C) \subset Ker(d_p) = Z_p(C)$ por lo que tendría sentido definir $H_p(C) = Z_p(C)/B_p(C) = Ker\ d_p/Im\ d_{p+1}$. Este es el *p-grupo de homología* del *complejo de cadenas* C. Los elementos de Z_p son *p-ciclos* y los de B_p *p-fronteras.*

Una secuencia se dirá exacta si satisface una condición más fuerte que (1):

$$Im\ d_{p+1} = Ker\ d_p \quad \forall p \geq 0 \tag{2}$$

Así se puede interpretar a los grupos homologicos como una medida de error de un complejo de cadenas a ser exacta.

En lo que sigue, sea X un espacio de Hausdorff y conseremos mapeos continuos entre espacios. La homología singular (y cohomologia) viene de complejo de cadenas generada por cadenas singulares. Las cadenas singulares son definidas en terminos de ciertas figuras convexas que generalizan segmentos de linea, triangulos y tetraedros llamados n-símplices estándar.

Definición: Para cualquier entero $n \geq 0$, el n-símplice estándar es el convexo subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ consistente en el conjunto de puntos

$$\Delta^n = \{(t_0, t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | t_0 + t_1 + ... + t_n = 1, t_i \geq 0\}$$

Los n+1 puntos correspondientes a la base canonica de vectores $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ son llamados vertices del simplice Δ^n.

El simplice Δ^n es el *envoltura convexa* de los n+1 puntos $(e_1, ..., e_{n+1})$ desde que podemos reescribirlo como:

$$\Delta^n = \{t_0 e_1 + t_1 e_2 + ... + t_n e_{n+1} | t_0 + t_1 + ... + t_n = 1, t_i \geq 0\}$$

Así, $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. En partícular, cuando $n = 0$, el simplice Δ^0 consiste en puntos aislados $t_0 = 1$ en $\mathbb{R}$.

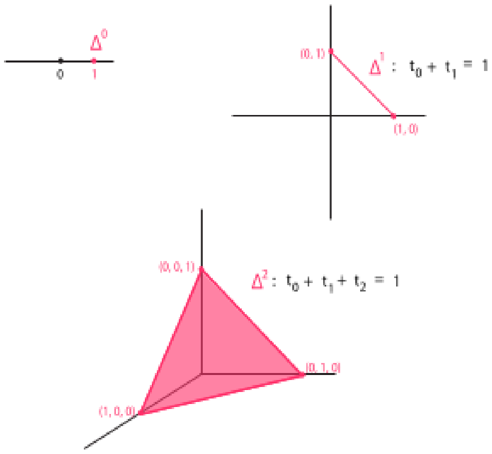


Figura 1 Respectivamente los Δ^0, Δ^1 y Δ^2 simplicies.

Definición: Dado un espacio topológico X, un p-símplice singular es cualquier mapeo continuo $\sigma : \Delta^p \to X$ (con $p \geq 0$). Si $p \geq 1$, la cara i-esima (i-mapeo denotado σ_i) del p-simplice singular σ es el $(p-1)-$ simplice singular.

$$\sigma \circ \varphi_i^{p-1} : \Delta^p \to X 0 \leq i \leq p$$

donde $\varphi_i^{p-1} : \Delta^{p-1} \to \Delta^p$ es el mapeo dado por:

$$\varphi_0^{p-1}(t_1, ..., t_p) = (0, t_1, ..., t_p)$$
$$\varphi_i^{p-1}(t_0, ..., t_{i-1}, t_{i+i}, ..., t_p) = (t_0, ..., t_{i-1}, 0, t_{i+1}, ..., t_p), \quad 1 \leq i \leq p-1$$
$$\varphi_p^{p-1}(t_0, ..., t_{p-1}) = (t_0, ..., t_{p-1}, 0)$$

Ejemplos: Tomemos $p = 1$. $\Delta^0 = \{1\}$, los mapeos vendrán dados por $\varphi_0^0, \varphi_1^0 : \Delta^0 \to \Delta^1$ están dados por:

$$\varphi_0^0(1) = (0, 1), \quad \varphi_1^0(1) = (1, 0)$$

Para $p = 2$ los mapeos estarán dados por $\varphi_0^0, \varphi_1^1, \varphi_1^2 : \Delta^1 \to \Delta^2$ estan dados por:

$$\varphi_0^0(t_1, t_2) = (0, t_1, t_1), \quad \varphi_1^1(t_0, t_2) = (t_0, 0, t_2) \quad \varphi_1^2(t_0, t_1) = (t_0, t_1, 0)$$

Observación: Al conjunto de todos los p-simplices regulares en X lo denotaremos por $S_{\Delta^p}(X)$.

