

Ayudantía 7 Geometría Algebraica

Javier Silva

Instituto de Matemáticas - PUCV

26/11/2021

Ejercicio 4.1.2

Sea $C \subset \mathbb{P}^2$ una curva proyectiva suave de grado 3 (i.e; una curva elíptica). Probar que la sucesión exacta:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C(-3) \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^2}^1|_C \rightarrow \Omega_C^1 \rightarrow 0$$

provee otro contraejemplo a la exactitud por la derecha de la sucesión de secciones globales inducida.

Ejercicio 4.1.2

Sea $C \subset \mathbb{P}^2$ una curva proyectiva suave de grado 3 (i.e; una curva elíptica). Probar que la sucesión exacta:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C(-3) \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^2}^1|_C \rightarrow \Omega_C^1 \rightarrow 0$$

provee otro contraejemplo a la exactitud por la derecha de la sucesión de secciones globales inducida.

Sea $X \subset \mathbb{P}^n$ una hipersuperficie suave de grado d , sea el morfismo inclusión $X \xrightarrow{i} \mathbb{P}^n$. Consideramos la sucesión exacta de Euler para el haz cotangente $\Omega_{\mathbb{P}^n}^1$ de \mathbb{P}^n ;

$$0 \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n}^1 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{\oplus(n+1)} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \rightarrow 0$$

Ahora, consideramos el pullback del morfismo inclusión, tomamos secciones globales y obtenemos

$$0 \rightarrow \Gamma(X, i^* \Omega_{\mathbb{P}^n}^1) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{\oplus(n+1)}) \rightarrow \dots$$

Pero $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ no tiene secciones globales ya que solamente hay secciones para $d \geq 0$, por lo que $\Gamma(X, i^* \Omega_{\mathbb{P}^n}^1)$ no tiene secciones globales.

Tenemos

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-d) \rightarrow i^* \Omega_{\mathbb{P}^n}^1 \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow 0,$$

tomando secciones globales obtenemos

$$0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X(-d)) \rightarrow \Gamma(X, i^* \Omega_{\mathbb{P}^n}^1) \rightarrow \Gamma(X, \Omega_X^1) \rightarrow \dots,$$

En nuestro caso, para $C \subset \mathbb{P}^2$ curva elíptica la fórmula de adjunción y (3.7.6) implica $\Omega_C^1 \cong \mathcal{O}_C$.

Así $\Gamma(X, \Omega_C^1) \cong k \neq 0$, por lo que la sucesión anterior no es exacta.

Ejercicio 4.1.30

Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Probar que la variedad algebraica $X_n := \mathbb{A}^n \setminus \{0\}$ no es una variedad algebraica afín.

Ejercicio 4.1.30

Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Probar que la variedad algebraica $X_n := \mathbb{A}^n \setminus \{0\}$ no es una variedad algebraica afín.

Notar que X_2 es una subvariedad cerrada afín de X_n para todo $n \geq 2$, y una subvariedad cerrada de una subvariedad afín es afín, por lo que basta demostrar el ejercicio para X_2 .

Ejercicio 4.1.30

Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Probar que la variedad algebraica $X_n := \mathbb{A}^n \setminus \{0\}$ no es una variedad algebraica afín.

Notar que X_2 es una subvariedad cerrada afín de X_n para todo $n \geq 2$, y una subvariedad cerrada de una subvariedad afín es afín, por lo que basta demostrar el ejercicio para X_2 .

Cubrimos a X_2 por los abiertos afines $U_1 := \mathbb{A}^1 \times (\mathbb{A}^1 \setminus \{0\})$, $U_2 := (\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}) \times \mathbb{A}^1$ y consideramos sus haces de funciones regulares $\mathcal{O}(U_1) \cong k[T_1, T_2, T_2^{-1}]$, $\mathcal{O}(U_2) \cong k[T_1, T_1^{-1}, T_2]$.

Ejercicio 4.1.30

Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Probar que la variedad algebraica $X_n := \mathbb{A}^n \setminus \{0\}$ no es una variedad algebraica afín.

Notar que X_2 es una subvariedad cerrada afín de X_n para todo $n \geq 2$, y una subvariedad cerrada de una subvariedad afín es afín, por lo que basta demostrar el ejercicio para X_2 .

