Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática

Pauta ayudantía 5 MAT-426

1 Problemas

1. Resolver la singularidad en $(0,0)$ de la variedad algebráica $X = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 x^2 = y^3\}$ utilizando blow-ups.
2. Resolver el lugar de indeterminación de la aplicación racional $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^1$ con $f([x,y,z]) = f([x,y])$ usando el blow-up de $\mathbb{P}^2$ en $[0,0,1]$.
3. Estudiar como lucen $X = V(x^2+y^2+z^2)$ e $Y = V(x^2+y^2+z^3)$ en el blow-up de $\mathbb{A}^3$ en $(0,0,0)$.

2 Soluciones

1. Haremos el blow-up de $\mathbb{A}^2$ en (x,y) (esto es hacer un blow-up en el origen) y luego veremos como luce la variedad $X = V(\{x^2 - y^3\}$ dentro de este blow-up. Para estudiar el blow-up de $\mathbb{A}^2$ en (x,y) debemos estudiar el grafo de la función $(x,y) \to [x,y]$ en $\mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$$\Gamma = \{((x,y),[u,v]) \in (\mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}) \times \mathbb{P}^1 :\ xv = yu\}$$

Al cerrar el grafo, obtenemos:

$$\overline{\Gamma}^{Zar} = \{((x,y),[u,v]) \in \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1 :\ xv = yu\}$$

Tenemos que $\epsilon : \widetilde{\mathbb{A}^2} \to \mathbb{A}^2$ tal que $\epsilon((x,y),[u,v]) = (x,y)$ Luego tenemos que observar $X \setminus \{(0,0)\}$ dentro de su blow-up, esto se entiende por medio de las siguientes ecuaciones:

$$\epsilon^{-1}(X \setminus \{(0,0)\}) = \{x^2 = y^3,\ xv = yu,\ (x,y) \neq (0,0)\}$$

Entonces la transformada estricta de X (ver X dentro del blow-up de $\mathbb{A}^2$) es:

$$\widetilde{X} := \overline{\epsilon^{-1}(X \setminus \{(0,0)\}}^{Zar} = \{x^2 = y^3,\ xv = yu\}$$

Para entender más esta variedad, tenemos que verla por cartas.
Si $v \neq 0$ y podemos asumir que $v = 1$ y obtener las ecuaciones:

$$x^2 = y^3,\ x = yu$$

Luego:

$$y^2u^2 = y^3,\ x = yu$$

Como $y \neq 0$ obtenemos:

$$y^2(u^2 - y) = 0,\ x = yu$$

Por lo tanto:

$$y^2 = 0,\ x = yu,\ o\ y = u^2,\ x = u^3$$

Obtenemos 2 componentes irreducibles:

$$\langle x, y\rangle \cup \langle y - u^2, x - u^3\rangle$$

Donde la transformada estricta de X vista en la carta donde $v \neq 0$ es:

$$\langle y - u^2, x - u^3\rangle$$

Notemos que esta variedad ya no es singular (está parametrizada por $u \to (u^3, u^2, u)$ y su derivada nunca se anula). Podemos seguir haciendo blow-ups en el origen hasta obtener una desingularización fuerte de nuestra variedad. Haremos nuevamente otro blow-up, ahora haremos el blow-up de $\widetilde{\mathbb{A}^2}$ en $\langle x, y, u\rangle$, esto lo veremos como el blow-up de $\mathbb{A}^3$ en el origen, haciendo el mismo procedimiento anterior tenemos que:

$$\widetilde{\mathbb{A}^3} = \{((x, y, u), [r, t, s] \in \mathbb{A}^3 \times \mathbb{P}^2) : \ xt = yr, \ xs = ur, \ ys = ut\}$$

Ahora veremos $y = u^2, x = u^3$ dentro de este blow-up. Si asumimos que $s = 1$ tenemos que $xt = yr, \ x = ur, \ y = ut$ y en consecuencia:

$$ut = u^2, \ ur = u^3$$
$$u(t - u) = 0, \ u(u^2 - r) = 0$$

Por lo tanto obtenemos que al ver $\langle y - u^2, x - u^3\rangle$ dentro de $\widetilde{\mathbb{A}^3}$ obtenemos:

$$\langle u - t, u^2 - r\rangle$$

Ahora veremos ambas variedades dentro de $\widetilde{\mathbb{A}^5}$ haciendo nuevamente un blow-up, tenemos ahora que:

