1. Ejercicios de Clase

Problema 1. *(Ejercicio 1, Pág. 71)* Sea $V_X \cong X \times \mathbb{A}^r$ fibrado trivial. Probar que $g_{ij}(x) = Id_r\ \forall i, j \in I$ son matrices de transición. En particular, $g_{ij}(x) \equiv 1$ son funciones de transición de $X \times \mathbb{A}^1$.

Problema 2. *(Ejemplo 3, Pág. 72)* Sea $f : Y \to X$ un morfismo regular y $E \xrightarrow{P} X$ un fibrado vectorial. Entonces $\Gamma(f) : H^0(X, E) \to H^0(Y, f^*E), s \mapsto (y \mapsto (y, s(f(y))))$ es k-lineal.

2. Discusión

Nota: Esta sección está fuertemente basada en el apunte de Andreas Gathmann acerca de Geometría Algebraica. En específico la Sección 11, páginas 85 a 88. Además, se sigue una explicación similar a la realizada por Richard E. Borcherds en su curso de geometría algebraica, clase 33. Ambos recursos son libremente accesibles a través de la plataforma online del departamento de matemáticas de la universidad técnica de Kaiserlautern, y YouTube respectivamente.

En esta parte, hablaremos de manera bastante informal acerca del hecho que **toda superficie cúbica suave en el espacio proyectivo contiene exactamente 27 rectas.** Nuestro objetivo será dar una idea de por qué esto es cierto para *toda* superficie cúbica, partiendo por el ejemplo de la cúbica de Fermat $X = V(x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) \subset \mathbb{P}^3$ (con $k = \mathbb{C}$).

Recordemos de clases dos hechos fundamentales para el desarrollo de la sección:

Lema. *La incrustación de Plücker es birregular sobre su imagen. Más aún, podemos representar a los elementos $W \in Gr(k, n)$ como el row span de una matriz $P \in M_{k\times n}(k)$. Los elementos p_{ij} son conocidos como las coordenadas de Plücker de W.*

Observación. *Dado que un sub-e.v. $W \cong k^K$ es lo mismo que $\mathbb{P}(W) \cong \mathbb{P}^{K-1}$ en $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^{n-1}$, podemos pensar a $Gr(k, V)$ como todos los subespacios lineales de $\mathbb{P}(V)$. En este caso escribiremos $\mathbb{G}(K-1, \mathbb{P}(V))$.*

Por lo tanto, si quisiéramos estudiar las *rectas* de las superficies cúbicas en el *espacio proyectivo*, sería útil describirlas en términos de sus coordenadas de Plücker en $\mathbb{G}(1, 3) = Gr(2, 4)$. Permutando las coordenadas de tal manera que la primera coordenada sea no-nula, las rectas L estarían dadas por el *row span* de las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_2 & a_3 \\ 0 & 1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

Por lo que

$$L = \{(s : t : a_2 s + b_2 t : a_3 s + b_3 t) \text{tal que} (s : t) \in \mathbb{P}^1\}$$

Intersectando esta restricción con la cúbica de Fermat, las L estarían completamente contenidas en X si y sólo si $s^3 + t^3 + (a_2 s + b_2 t)^3 + (a_3 s + b_3 t)^3 \equiv 0$. Esto define un sistema de ecuaciones

$$a_2^3 + a_3^3 = -1 \tag{1}$$
$$a_2^2 b_2 = -a_3^2 b_3 \tag{2}$$
$$a_2 b_2^2 = a_3 b_3^2 \tag{3}$$
$$b_2^3 + b_3^3 = -1 \tag{4}$$

Si todos los coeficientes fueran no nulos, $(2)^2/(3)$ resulta en $a_2^2 = -a_3^3$, contradiciendo (1). Por lo que (quizás reindexando las variables), asumiremos $a_2 = 0$, $a_3^3 = -1$, $b_3 = 0$, y $b_2^3 - 1$ y obtenemos una recta contenida en la cúbica. Por lo que, teniendo en cuenta permutaciones de las coordenadas, tenemos que las rectas estarán dadas por el *row span* de matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\omega \\ 0 & 1 & -\rho & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\omega & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\rho \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\rho \end{pmatrix}$$

donde ω, ρ son raíces cúbicas de la unidad. Contando, nos podemos dar cuenta de que son en total 27 rectas distintas. □

Para ver que esto es cierto en *toda* superficie cúbica, requeriremos un poco más de teoría. Dado lo condensado de esta clase, asumamos sin prueba el siguiente resultado.

Lema. *Sea $\mathbb{P}^{19}$ el espacio proyectivo de los polinomios homogéneos de grado 3 en x_0, x_1, x_2, x_3 salvo escalares, en donde el conjunto de las superficies cúbicas es un abierto denso U. Entonces, la conrrespondencia de incidencia $M := \{(X, L) : L \text{ es una recta contenida en } X\} \subset U \times Gr(2,4)$ es cerrada con respecto a la topología de Zariski de $U \times Gr(2,4)$ y localmente el grafo de una función continuamente diferenciable $U \to Gr(2,4)$ respecto a la topología clásica.*

Con esto, podemos llegar al resultado que queremos.

Teorema. *Toda superficie cúbica en el espacio proyectivo contiene exactamente 27 rectas.*

Demostración. Durante toda esta demostración, trabajaremos con la topolgía clásica. Sea $X \in U$ una cúbica suave, y sea $L \subset \mathbb{P}^3$ una recta arbitraria. Tendremos entonces dos casos:

1. Si L está en X, el lema anterior nos dice que existe una vecindad $V_L \times W_L$ de $(X, L) \in U \times Gr(2,4)$ en la cual la correspondencia de incidencia es el grafo de una función continuamente diferenciable. En particular, toda cúbica de V_L contiene exactamente una recta de W_L.

2. Si L no está en X, existe una vecindad abierta $V_L \times W_L$ de (X, L) tal que ninguna cúbica de V_L contiene una recta, dado que la correspondencia de incidencia es un cerrado de Zariski.

Ahora, si movemos L, como $Gr(2,4)$ es proyectiva, luego compacta; existen finitos W_L que cubren $Gr(2,4)$. Sea V la intersección de los V_L correspondientes a dichos W_L. Por construcción, en dicha vecindad V, todas las cúbicas contienen la misma cantidad de rectas. Como la cúbica es arbitraria, podemos concluir que la cantidad de rectas contenida en una cúbica suave es una función localmente constante en U.

Como sucede en la geometría algebraica que hemos aprendido hasta ahora, no es difícil ver que una propiedad local es también global. Como U es el complemento de un cerrado de Zariski en $\mathbb{P}^{19}$, y dicho cerrado es de codimensión al menos 1, si removemos éste cerrado de $\mathbb{P}^{19}$, el espacio restante (i.e. las cúbicas suaves) es conexo. Por lo tanto la función que cuenta las rectas contenidas la superficie es *globalmente* constante para todas las cúbicas suaves. Como probamos que la cúbica de Fermat contiene 27 rectas, todas las superficies cúbicas suaves en el espacio proyectivo contienen exactamente esa misma cantidad. $\square$