Cubrimos a X_2 por los abiertos afines $U_1 := \mathbb{A}^1 \times (\mathbb{A}^1 \setminus \{0\})$, $U_2 := (\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}) \times \mathbb{A}^1$ y consideramos sus haces de funciones regulares $\mathcal{O}(U_1) \cong k[T_1, T_2, T_2^{-1}]$, $\mathcal{O}(U_2) \cong k[T_1, T_1^{-1}, T_2]$. El haz estructural \mathcal{O}_{X_2} es coherente, por lo que podemos calcular su grupo de cohomología (de Čech) $H^1(X_2, \mathcal{O}_{X_2})$ usando el teorema de Leray para la aplicación

$$\Gamma(U_1, \mathcal{O}_{U_1}) \times \Gamma(U_2, \mathcal{O}_{U_2}) \rightarrow \Gamma(U_1 \cap U_2, \mathcal{O}_{U_1 \cap U_2})$$

$$(s_1, s_2) \mapsto s_1 - s_2$$

Tenemos entonces $\Gamma(U_1, \mathcal{O}_{U_1}) = k[T_1, T_2, T_2^{-1}]$,
 $\Gamma(U_2, \mathcal{O}_{U_2}) = k[T_1, T_1^{-1}, T_2]$,
 $\Gamma(U_1 \cap U_2, \mathcal{O}_{U_1 \cap U_2}) = k[T_1, T_1^{-1}, T_2, T_2^{-1}]$. Así $H^1(X_2, \mathcal{O}_{X_2})$ es un k -espacio vectorial de dimensión infinita, con base $(T_1^m, T_2^n)_{m,n < 0}$. Concluimos usando el teorema de Serre.

Definiciones

Una curva elíptica es una

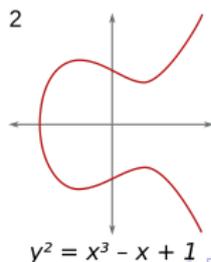
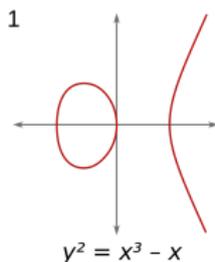
- expresión de la forma $y^2 = x^3 + ax + b$ sobre un cuerpo K , tal que el lado izquierdo de la ecuación no tiene raíces dobles y $\text{char}(K) \neq 2, 3$.
- curva algebraica suave proyectiva de género 1, con un punto especificado O .
- variedad abeliana de dimensión 1.
- curva plana proyectiva suave e irreducible de grado 3, a la cual se le puede asignar una ley de grupo.

Curvas Elípticas

Definiciones

Una curva elíptica es una

- expresión de la forma $y^2 = x^3 + ax + b$ sobre un cuerpo K , tal que el lado izquierdo de la ecuación no tiene raíces dobles y $\text{char}(K) \neq 2, 3$.
- curva algebraica suave proyectiva de género 1, con un punto especificado O .
- variedad abeliana de dimensión 1.
- curva plana proyectiva suave e irreducible de grado 3, a la cual se le puede asignar una ley de grupo.



Curvas Elípticas

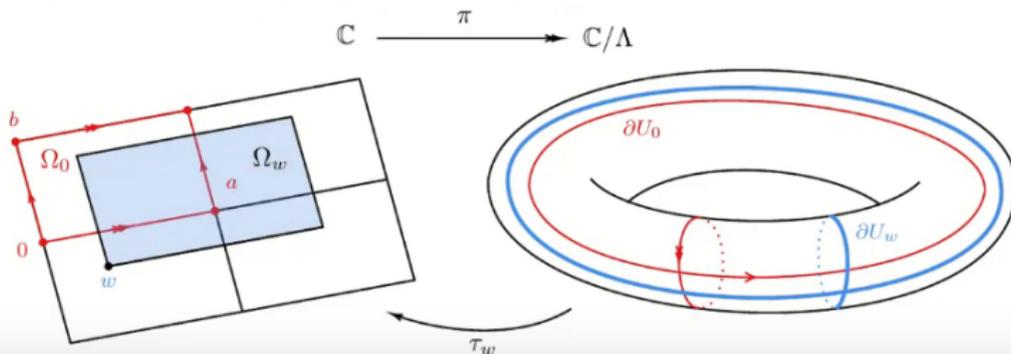
Definición

1. Un reticulado en \mathbb{C} es un sub-grupo discreto de rango 2.

2. Consideramos el reticulado

$\Lambda_{a,b} := a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{am + bn, m, n \in \mathbb{Z}\}$, con $a, b \in \mathbb{C}$ linealmente independientes sobre \mathbb{R} . La curva elíptica asociada a Λ es el grupo abeliano cociente $(\mathbb{C}/\Lambda, +)$.

