Ayudantía 7 Geometría Algebraica

Javier Silva

Instituto de Matemáticas - PUCV

26/11/2021

Ejercicio 4.1.2

Sea $C \subset \mathbb{P}^2$ una curva proyectiva suave de grado 3 (i.e; una curva elíptica). Probar que la sucesión exacta:

$$0 \to \mathcal{O}_C(-3) \to \Omega^1_{\mathbb{P}^2}|_C \to \Omega^1_C \to 0$$

provee otro contraejemplo a la exactitud por la derecha de la sucesión de secciones globales inducida.

Ejercicio 4.1.2

Sea $C \subset \mathbb{P}^2$ una curva proyectiva suave de grado 3 (i.e; una curva elíptica). Probar que la sucesión exacta:

$$0 \to \mathcal{O}_C(-3) \to \Omega^1_{\mathbb{P}^2}|_C \to \Omega^1_C \to 0$$

provee otro contraejemplo a la exactitud por la derecha de la sucesión de secciones globales inducida.

Sea $X \subset \mathbb{P}^n$ una hipersuperficie suave de grado d, sea el morfismo inclusión $X \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^n$. Consideramos la sucesión exacta de Euler para el haz cotangente $\Omega^1_{\mathbb{P}^n}$ de $\mathbb{P}^n$;

$$0 \to \Omega^1_{\mathbb{P}^n} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{\oplus(n+1)} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to 0$$

.

Ahora, consideramos el pullback del morfismo inclusión, tomamos secciones globales y obtenemos

$$0 \to \Gamma(X; i^*\Omega^1_{\mathbb{P}^n}) \to \Gamma(X; \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{\oplus(n+1)}) \to$$

Pero $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ no tiene secciones globales ya que solamente hay secciones para $d \geq 0$, por lo que $\Gamma(X; i^*\Omega^1_{\mathbb{P}^n})$ no tiene secciones globales.

Tenemos

$$0 \to \mathcal{O}_X(-d) \to i^*\Omega^1_{\mathbb{P}^n} \to \Omega^1_X \to 0;$$

tomando secciones globales obtenemos

$$0 \to \Gamma(X; \mathcal{O}_X(-d)) \to \Gamma(X; i^*\Omega^1_{\mathbb{P}^n}) \to \Gamma(X; \Omega^1_X) \to \quad ;$$

En nuestro caso, para $C \subset \mathbb{P}^2$ curva elíptica la fórmula de adjunción y (3.7.6) implica $\Omega^1_C = \mathcal{O}_C$.

Así $\Gamma(X; \Omega^1_C) = k \neq 0$, por lo que la sucesión anterior no es exacta.

Ejercicio 4.1.30

Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Probar que la variedad algebraica $X_n := \mathbb{A}^n \setminus \{0\}$ no es una variedad algebraica afín.

Ejercicio 4.1.30

Sea n 2 N con n 2. Probar que la variedad algebraica $X_n :=$ A^n n $f0g$ no es una variedad algebraica afín.

Notar que X_2 es una subvariedad cerrada afín de X_n para todo n 2, y una subvariedad cerrada de una subvariedad afín es afín, por lo que basta demostrar el ejercicio para X_2.

Ejercicio 4.1.30

Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Probar que la variedad algebraica $X_n := \mathbb{A}^n \setminus \{0\}$ no es una variedad algebraica afín.

Notar que X_2 es una subvariedad cerrada afín de X_n para todo $n \geq 2$, y una subvariedad cerrada de una subvariedad afín es afín, por lo que basta demostrar el ejercicio para X_2.
Cubrimos a X_2 por los abiertos afines $U_1 := \mathbb{A}^1 \times (\mathbb{A}^1 \setminus \{0\})$, $U_2 := (\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}) \times \mathbb{A}^1$ y consideramos sus haces de funciones regulares $\mathcal{O}(U_1) = k[T_1, T_2, T_2^{-1}]$, $\mathcal{O}(U_2) = k[T_1, T_1^{-1}, T_2]$.

Ejercicio 4.1.30

Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Probar que la variedad algebraica $X_n := \mathbb{A}^n \setminus \{0\}$ no es una variedad algebraica afín.

