Ayudantía 6
Curvas Algebraicas
Alumno: Pedro Tobar Méndez
Profesor: Pedro Montero
Ayudante: Sebastián Fuentes
Departamento de Matemáticas
Universidad Técnica Federico Santa María

Pregunta 1.

a) Demostrar que si $C \subseteq \mathbb{P}^2$ es una curva elíptica, entonces la aplicación de Abel-Jacobi es biyectiva.

Demostración. Recordemos la aplicación de Abel-Jacobi

$$\begin{aligned} \Phi : C &\hookrightarrow \operatorname{Pic}^0(C) \\ a &\longmapsto a - a_0 \end{aligned}$$

con $a_0 \in C$. Como las curvas elípticas son curvas proyectivas planas suaves y $C \ncong \mathbb{P}^1$ se tiene que Φ es inyectiva por el teorema de Abel-Jacobi. Luego para la sobreyectividad, sea $D \in \operatorname{Pic}^0(C)$ de la forma

$$D = a_1 + ... + a_m - b_1 - ... - b_m$$

para algún $2 \leq m \in \mathbb{N}$ y $a_1, ..., a_m, b_1, ..., b_m \in C$ no necesariamente distintos. Sabemos que por la Observación (1) que la recta ℓ_{a_1,a_2} que pasa por a_1, a_2, intersectan en un tercer punto $\psi(a_1, a_2) \in C$, por tanto existen un polinimio homogeneo $f_{\ell_{a_1,a_2}}$ tal que

$$\operatorname{div}(f_{\ell_{a_1,a_2}}) = a_1 + a_2 + \psi(a_1, a_2)$$

y lo mismo para b_1, b_2

$$\operatorname{div}(f_{\ell_{b_1,b_2}}) = b_1 + b_2 + \psi(b_1, b_2)$$

luego tenemos que $\frac{f_{\ell_{a_1,a_2}}}{f_{\ell_{b_1,b_2}}}$ es una división de polinmios por tanto la función que define esta fracción es una función racional y su divisor viene dado por

$$\operatorname{div}\left(\frac{f_{\ell_{a_1,a_2}}}{f_{\ell_{b_1,b_2}}}\right) = a_1 + a_2 + \psi(a_1, a_2) - b_1 - b_2 - \psi(b_1, b_2)$$

notemos que es un divisor de grado 0, y también es un divisor principal, ya que es el divisor de una función racional por tanto $\operatorname{div}\left(\frac{f_{\ell_{a_1,a_2}}}{f_{\ell_{b_1,b_2}}}\right) \in \operatorname{Div}^0(C)$ y $\operatorname{div}\left(\frac{f_{\ell_{a_1,a_2}}}{f_{\ell_{b_1,b_2}}}\right) \in \operatorname{PDiv}(C)$, luego como $\operatorname{Pic}^0(C) = \operatorname{Div}^0(C)/\operatorname{PDiv}(C)$ se tiene que $\operatorname{div}\left(\frac{f_{\ell_{a_1,a_2}}}{f_{\ell_{b_1,b_2}}}\right) = 0$ dentro de $\operatorname{Pic}^0(C)$ por tanto

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\left(\frac{f_{\ell_{a_1,a_2}}}{f_{\ell_{b_1,b_2}}}\right) &= a_1 + a_2 + \psi(a_1, a_2) - b_1 - b_2 - \psi(b_1, b_2) = 0 \\ \Rightarrow a_1 + a_2 - b_1 - b_2 &= \psi(b_1, b_2) - \psi(a_1, a_2) \end{aligned}$$

entonces reemplazando esto en D

$$D = -\psi(a_1, a_2) + a_3 + ... + a_m + \psi(b_1, b_2) - b_3 - ... - b_m$$

Luego repitiendo este proceso se tiene que podemos reducir D a dos términos

$$D = a - b \qquad (1)$$

con $a, b \in C$ luego tomemos la recta ℓ_{a,a_0} y la recta $\ell_{b,\psi(a_0,a)}$ y los polinomios homogéneos asociado $f_{\ell_{a,a_0}}, f_{\ell_{b,\psi(a,a_0)}}$ tales que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(f_{\ell_{a,a_0}}) &= a_0 + a + \psi(a, a_0) \\ \operatorname{div}(f_{\ell_{b,\psi(a,a_0)}}) &= b + \psi(a, a_0) + \psi(b, \psi(a, a_0)) \end{aligned}$$