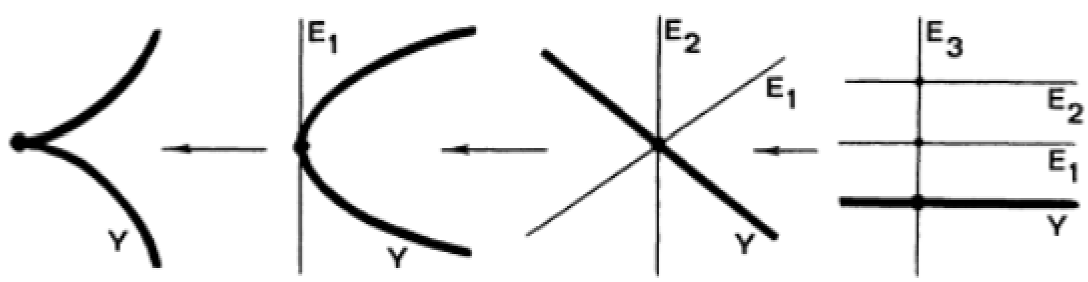
$$\widetilde{\mathbb{A}^5} = \{((x, y, u, r, t), [a, b, c, d, e] \in \mathbb{A}^5 \times \mathbb{P}^4 : \ ...\}$$

Si asumimos que $c = 1$ obtenemos que:

$$xb = ya, \ x = ua, \ xd = ra, \ xc = ta, \ y = ub, \ yd = rb, \ ye = tb, \ ud = r, \ ue = t, \ re = td$$

$$1 - e = 0, \ u - d = 0$$

Finalmente llegamos a que nuestra variedad y los conjuntos excepcionales de los blow-ups pasaron por el siguiente proceso:



2. Notemos que la función $f[x, y, z] = [x, y]$ no está bien definida en $[0, 0, 1]$, por lo que en realidad esta función es racional, ya que no está bien definida en todo el espacio. Así que lo que haremos es hacer un blow-up de $\mathbb{P}^2$ en $\langle x, y\rangle$, esto lo haremos al fijar $z \neq 0$, viendo $[x, y, 1] \to (x, y)$, y haciendo luego un blow-up afin en $\langle x, y\rangle$.
Sabemos que $\widetilde{\mathbb{A}^2} = \{((x, y), [u, v]) \in \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1 : \ xv = yu\}$, naturalmente tenemos que si vemos f en $\widetilde{\mathbb{A}^2}$ tenemos que $f((x, y), [u, v]) = [x, y]$ para $(x, y) \neq (0, 0)$, pero como $(x, y) \in [u, v]$ tenemos que de hecho $f((x, y), [u, v]) = [u, v]$ coincide con f y de hecho está bien definida aunque $(x, y) = (0, 0)$, por lo tanto vamos a extender f a una función $\tilde{f} : \tilde{\mathbb{P}^2} \to \mathbb{P}^1$,

   (a) Si $v \neq 0$ podemos asumir que $v = 1$ y entonces $x = yu$ y por lo tanto:
   $$\tilde{f}((x, y), [u, v]) = \tilde{f}((x, y), [u, 1]) = [u, 1]$$

   (b) Si $u \neq 0$ podemos asumir que $u = 1$ y tenemos que:
   $$\tilde{f}((x, y), [u, v]) = \tilde{f}((x, y), [1, v]) = \tilde{f}((x, y), [1, v]) = [1, v]$$

   Por lo tanto definimos que:
   $$\tilde{f}((0, 0), [1, v]) = [1, v]$$

Así tenemos que podemos extender $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^1$ a una función $\tilde{f} : \widetilde{\mathbb{P}^2} \to \mathbb{P}^1$ donde:
$$\tilde{f}([x, y, z], [u, v]) = \begin{cases} f([x, y, z]), & [x, y, z] \neq [0, 0, 1] \\ [u, 1], & [x, y, z] = [0, 0, 1], \ v \neq 0 \\ [1, v], & [x, y, z] = [0, 0, 1], \ u \neq 0 \end{cases}$$

Notemos que esta función es regular, ya que en cada abierto es polinomial.