Notar que X_2 es una subvariedad cerrada afín de X_n para todo $n \geq 2$, y una subvariedad cerrada de una subvariedad afín es afín, por lo que basta demostrar el ejercicio para X_2.
Cubrimos a X_2 por los abiertos afines $U_1 := \mathbb{A}^1 \times (\mathbb{A}^1 \setminus \{0\})$, $U_2 := (\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}) \times \mathbb{A}^1$ y consideramos sus haces de funciones regulares $\mathcal{O}(U_1) = k[T_1, T_2, T_2^{-1}]$, $\mathcal{O}(U_2) = k[T_1, T_1^{-1}, T_2]$. El haz estructural $\mathcal{O}_{X_2}$ es coherente, por lo que podemos calcular su grupo de cohomología (de Čech) $H^1(X_2, \mathcal{O}_{X_2})$ usando el teorema de Leray para la aplicación

$$\Gamma(U_1, \mathcal{O}_{U_1}) \oplus \Gamma(U_2, \mathcal{O}_{U_2}) \to \Gamma(U_1 \cap U_2, \mathcal{O}_{U_1 \cap U_2})$$

$$(s_1, s_2) \mapsto s_1 - s_2$$

Curvas Elípticas

Tenemos entonces $\Gamma(U_1; O_{U_1}) = k[T_1; T_2; T_2^{\ 1}]$,
$\Gamma(U_2; O_{U_2}) = k[T_1; T_1^{\ 1}; T_2]$,
$\Gamma(U_1 \setminus U_2; O_{U_1 \setminus U_2}) = k[T_1; T_1^{\ 1}; T_2; T_2^{\ 1}]$. Así $H^1(X_2; O_{X_2})$ es un k espacio vectorial de dimensión infinita, con base $(T_1^m; T_2^n)_{m;n<0}$. Concluímos usando el teorema de Serre.

Definiciones

Una curva elíptica es una

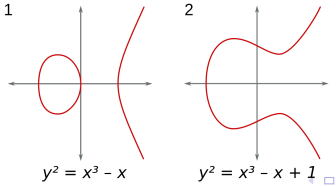
- expresión de la forma $y^2 = x^3 + ax + b$ sobre un cuerpo K, tal que el lado izquierdo de la ecuación no tiene raíces dobles y $\mathrm{char}(K) \neq 2; 3$.
- curva algebraica suave proyectiva de género 1, con un punto especificado O.
- variedad abeliana de dimensión 1.
- curva plana proyectiva suave e irreducible de grado 3, a la cual se le puede asignar una ley de grupo.

Curvas Elípticas

Definiciones

Una curva elíptica es una

- expresión de la forma $y^2 = x^3 + ax + b$ sobre un cuerpo K, tal que el lado izquierdo de la ecuación no tiene raíces dobles y $\mathrm{char}(K) \neq 2, 3$.
- curva algebraica suave proyectiva de género 1, con un punto especificado O.
- variedad abeliana de dimensión 1.
- curva plana proyectiva suave e irreducible de grado 3, a la cual se le puede asignar una ley de grupo.

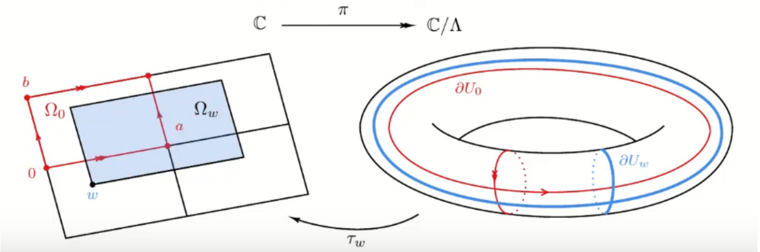


Curvas Elípticas

Definición

1. Un reticulado en C es un sub-grupo discreto de rango 2.
2. Consideramos el reticulado $\Lambda_{a;b} := aZ + bZ = fam + bn; m; n\ 2\ Zg$, con $a; b\ 2$ C linealmente independientes sobre R. La curva elíptica asociada a Λ es el grupo abeliano cociente (C=$\Lambda; +$).