luego al igual que antes el divisor de la división de estos polinomios es 0 dentro de $\text{Pic}^0(C)$ por tanto

$$\begin{aligned}
&\text{div}\left(\frac{f_{\ell_{a,a_0}}}{f_{\ell_{b,\psi(a,a_0)}}}\right) = a + a_0 + \psi(a,a_0) - b - \psi(a,a_0) - \psi(b,\psi(a,a_0)) = 0 \\
&\Rightarrow a - b = \psi(b,\psi(a,a_0)) - a_0
\end{aligned}$$

reemplazando esto en D

$$\begin{aligned}
D &= a - b \\
D &= \psi(b,\psi(a,a_0)) - a_0 \\
D &= \Phi(\psi(b,\psi(a,a_0)))
\end{aligned}$$

se concluye. Notar que si $m = 1$ se empieza desde (1) y se sigue el mismo argumento. 

b) Con lo anterior deducir la ley de grupo de una curva elíptica.

Sol:

Denotemos como $\oplus$ a ley de grupo para C y definamos con $p, q \in C$

$$\Phi(p \oplus q) := \Phi(p) + \Phi(q)$$

entonces

$$\begin{aligned}
\Phi(p \oplus q) &= \Phi(p) + \Phi(q) \\
p \oplus q &= \Phi^{-1}(\Phi(p) + \Phi(q)) \\
&= \Phi^{-1}(p - a_0 + q - a_0) = \Phi^{-1}(p + q - 2a_0)
\end{aligned}$$

tomemos la recta $\ell_{p,q}$ y la recta $\ell_{a_0,\psi(p,q)}$ y los polinomios homogéneos asociado $f_{\ell_{p,q}}, f_{\ell_{a_0,\psi(p,q)}}$ tales que

$$\begin{aligned}
\text{div}(f_{\ell_{p,q}}) &= p + q + \psi(p,q) \\
\text{div}(f_{\ell_{a_0,\psi(p,q)}}) &= a_0 + \psi(p,q) + \psi(a_0,\psi(p,q))
\end{aligned}$$

luego al igual que antes el divisor de la división de estos polinomios es 0 dentro de $\text{Pic}^0(C)$ por tanto

$$\begin{aligned}
&\text{div}\left(\frac{f_{\ell_{p,q}}}{f_{\ell_{a_0,\psi(p,q)}}}\right) = p + q + \psi(p,q) - a_0 + \psi(p,q) - \psi(a_0,\psi(p,q)) = 0 \\
&\Rightarrow p + q = a_0 + \psi(a_0,\psi(p,q))
\end{aligned}$$

entonces reemplazando

$$\begin{aligned}
p \oplus q &= \Phi^{-1}(p + q - 2a_0) \\
&= \Phi^{-1}(a_0 + \psi(a_0,\psi(p,q)) - 2a_0) \\
&= \Phi^{-1}(\psi(a_0,\psi(p,q)) - a_0) \\
&= \Phi^{-1}(\Phi(\psi(a_0,\psi(p,q)))) \\
&= \psi(a_0,\psi(p,q))
\end{aligned}$$

Para el inverso denotemoslo como $\ominus p$ al inverso de p y definamoslo como

$$\begin{aligned}
\ominus p &:= \Phi^{-1}(-\Phi(p)) \\
&= \Phi^{-1}(a_0 - p)
\end{aligned}$$

tomemos la recta ℓ_{a_0,a_0} y la recta $\ell_{p,\psi(a_0,a_0)}$ y los polinomios homogéneos asociado $f_{\ell_{a_0,a_0}}, f_{\ell_{p,\psi(a_0,a_0)}}$ tales que

$$\begin{aligned}
\text{div}(f_{\ell_{a_0,a_0}}) &= 2a_0 + \psi(a_0,a_0) \\
\text{div}(f_{\ell_{p,\psi(a_0,a_0)}}) &= p + \psi(a_0,a_0) + \psi(p,\psi(a_0,a_0))
\end{aligned}$$

luego al igual que antes el divisor de la división de estos polinomios es 0 dentro de $\text{Pic}^0(C)$ por tanto

$$\begin{aligned}
&\text{div}\left(\frac{f_{\ell_{a_0,a_0}}}{f_{\ell_{p,\psi(a_0,a_0)}}}\right) = 2a_0 + \psi(a_0,a_0) - p - \psi(a_0,a_0) - \psi(p,\psi(a_0,a_0)) = 0 \\
&\Rightarrow a_0 - p = \psi(p,\psi(a_0,a_0)) - a_0
\end{aligned}$$