Topológicamente, una curva elíptica es un toro obtenido de identificar (pegar) los lados opuestos del paralelogramo $[0, a] \times [0, b]$ a través de este cociente.



Definición

Una superficie de Riemann es una variedad compleja de dimensión (compleja) 1.

Proposición

La curva elíptica \mathbb{C}/Λ tiene estructura de superficie de Riemann.

Teorema

Para todo reticulado, \mathbb{C}/Λ es isomorfa, como superficie de Riemann, a una curva algebraica suave de grado 3 en \mathbb{P}^2 , es decir existe $f \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ no nulo, $\deg(f) = 3$, tal que

$$\mathbb{C}/\Lambda \cong V(f) = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2, f(x, y, z) = 0\}.$$

Además, $\nabla f(p) \neq 0$, para todo $p \in V(f)$.

Definición

Sea $\Lambda = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ un reticulado. La función elíptica de Weierstrass asociada a Λ es:

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

Definición

Sea $\Lambda = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ un reticulado. La función elíptica de Weierstrass asociada a Λ es:

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

Lema

La función \wp converge uniformemente sobre compactos en $\mathbb{C} \setminus \Lambda$.

Definición

Sea $\Lambda = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ un reticulado. La función elíptica de Weierstrass asociada a Λ es:

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

Lema

La función \wp converge uniformemente sobre compactos en $\mathbb{C} \setminus \Lambda$.

Observar que \wp tiene polos de orden 2 en Λ .

Definición

Sea $\Lambda = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ un reticulado. La función elíptica de Weierstrass asociada a Λ es:

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

Lema

La función \wp converge uniformemente sobre compactos en $\mathbb{C} \setminus \Lambda$.

Observar que \wp tiene polos de orden 2 en Λ .

Proposición

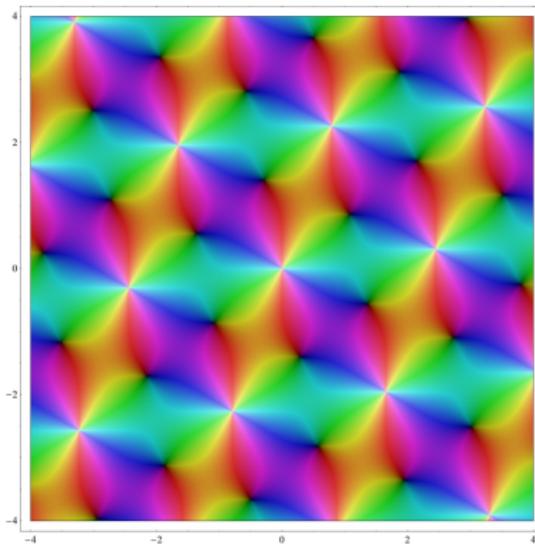
La función \wp es meromorfa y periódica con (único) grupo de períodos Λ ; $\wp(z + \lambda) = \wp(z)$ para todo $\lambda \in \Lambda$.

Curvas Elípticas

Para el círculo unitario S^1 , existe la parametrización (no racional) usando el seno y su derivada $\Psi : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow S^1$,
 $t \mapsto (\sin(t), \cos(t))$. Dado que ambas funciones son periódicas, se escogió un dominio en particular para que la función sea biyectiva.

Curvas Elípticas

Para el círculo unitario S^1 , existe la parametrización (no racional) usando el seno y su derivada $\Psi : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow S^1$, $t \mapsto (\sin(t), \cos(t))$. Dado que ambas funciones son periódicas, se escogió un dominio en particular para que la función sea biyectiva. Similarmente, la función elíptica de Weierstrass nos permite parametrizar la curva elíptica \mathbb{C}/Λ .



Corolario

La función \wp se factoriza a través de la proyección canónica al cociente

$$\wp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \Lambda \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\},$$

donde

$$\bar{\wp} : \mathbb{C} \setminus \Lambda \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}), [z] \rightarrow \wp(z).$$

es holomorfa con un único polo (de orden 2), el cual es $[0] \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$.

Teorema

La función

$$\Phi : \mathbb{C} \setminus \Lambda \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$$

$$[0] \neq z \mapsto [\bar{\wp}(z), \bar{\wp}'(z), 1]$$

$$[0] \mapsto [0, 1, 0]$$

define un isomorfismo entre la curva elíptica $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ y la curva algebraica suave de grado 3

$$\bar{\Gamma} = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \text{ tal que } y^2 z = 4x^3 + axz^2 + b^3\},$$

que es la compactificación proyectiva de la curva algebraica afín

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \text{ tal que } y^2 = 4x^3 + ax + b\}.$$