Ayudantia 7 Curvas Algebraicas.

Nicolás Muñoz

Miercoles 8 de Noviembre de 2023.

Problema 1. Sean $L_1, ..., L_r \in \mathrm{Pic}(X)$ fibredos en rectas, y sean $s_i \in H^0(X, L_i) \setminus \{0\}$ secciones no-nulas para cada $i \in \{1, ..., r\}$, de tal suerte que $Y := V(s_1, ..., s_r) \subseteq X$ es *suave* de $\mathrm{codim}_X(Y) = r$. Probar que

$$\omega_Y \cong (\omega_X \otimes L_1 \otimes \cdots \otimes L_r)|_Y \text{ en } \mathrm{Pic}(X).$$

Demostración. Consideremos el fibrado

$$E = L_1 \oplus \cdots \oplus L_r$$

sobre X. Por el ejemplo 3.6.12 del apunte, tenemos

$$\mathscr{N}_{X/Y} \cong (L_1 \oplus \cdots \oplus L_r)\,|_Y \cong L_1|_Y \oplus \cdots \oplus L_r|_Y$$

y por la formula de adjunción,

$$\begin{aligned} \omega_Y &\cong \omega_X|_Y \otimes \det(\mathscr{N}_{X/Y}) \\ &\cong \omega_X|_Y \otimes L_1|_Y \otimes \cdots \otimes L_r|_Y \\ &\cong (\omega_X \otimes L_1 \otimes \cdots \otimes L_r)|_Y \end{aligned}$$

□

Ejemplo 1. Consideremos el fibrado

$$E := \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d_1) \oplus \cdots \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d_r)$$

sobre $\mathbb{P}^n$. Entonces, si $s \in H^0(\mathbb{P}^n, E) \setminus \{0\}$ tenemos

$$s = (P_1, ..., P_r)$$

donde $P_i \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d_i)) \setminus \{0\}$, i.e, P_i son polinomios homogeneos de grado $\deg(d_i)$. Luego, si

$$X := V(s) = V(P_1, ..., P_r)$$

es suave y $\dim(X) = n - r$, es decir, es una intersección completa, se tiene

$$\mathscr{N}_{\mathbb{P}^n/X} = (\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d_1) \oplus \cdots \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d_r))\,|_Y$$

y por el problema anterior,

$$\omega_X \cong \mathscr{O}_X\left(-n - 1 + \sum_{i=1}^{r} d_i\right)$$

Problema 2. Determinar las posibles intersecciones completas suaves e irreducibles $X_{d_1,...,d_r} \subseteq \mathbb{P}^n$ de Calabi-Yau de dimensión ≤ 3.

Demostración. Sabemos que X es una variedad de Calabi-Yau si $\omega_X \cong \mathscr{O}_X$, usando el ejemplo anterior esto equivale a que

$$\sum_{i=1}^{r} d_i = n + 1 \tag{1}$$

Denotemos $\dim(X) := m$. Como X es una intersección completa, se debe cumplir

$$m = n - r \tag{2}$$

donde r es el número de ecuaciones en $\mathbb{P}^n$ que definen X. Juntando 1 y 2,

$$\sum_{i=1}^{r} d_i = m + r + 1 \tag{3}$$

Haremos algunas suposiciones sobre los d_i. Primero, vamos a suponer que $d_i \geq 2$ para todo $i \in \{1, ..., r\}$. Podemos suponer esto sin perdida de generalidad, ya que si $d_i = 1$ para algún i, estamos intersectando un hiperplano en $\mathbb{P}^n$ que es isomorfo a $\mathbb{P}^{n-1}$, es decir, si por ejemplo $d_1 = 1$,

$$X := V(P_1, ..., P_r) \subseteq V(P_1, ..., P_{r-1}) \subseteq V(P_1) \cong \mathbb{P}^{n-1} \subseteq \mathbb{P}^n$$

entonces, podemos ignorar tal polinomio de grado 1 y considerar el incrustamiento de X en $\mathbb{P}^{n-1}$ (ignorando una coordenada).

Ademas, podemos suponer sin perdida de generalidad que

$$d_1 \leq d_2 \leq ... \leq d_r$$

ya que, no cambia la definición de X al reordenar los polinomios. Esta suposición implica,

$$2r \leq d_i r \leq \sum_{i=1}^{r} d_i = m + r + 1 \Longrightarrow 1 \leq r \leq m + 1 \tag{4}$$

Por otro lado, por la desigualdad de las medias aritmética y geométrica,

$$\frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} d_i \geq (d_1 \cdots d_r)^{1/r} \tag{5}$$

donde se alcanza la igualdad si y sólo si todos los d_i son iguales. Usando 5, obtenemos

$$2r \leq r(d_1 \cdots d_r)^{1/r} \leq \sum_{i=1}^{r} d_i = m + r + 1. \tag{6}$$

Podemos ver que, en 6, la igualdad se alcanza si $r = m + 1$, lo que implicaria la igualdad en la desigualdad de las medias. Entonces, en el caso que $r = m + 1$, obtenemos que todos los d_i son iguales,y se obtiene que $d_i = 2$ para todo i en este caso.