entonces reemplazando

$$\begin{aligned}
\ominus p &= \Phi^{-1}(a_0 - p) \\
&= \Phi^{-1}(\psi(p,\psi(a_0,a_0)) - a_0) \\
&= \Phi^{-1}(\Phi(\psi(p,\psi(a_0,a_0)))) \\
&= \psi(p,\psi(a_0,a_0))
\end{aligned}$$

y el neutro viene dado por

$$\begin{aligned}
p \ominus p &= \Phi^{-1}(\Phi(p) - \Phi(p)) \\
&= \Phi^{-1}(p - a_0 + a_0 - p) \\
&= \Phi^{-1}(a_0 - a_0) \\
&= \Phi^{-1}(\Phi(a_0)) \\
&= a_0
\end{aligned}$$

y para corroborarlo

$$\begin{aligned}
p \oplus a_0 &= \Phi^{-1}(\Phi(p) + \Phi(a_0)) \\
&= \Phi^{-1}(\Phi(p)) \\
&= p
\end{aligned}$$

Pregunta 2. Supongamos que $\text{car}(k) \notin \{2,3\}$. Un ejemplo importante de curvas elípticas son aquellas que están dadas por su forma de Weierstrass

$$E := \left\{[x,y,z] \in \mathbb{P}^2(k) \text{ tal que } y^2z = x^3 + ax^2z + bxz^2 + cz^3\right\}$$

donde $a,b,c \in k$ son tales que E es una curva suave. En este caso, notamos que la curva afín $(z=1)$ asociada es

$$E_a := \left\{(x,y) \in \mathbb{A}^2(k) \text{ tal que } y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c\right\}$$

Dado $p,q \in E$, deducir a partir de estos conjuntos y tomando como neutro al punto $a_0 = [0,1,0]$, expresiones para $p \oplus q$, $2p$ y $\ominus p$, donde $\oplus$ denota la ley de grupo y $\ominus p$ el inverso de p.

Demostración. Notemos que $E \backslash E_a \overset{\text{def}}{=} E \cap \{z=0\} = \{p_\infty\}$, con $p_\infty = [0,1,0]$ es el único punto al infinito. Notar además que la recta tangente a E en el punto p_∞ está dada por

$$\ell_\infty \overset{\text{def}}{=} \left\{[x,y,z] \in \mathbb{P}^2(k) \text{ tal que } \frac{\partial F}{\partial x}(p_\infty)(x-0) + \frac{\partial F}{\partial y}(p_\infty)(y-1) + \frac{\partial F}{\partial z}(p_\infty)(z-0) = 0\right\} = \{z=0\},$$

donde F es el polinomio homogéneo no-nulo de grado 3 que define esta curva elíptica, por lo que $\ell_\infty \cap E = \{p_\infty\}$ es un punto de inflexión. Así, es natural escoger $p_\infty := a_0$ como el neutro de la ley de grupo de la curva elíptica $E \subseteq \mathbb{P}^2$, que denotaremos símplemente $(E,+)$ en lo que sigue. Dado que a_0 es un punto al infinito la recta ℓ_{p,a_0} coincide con la recta vertical en $\mathbb{A}^2$ que pasa por p, y toda la operatoria relevante ocurre en la curva afín $E_a \subseteq \mathbb{A}^2$.

Para la adición tomemos $p,q \in E$ tales que $p = (x_1,y_1)$ y $q = (x_2,y_2)$ no necesariamente distintos, entonces sabemos que

$$p \oplus q = \psi(a_0,\psi(p,q))$$

entonces primero debemos encontrar el tercer punto en el que intersecta la recta $\ell_{p,q}$ a E_a, entonces notemos que podemos definir la recta $\ell_{p,q}$ como

$$\ell_{p,q}: \qquad y - y_1 = m(x - x_1)$$

donde m denota la pendiente de la recta, ahora despejando y en la recta y reemplazando en la ecuación que define E_a se tiene que

$$\begin{aligned}(m(x-x_1)+y_1)^2 &= x^3+ax^2+bx+c\\ x^3+x^2(a-m^2)+x(2mx_1-2my_1+b)-(m^2x_1^2-2mx_1y_1+y_1^2-c) &= 0\end{aligned}$$