Definición: Dado un espacio topológico X y un anillo conmutativo R. Una *p-cadena singular* con coeficientes en R es cualquier combinación lineal $\alpha = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \sigma_i$ de *p-símplices singulares* σ_i con coeficientes $\lambda_i \in R$. El *grupo de cadenas singulares* $S_p(X; R)$ es un R-modulo libre que consiste en todos los *singular p-cadenas*; generado por el conjunto $S_{\Delta^p}(X)$ de *símplices singulares*. Fijamos $S_p(X; R) = (0)$ para $p < 0$. Si $p \geq 1$, dado cualquier singular p simplice σ, su frontera $\partial\sigma$ es el singular (p-1)-cadena dado por

$$\partial\sigma = \sigma \circ \varphi_1^{p-1} + \cdots + (-1)^p \sigma \circ \varphi_p^{p-1}$$

Extendiendo el mapeo ∂ a $S_p(X; R)$ por linealidad, obtenemos el homomorfismo frontera

$$\partial S_p(X; R) \to S_{p-1}(X; R)$$

Observación: Para ser más precisos consideramos $\partial_p S_p(X; R) \to S_{p-1}(X; R)$ y definimos $S_*(X; R)$ como la suma directa

$$S_*(X; R) = \bigoplus_{p \geq 0} S_p(X; R)$$

De este modo, ∂_p da el mapeo $\partial : S_*(X; R) \to S_*(X; R)$
Ejemplo: Consideremos la frontera de un 1-simplice singular σ, es $\sigma(0, 1) - \sigma(1, 0)$. La frontera de un 2-simplice singular es:

$$\sigma^0 - \sigma^1 + \sigma^2$$

Donde $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ son caras de σ. En este caso, curvas en X. Por ejemplo, σ_0 es la curva dada por el mapeo

$$(t_1, t_1) \to \sigma(0, t_1, t_2)$$

De Δ^1 a X, donde es fácil verificar $t_1 + t_2 = 1$ con $t_1, t_2 \geq 0$.

Proposición: Dado un espacio topologico X y un anillo conmutativo R, el mapeo frontera $\partial : S_*(X; R) \to S_*(X; R)$ satisface la condición

$$\partial \circ \partial = 0$$

Proposicion: Dado un espacio topológico X y un anillo conmutativo R, para cualquier $p \geq 0$ el modulo singular de homología $H_p(X; R)$ es definida por

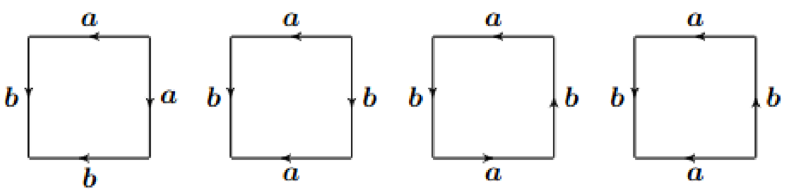
$$H_p(X; R) = Ker\ \partial_p / Im\ \partial_{p+1} = Z_p / B_p$$

Donde $H_p(X; R) = (0)$ si $p < 0$ y definimos $H_*(X; R)$ como la suma directa

$$H_*(X; R) = \bigcup_{p \geq 0} H_p(X; R)$$

y la llamamos homología singular de X con coeficientes en R.
Definición: Sea P un poligono plano tal que podemos etiquetar cada arista con una letra. Un esquema de etiquetas de P es una composición de las letras que representan las aristas de P en el orden de nuestra orientación escogida para el poligono.