Ahora iteramos sobre $m \leq 3$.

- $m = 1$: Aquí, $1 \leq r < 2$. El único caso es $r = 1$, entonces, de 2 y 3 obtenemos $n = 2$ y $d_1 = 3$. Es decir, X es una curva eliptica.
- $m = 2$: Aquí, $1 \leq r < 3$. Si $r = 1$, de 2 y 3 obtenemos $n = 3$ y $d_1 = 4$. Si $r = 2$, $n = 4$ y $d_1 + d_2 = 5$, usando las suposiciones sobre los d_i, tenemos que el único par posible es $d_1 = 2$ y $d_2 = 3$.
- $m = 3$. Aquí $1 \leq r < 4$. Si $r = 1$, $n = 4$ y $d_1 = 5$. Si $r = 2$, $n = 5$ y $d_1 + d_2 = 6$, usando las suposiciones tenemos dos posibles pares para d_1, d_2, que son $d_1 = 3$ y $d_2 = 3$ ó $d_1 = 2$ y $d_2 = 4$. Si $r = 3$, $n = 6$ y $d_1 + d_2 + d_3 = 7$, y por las suposiciones la única tripleta posible es $d_1 = 2$, $d_2 = 2$ y $d_3 = 3$.

Este análisis, más el caso $r = m + 1$ que fue visto antes, cubre todos los casos posibles. □

Problema 3. Sea X una variedadd algebraica proyectiva suave e irreducible, y sea $E \to X$ un fibredo vectorial de $\mathrm{rg}(E) = r$. Probar que $\mathbb{P}(E)$ es una variedad algebraica suave e irreducible de

$$\dim(\mathbb{P}(E)) = \dim(X) + r - 1.$$

Demostración. Notemos que $\mathbb{P}(E)$ localmente es $U_i \times \mathbb{P}^{r-1}$, i.e, es un producto de variedades algebriacas suaves, por lo tanto es suave, ya que ser suave es una propiedad local. Para el resto de las propiedades que queremos probar, basta aplicar el Teorema 2,12,13. Por hipotesis, se tiene que X es irreducible, el morfismo

$$\pi : \mathbb{P}(E) \twoheadrightarrow X$$

es regular, sobreyectivo y cerrado, y ademas, como $\mathbb{P}(E) \xrightarrow{\pi} X$ es un fibrado de rango r, tenemos que todas las fibras son irreducibles y de dimensión r. Entonces, por el Teorema, obtenemos que X es irreducible, y

$$\dim(\mathbb{P}(E)) = \dim(X) + r - 1.$$

□

Ejemplo 2. Consideremos $X = \mathbb{P}^1$ y $E = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$, cuyas matrices de transición están dadas por

$$g_{ij}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{x_i}{x_j} \end{pmatrix}.$$

Luego, la superficie algebraica $S := \mathbb{P}(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-1))$ se obtiene al pegar los $V_i := U_i \times \mathbb{P}^1 \cong \mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1$, con $i \in \{0, 1\}$, usando el cambio de cartas

$$\psi : (\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}) \times \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\sim} (\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}) \times \mathbb{P}^1, (s, [u, v]) \mapsto \left(\frac{1}{s}, [u, sv]\right)$$

Veamos que $S \cong \mathrm{Bl}_p(\mathbb{P}^2)$. En efecto, si consideramos $p = [1, 0, 0]$ entonces,

$$\mathrm{Bl}_p(\mathbb{P}^2) := \{([x, y, z], [t_1, t_2]) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \text{ tal que } yt_2 = zt_1\} \subseteq \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1.$$

Por otra parte, hay isomorfismos

$$\begin{aligned} V_0 &\cong \mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\sim} \{t_2 \neq 0\} \cap \mathrm{Bl}_p(\mathbb{P}^2), (s, [u, v]) \mapsto ([u, sv, v], [s, 1]) \text{ con } y = zt_1, \\ V_1 &\cong \mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\sim} \{t_1 \neq 0\} \cap \mathrm{Bl}_p(\mathbb{P}^2), (s, [u, v]) \mapsto ([u, v, sv], [1, s]) \text{ con } yt_2 = z, \end{aligned}$$

que son compatibles con ψ, i.e, $\mathbb{P}(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) \cong \mathrm{Bl}_p(\mathbb{P}^2)$.