luego como p, q estan en la curva necesariamente sus coordenadas x son raíces del polinomio anterior, y así mismo el tercer punto que esta en la recta e intersecta a E_a su coordenada x también debe ser raíz, entonces definamoslocomo $\psi(p,q)=(x_3,y_3)$, entonces como el polinomio es cúbico podemos escribirlo como

$$\begin{aligned}&x^3+x^2(a-m^2)+x(2mx_1-2my_1+b)-(m^2x_1^2-2mx_1y_1+y_1^2-c)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\\ &=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3\\ &\Rightarrow m^2-a=x_1+x_2+x_3\\ &x_3=m^2-x_1-x_2-a\end{aligned}$$

y para encontrar y_3 reemplazamos en la recta

$$y_3=mx_3-mx_1+y_1$$

entonces el punto $\psi(p,q)=(x_3,y_3)=(m^2-x_1-x_2-a, mx_3-mx_1+y_1)$. Ahora falta encontrar el punto $\psi(a_0,\psi(p,q))$ debemos tomar la recta que pasa por a_0 y (x_3,y_3) que como se menciono antes debe ser la recta vertical $x=x_3$ y ver cual es el otro punto que intersecta a E_a. Como la ecuación que define E_a es cuadrática en y y (x_3,y_3) es solución, entonces $(x_3,-y_3)$ tambien es solución y este punto también pertence a la recta $x=x_3$ y como es único este punto se tiene que $\psi(a_0,\psi(p,q))=(x_3,-y_3)=(m^2-x_1-x_2-a,-mx_3+mx_1-y_1)$. Por tanto

$$p\oplus q=(m^2-x_1-x_2-a,-mx_3+mx_1-y_1)$$

ahora notemos que si $p\neq q$ se tiene esta misma expresión y m viene dada por

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

, y si $p=q$ entonces $p\oplus p=2p$ entonces

$$p\oplus p=2p=(m^2-2x_1-a,-mx_3+mx_1-y_1)$$

y m en este caso viene dada por la derivada en el punto p de la ecuación que define E_a entonces

$$\begin{aligned}y^2(x) &= x^3+ax^2+bx+c \qquad /\frac{d}{dx}\\ 2y(x)y'(x) &= 3x^2+2ax+b\\ y'(x) &= \frac{3x^2+2ax+b}{2y(x)}\\ \Rightarrow m=y'(x_1) &= \frac{3x_1^2+2ax_1+b}{2y_1}\end{aligned}$$

Ahora $\ominus p$, sabemos que

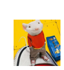
$$\ominus p=\psi(p,\psi(a_0,a_0))$$

luego como a_0 es un punto de inflexión, la recta tangente a a_0 es la misma recta que pasa por a_0 y p, por tanto

$$\ominus p=\psi(p,a_0)$$

y como mencionamos antes esto es solo reflejar en el eje x por tanto

$$\ominus p=\psi(\psi(p,\psi(a_0,a_0)))=\psi(p,a_0)=(x_1,-y_1)$$



Pregunta 3. Sea $k = \mathbb{C}$ y considerar la curva proyectiva plana

$$E = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2 \text{ tal que } y^2z = x^3 - xz^2 + z^3\right\}.$$

a) Probar que E es una curva elíptica y determinar su parte afín $E_a \subseteq \mathbb{A}^2$.

Sol:

Veamos que es suave primero, el polinomio que la define es

$$F(x, y, z) = x^3 - xz^2 + z^3 - y^2z$$

ahora veamos que mediante el criterio del Jacobiano que es suave, busquemos los puntos singulares

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= 3x^2 - z^2 = 0\\ \frac{\partial F}{\partial y} &= -2yz = 0\\ \frac{\partial F}{\partial z} &= -2xz + 3z^2 - y^2 = 0\end{aligned}$$

reduciendo esto un poco

$$\begin{aligned}yz &= 0\\ 3x^2 - z^2 &= 0\\ -2xz + 3z^2 - y^2 &= 0\end{aligned}$$

notemos que por la primera ecuación necesariamente $y = 0 \vee z = 0$. Si $y = z = 0$, por la segunda ecuación necesariamente $x = 0$, y en este caso el punto singular es el $[0, 0, 0]$ pero como estamos en $\mathbb{P}^2$ no puede ser ya que es el punto prohibido. Si $y = 0 \wedge z \neq 0$ entonces