Ejemplo:

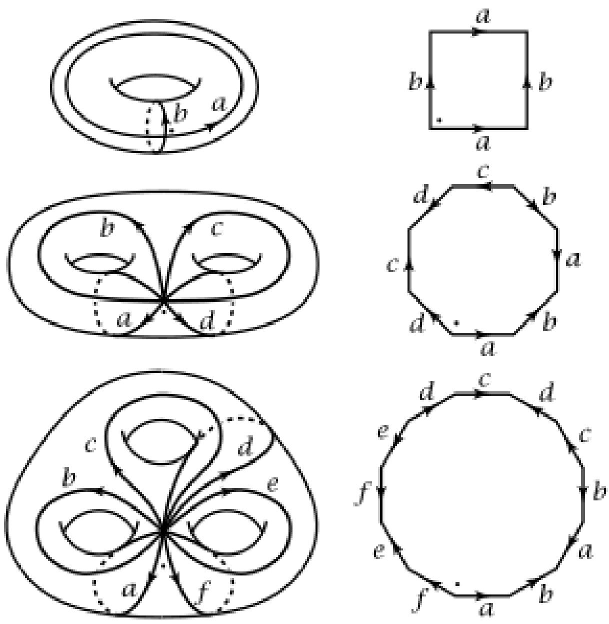


Sphere Torus Projective plane Klein bottle

Donde sus esquemas de etiquetas correspondientes son:

1. $abb^{-}a^{-} \sim aa^{-}$, la Esfera.
2. $aba^{-}b^{-}$, el Toroide.
3. $abab \sim aa$ el Plano Proyectivo.
4. $aba^{-}b$, la Botella de Klein.

Además existen más representaciónes poligonales como:



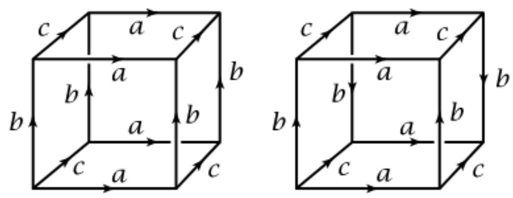
Donde sus esquemas de etiquetas son:

1. $aba^{-}b^{b}$, el toroide.

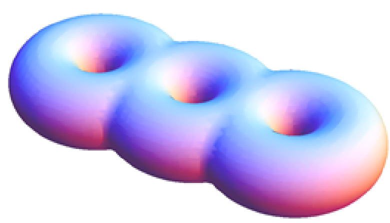
2. $cdc^{-}d^{-}aba^{-}b^{-}$, el 2-toroide.

3. $c^{-}d^{-}efe^{-}f^{-}aba^{-}b^{-}cd$ el 3-toroide.

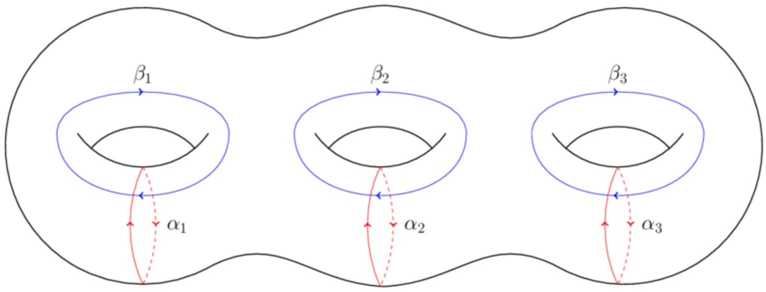
Además el triple toro admite una representación en tres dimensiones:



Esta se consigue identificando cada par de caras entre ambos cubos, pero como esta construcción se ve desde la perspectiva de las topologias CW, en lo que sigue se estudiará una superficie orientable compacta de genero 3. Sea



Podemos considerar las siguientes 6 clases de curvas reales en nuestra superficie C descritas como se ven en la imagen siguiente.



Donde sus grupos de homologia son:

- $H_2 = \mathbb{Z} = H_0$
- $H_1 \cong \mathbb{Z}^6$ (Las curvas)

Esto viene de un resultado más general, que nos dice que para cualquier superficie compacta y orientable de genero g (denotado Σ_g). Su grupo de homología viene dado por:

$$H_k(\Sigma_g, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & si\ k = 0, 2 \\ \mathbb{Z}^{2g}, & si\ k = 1 \\ 0, & si \quad k > 3 \end{cases}$$

3. Apéndice:

3.1. Glosario:

- Chain complex: Complejo de cadenas
- p-chains: p-cadenas
- Homology module: generalmente se traduce como "grupo de homología"(aunque a veces tenga más estructura, como de módulo o espacio vectorial, tradicionalmente igual se les llama grupos).
- Singular chains: Cadenas singulares
- Standar n-simplices: n-símplices estándar
- Standar n-simplex: n-símplice estándar
- Convex hull: Envoltura convexa
- Singular p-chain: p-cadena singular
- Singular chain group: Grupo de cadenas singulares
- Símplices singulares: Símplices singulares