3. Sabemos que el blow-up de $\mathbb{A}^3$ en (x, y, z) es:
$$\widetilde{\mathbb{A}^3} = \{((x, y, z), [u, v, w] \in \mathbb{A}^3 \times \mathbb{P}^2 : \ xv = yu, \ xw = zu, \ yw = zv\}$$
Si asumimos que $u = 1$ obtenemos que $xv = y, \ z = xw, \ yw = zv$. Entonces tendremos que:
$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + x^2v^2 + x^2w^2 = x^2(1 + v^2 + w^2)$$
Notemos que podemos ver esta variedad dentro de $\mathbb{A}^3$ nuevamente al hacer que:
$$x \to x, \ v \to y, \ w \to z$$
Y así obtener que nuestro blow-up en realidad es:
$$\epsilon_1 : \mathbb{A}^3 \to \mathbb{A}^3, \ (x, y, z) \mapsto (x, yx, zx)$$
Así tendremos que $\epsilon_1 : V(1 + y^2 + z^2) \to X$, por lo tanto, el blow-up del cono en (x) es un cilindro (esto tiene sentido por que al punto singular lo estamos dotando de $\mathbb{S}^1$, por lo tanto es como si "abrieramos" el cono). De hecho, tenemos que la preimagen del punto singular es:
$$\sigma_1^{-1}(0, 0, 0) = \langle 1 + y^2 + z^2, x\rangle$$

Esto corresponde al cilindro y a nuestro divisor excepcional.
De manera similar, usando el blow-up ϵ_3 pero ahora con Y tenemos que $x \to xz,\ y \to yz,\ z \to z$.
Si reemplazamos esto en a fórmula de Y obtenemos:

$$x^2 + y^2 + z^3 \to x^2z^2 + y^2z^2 + z^3 = z^2(x^2 + y^2 + z)$$

Entonces:

$$\sigma_3 : V(x^2 + y^2 + z, z) \to Y$$

Y entonces:

$$\sigma_3(0,0,0) = \langle x^2 + y^2 + z, z\rangle = \langle x^2 + y^2, z\rangle = \langle x + iy, z\rangle \cup \langle x - iy, z\rangle$$

Entonces tenemos que la preimagen del origen son 2 variedades irreducibles que se intersectan en un punto.
Con esto podemos introducir el concepto de singularidades de DuVal, las cuales tienen la siguiente estructura:

Name	Equation	Group	Resolution graph
A_n	$x^2 + y^2 + z^{n+1}$	cyclic $\mathbb{Z}/(n+1)$	$\circ - \circ \cdots \circ$
D_n	$x^2 + y^2z + z^{n-1}$	binary dihedral $\mathrm{BD}_{4(n-2)}$	$\circ - \circ - \circ \cdots \circ$ $\vert$ $\circ$
E_6	$x^2 + y^3 + z^4$	binary tetrahedral	$\circ - \circ - \circ - \circ - \circ$ $\vert$ $\circ$
E_7	$x^2 + y^3 + yz^3$	binary octahedral	$\circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ$ $\vert$ $\circ$
E_8	$x^2 + y^3 + z^5$	binary icosahedral	$\circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ$ $\vert$ $\circ$

Table 1: The Du Val singularities

Cada una de estas singularidades tiene asociada un grafo de Dynkin, el cual podemos entenderlo por cuantas intersecciones tienen las componentes irreducibles de nuestra variedad algebráica, por ejemplo, en el blow-up de A_2 (que corresponde a Y), tenemos una intersección entre ambas componentes irreducibles, lo cual podemos entenderlo como 2 nodos conectados.
Para más referencias sobre singularidades de DuVal puede visitar The DuVal singularities $A_n,\ D_n,\ E_6,\ E_7,\ E_8$ de Miles Reid.