$$\begin{aligned}3x^2 - z^2 = 0 &\qquad \wedge \qquad 3z^2 = 2xz\\ 3x^2 - z^2 = 0 &\qquad \wedge \qquad 3z = 2x\\ \Rightarrow 3x^2 - \frac{4}{9}x^2 = 0 &\\ x^2\left(3 - \frac{4}{9}\right) = 0 &\Rightarrow x = 0 \wedge z = 0\end{aligned}$$

y pero esto es una contradicción ya que supusimos $z \neq 0$. Y finalmente consideramos $y \neq 0 \wedge z = 0$ entonces

$$\begin{aligned}3x^2 = 0 &\qquad \wedge \qquad y^2 = 0\\ \Rightarrow x = 0 \wedge y = 0 &\end{aligned}$$

y de nuevo tenemos una contradicción ya que supusimos $y \neq 0$. Por tanto E es una curva suave, y ademas como la ecuación que la define viene dada por la forma de Weiertrass con $a = 0, b = -1, c = 1$, y su parte afín E_a viene dado reemplazando en la ecuación que define E con $z = 1$

$$E_a := \left\{(x, y) \in \mathbb{A}^2(k) \text{ tal que } y^2 = x^3 - x + 1\right\}$$

b) Probar que $p = (0, 1)$ y $q = (1, 1)$ pertecen a E_a, y calcular $p \oplus q$ y $p \oplus 2q$.

Sol:

Debemos ver que p, q satisfagan la ecuación que define E_a entonces para $p = (0, 1)$

$$1^2 = 0^3 - 0 + 1 \Rightarrow 1 = 1$$

y para $q = (1, 1)$

$$1^2 = 1^3 - 1^2 + 1 \Rightarrow 1 = 1$$

por tanto $p, q \in E_a$. Denotemos a_0 como el neutro definido en la pregunta anterior entonces sabemos que

$$p \oplus q = \psi(a_0, \psi(p, q))$$

primero debemos encontrar la recta que pasa por p, q y esta viene defina por

$$\begin{aligned} y - 1 &= \frac{1-1}{0-1}(x - 0) \\ y &= 1 \end{aligned}$$

y al intersectarla con E_a para encontrar el tercer punto

$$\begin{aligned} 1 &= x^3 - x + 1 \\ x(x^2 - 1) &= 0 \\ x(x+1)(x-1) &= 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1 \end{aligned}$$

como $(0, 1), (1, 1)$ son los puntos p, q respectivamente el tercer punto es $(-1, 1)$, osea $\psi(p, q) = (-1, 1)$ ahora la recta que pasa por a_0 y $\psi(p, q)$ es la recta $x = -1$, y por la parte anterior el otro punto que corta a E_a es el punto $\psi(p, q)$ reflejado en el eje x que sería $\psi(a_0, \psi(p, q)) = (-1, -1)$ por tanto

$$p \oplus q = \psi(a_0, \psi(p, q)) = (-1, -1)$$

Ahora para $p \oplus 2q$, calculemos primero $2q$ entonces se tiene que

$$2q = \psi(a_0, \psi(q, q))$$

debemos encontrar la recta tangente que pasa por q que viene dado por

$$y - 1 = y'(1)(x - 1)$$

y $y'(1)$ viene dada por

$$y'(1) = \frac{3 \cdot 1^2 - 1}{2 \cdot 1} = 1$$

entonces la recta tangente tiene dada por $y = x$, ahora debemos encontrar el otro punto que intersecta $y = x$ a E_a, notemos que $(-1, -1)$ pertenece a ambos (por la parte anterior se tiene que $(-1, -1) \in E_a$), entonces $\psi(q, q) = (-1, -1)$ y luego para encontrar $\psi(a_0, \psi(q, q))$ notemos que la recta que pasa por a_0 y $\psi(q, q)$ es la recta vertical que pasa por $\psi(q, q)$ por tanto el otro punto que intersecta a E_a es la reflexión de $\psi(q, q)$ en el eje x, por tanto $\psi(a_0, \psi(q, q)) = (-1, 1)$ entonces

$$2q = \psi(a_0, \psi(q, q)) = (-1, 1)$$

ahora

$$p \oplus 2q = \psi(a_0, \psi(p, 2q))$$

repetimos el proceso anterior, la recta que pasa por p y $2q$

$$\begin{aligned} y - 1 &= \frac{1-1}{-1-0}(x - 0) \\ y &= 1 \end{aligned}$$

tenemos la misma recta que en $p \oplus q$ por tanto sabemos que los puntos que intersectan a E_a son $(0, 1), (-1, 1), (1, 1)$ como p y $2q$ son los dos primeros se tiene que $\psi(p, 2q) = (1, 1)$ y al reflejarlo en el eje x se tiene que $\psi(a_0, \psi(p, 2q)) = (1, -1)$ por tanto

$$p \oplus 2q = \psi(a_0, \psi(p, 2q)) = (1, -1)$$

c) Probar que $r = (3, 5) \in E_a$, y calcular $\ominus r$ y $2r$.

