

Ayudantía 4 (MAT426 2021-2)
Cristián Pérez Luengo
Universidad Técnica Federico Santa María

■ **1. Ejercicios de clases**

• **1.1**

- **1.1.1.** Sea $A \subset X$ un sub-conjunto irreducible en X , entonces la adherencia \overline{A} es irreducible.
- **1.1.2.** Sean $U, V \subset X$ abiertos irreducibles en X tales que $U \cap V \neq \emptyset$, entonces la unión $U \cup V$ es irreducible.

- **1.2.** Consideremos la variedad proyectiva obtenida mediante la imagen de la incrustación de Veronese

$$\nu_3 : \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^3, [x, y] \mapsto [x^3, x^2y, xy^2, y^3]$$

que es la curva $C \subset \mathbb{P}^3$ que está dada por las ecuaciones

$$z_0z_3 = z_1z_2, \quad z_1^2 = z_0z_2, \quad z_2^2 = z_1z_3$$

en \mathbb{P}^3 con coordenadas homogéneas $[z_0, \dots, z_3]$. Dicha curva es llamada la **cúbica torcida** (o twisted cubic) en \mathbb{P}^3 .

Demostrar que C es suave.

■ **2. Variedades Abelianas**

- **2.1. Grupos Algebraicos :** Un **grupo algebraico** es una variedad algebraica X junto con dos morfismos regulares

$$m : X \times X \rightarrow X \quad \text{e} \\ i : X \rightarrow X$$

Satisfaciendo las reglas usuales de la multiplicación e inversión en grupos.

Ejemplos:

- El grupo aditivo $\mathbb{G}_a(k, +) (\mathbb{A}^1)$
- El grupo aditivo $\mathbb{G}_a^n(k^n, +) (\mathbb{A}^n)$
- El grupo multiplicativo $\mathbb{G}_m(k^*, \times) (\mathbb{A}^1 \setminus \{0\})$
- $GL_n(k)$ matrices invertibles

- **Morfismos de grupos algebraicos :** Sean G y H dos grupos algebraicos. Decimos que una función $\phi : G \rightarrow H$ es un **morfismo de grupos algebraicos** si es un morfismo regular y un morfismo de grupos.
- **Acciones de grupos:** Una **acción** de un grupo algebraico G sobre una variedad algebraica X es un morfismo regular $\varphi : G \times X \rightarrow X$ que satisface las reglas usuales de la composición, es decir, $\varphi(g, \varphi(h, x)) = \varphi(gh, x) \quad \forall g, h \in G, \forall x \in X$.
Una acción proyectiva sobre una variedad $X \subset \mathbb{P}^n$ es una acción de un grupo G sobre \mathbb{P}^n tal que $\varphi(g, X) = X$ para todo $g \in G$.

Ejemplo :

$PGL_{n+1}(k)$ actúa sobre \mathbb{P}^n

- **Proposición:** Sea G un grupo algebraico, y supongamos que G es proyectivo e irreducible. Entonces, G es un grupo abeliano.
- **2.2. Variedades Abelianas.** Debido al resultado anterior, decimos que un grupo algebraico proyectivo e irreducible A es una **variedad abeliana**.