Topológicamente, una curva elíptica es un toro obtenido de identificar (pegar) los lados opuestos del paralelogramo $[0; a]$ $[0; b]$ a través de este cociente.



Definición

Una superficie de Riemann es una variedad compleja de dimensión (compleja) 1.

Proposición

La curva elíptica $\mathbb{C}/\Lambda$ tiene estructura de superficie de Riemann.

Teorema

Para todo reticulado, $\mathbb{C}/\Lambda$ es isomorfa, como superficie de Riemann, a una curva algebraica suave de grado 3 en $\mathbb{P}^2$, es decir existe $f \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ no nulo, $\deg(f) = 3$, tal que

$$\mathbb{C}/\Lambda = V(f) = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2 \, ; \, f(x, y, z) = 0\}.$$

Además, $\nabla f(p) \neq 0$, para todo $p \in V(f)$.

Definición

Sea $\Lambda = aZ + bZ$ un reticulado. La función elíptica de Weierstrass asociada a Λ es:

$$\}(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{2\Lambda n f 0 g} \frac{1}{(z \qquad)^2} \qquad \frac{1}{\quad ^2}$$

Definición

Sea $\Lambda = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ un reticulado. La función elíptica de Weierstrass asociada a Λ es:

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}$$

Lema

La función $\wp$ converge uniformemente sobre compactos en $\mathbb{C} \setminus \Lambda$.

Definición

Sea $\Lambda = aZ + bZ$ un reticulado. La función elíptica de Weierstrass asociada a Λ es:

$$\}(z) := \frac{1}{z^2} + \underset{2\Lambda n f0g}{X} \frac{1}{(z \qquad)^2} \quad \frac{1}{\quad 2}$$

Lema

La función $\}$ converge uniformemente sobre compactos en $C\, n\, \Lambda$.

Observar que $\}$ tiene polos de orden 2 en Λ.

Curvas Elípticas

Definición

Sea $\Lambda = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ un reticulado. La función elíptica de Weierstrass asociada a Λ es:

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}$$

Lema

La función $\wp$ converge uniformemente sobre compactos en $\mathbb{C} \setminus \Lambda$.

Observar que $\wp$ tiene polos de orden 2 en Λ.

Proposición

La función $\wp$ es meromorfa y periódica con (único) grupo de períodos Λ; $\wp(z+\omega) = \wp(z)$ para todo $\omega \in \Lambda$.

Curvas Elípticas

Para el círculo unitario S^1, existe la parametrización (no racional) usando el seno y su derivada $\Psi : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to S^1$, $t \mapsto (\mathrm{sen}(t), \cos(t))$. Dado que ambas funciones son periódicas, se escogió un dominio en particular para que la función sea biyectiva.

Curvas Elípticas

Para el círculo unitario S^1, existe la parametrización (no racional) usando el seno y su derivada $\Psi : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to S^1$, $t \mapsto (\text{sen}(t), \cos(t))$. Dado que ambas funciones son periódicas, se escogió un dominio en particular para que la función sea biyectiva. Similarmente, la función elíptica de Weierstrass nos permite parametrizar la curva elíptica $\mathbb{C}/\Lambda$.

Corolario

La función $\wp$ se factoriza a través de la proyección canónica al cociente

$$\wp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \Lambda \to \mathbb{C} \cup \{\infty\},$$

donde

$$\tilde{\wp} : \mathbb{C} \setminus \Lambda \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \ [z] \to \wp(z).$$

es holomorfa con un único polo (de orden 2), el cual es $[0] \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$.

Teorema

La función

$$\Phi : \mathbb{C} \setminus \Lambda \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$$

$$[0] \neq z \mapsto [\wp(z), \overline{\wp'}(z), 1]$$

$$[0] \mapsto [0, 1, 0]$$

define un isomorfismo entre la curva elíptica $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ y la curva algebraica suave de grado 3

$$\overline{\Gamma} = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \text{ tal que } y^2 t = 4x^3 + axt^2 + b^3\},$$

que es la compactificación proyectiva de la curva algebraica afín

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \text{ tal que } y^2 = 4x^3 + ax + b\}.$$