$\boxed{\textbf{Sol:}}$

Notemos que al reemplazar r en la ecuación de E_a

$$5^2 = 3^3 - 3 + 1 \Rightarrow 25 = 27 - 3 + 1 \Rightarrow 25 = 25$$

Para $2r$ procedamos que igual que antes la recta tangente viene dada por

$$\begin{aligned} y - 5 &= \frac{3 \cdot 3^2 - 1}{2 \cdot 5}(x - 3) \\ y - 5 &= \frac{13}{5}x - \frac{39}{5} \\ y &= \frac{13}{5}x - \frac{14}{5} \end{aligned}$$

reemplazando en E_a nos queda

$$\begin{aligned} \left(\frac{13}{5}x - \frac{14}{5}\right)^2 &= x^3 - x + 1 \\ x^3 - \frac{169}{25}x^2 + \frac{339}{25}x - \frac{171}{25} &= 0 \end{aligned}$$

luego como sabemos que $(x-3)^2$ es raíz, llamemos $\psi(r,r) = (x_1, y_1)$ entonces otra raiz cumple que

$$\begin{aligned} x^3 - \frac{169}{25}x^2 + \frac{339}{25}x - \frac{171}{25} &= (x-3)^2(x - x_1) \\ &= x^3 - x^2(x_1 + 6) + x(6x_1 + 9) - 9x_1 \\ &\Rightarrow \frac{169}{25} = x_1 + 6 \Rightarrow x_1 = \frac{19}{25} \end{aligned}$$

por tanto reemplazando en la recta tangente tenemos que $y_1 = \frac{-103}{125}$ por tanto $\psi(r,r) = \left(\frac{19}{25}, \frac{-103}{125}\right)$, luego reflejando $\psi(r,r)$ en el eje x se tiene que $\psi(a_0, \psi(r,r)) = \left(\frac{19}{25}, \frac{103}{125}\right)$ entonces

$$2r = \psi(a_0, \psi(r,r)) = \left(\frac{19}{25}, \frac{103}{125}\right)$$

Ahora $\ominus r$, es solo reflejar en el eje x por tanto $\ominus r = (3, -5)$

1. Observación

. Sean $p, q \in \mathbb{P}^2$ dos puntos. Si $p \neq q$, entonces existe una única recta

$$\mathbb{P}^1 \cong \ell_{p,q} := \left\{\lambda p + \mu q, [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1\right\} \subseteq \mathbb{P}^2 \text{ tal que } p, q \in \ell_{p,q}$$

Si $p = q = [a, b, c] \in \mathbb{P}^2$ y $p \in E$, entonces existe una única recta tangente

$$\mathbb{P}^1 \cong \ell_{p,p} := \left\{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2 \text{ tal que } \frac{\partial F}{\partial x}(p)(x-a) + \frac{\partial F}{\partial y}(p)(y-b) + \frac{\partial F}{\partial z}(p)(z-c) = 0\right\} \subseteq \mathbb{P}^2 \text{ tal que } p \in \ell_{p,p}$$

En ambos casos, dado que $\deg(F) = 3$ existe un único punto $r \in E$ tal que $r \neq p, q$ y tal que

$$\ell_{p,q} \cap E = \{p, q, r\}$$

Dicho punto será denotado $r =: \psi(p, q) \in E$. Finalmente, observamos que si $f_{\ell_{p,q}} \in k[X, Y, Z]$ es el polinomio lineal tal que $V\left(f_{\ell_{p,q}}\right) = \ell_{p,q} \subseteq \mathbb{P}^2$, entonces su imagen en el cociente $S(E) \stackrel{\text{def}}{=} k[X, Y, Z]/\langle F\rangle$, que seguiremos denotando $f_{\ell_{p,q}}$, verifica que

$$\operatorname{div}\left(f_{\ell_{p,q}}\right) = p + q + \psi(p, q).$$