Ayudantía 3 (MAT426)

Benjamín Vega

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María

1. Sea $C \subseteq \mathbb{A}^3$ la imagen de la función regular $f : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^3,\ t \mapsto (t, t^2, t^3)$. Probar que C es una variedad algebraica afín, calcular $I(C) \subseteq k[X, Y, Z]$ y probar que $\mathscr{O}(C) \cong k[X]$.

   Solución: Vemos que por definición, $C = Im(f) \overset{\text{def}}{=} \{(x, y, z) \in \mathbb{A}^3 |\ y - x^2 = 0 \wedge z - x^3 = 0\}$ donde $y - x^2$ y $z - x^3$ son polinomios de $K[X, Y, Z]$. Entonces C es un conjunto cuyos elementos son los puntos en $\mathbb{A}^3$ que satisfacen estos dos polinomios y en particular $C = V(Y - X^2, Z - X^3) = V(\langle Y - X^2, Z - X^3\rangle)$ el cuál es un cerrado bajo la topología de Zariski, es decir, C es una variedad algebraica.
   Para calcular el ideal $I(C)$ basta notar que por el Teorema de los ceros de Hilbert (Hilbert Nullstellensatz) tenemos que $I(C) = I(V(\langle Y - X^2, Z - X^3\rangle)) = \sqrt{\langle Y - X^2, Z - X^3\rangle} = \langle Y - X^2, Z - X^3\rangle$ pues el ideal generado $\langle Y - X^2, Z - X^3\rangle$ es un ideal primo de $K[X, Y, Z]$ dado que $K[X, Y, Z]/\langle Y - X^2, Z - X^3\rangle \cong K[X]$ es un dominio de integridad, es decir, $\langle Y - X^2, Z - X^3\rangle$ es primo y entonces también es radical.
   Por último, recordemos que para $X \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad algebraica, se tiene que la sucesión

   $$0 \to I(X) \xrightarrow{\iota} \mathscr{O}(\mathbb{A}^n) \xrightarrow{res_X} \mathscr{O}(X) \to 0$$

   es exacta, y en particular nos dice que $\mathscr{O}(X) \cong \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)/I(X)$. Aplicando esto en C tenemos que $\mathscr{O}(C) \cong \mathscr{O}(\mathbb{A}^3)/I(C) \overset{\text{def}}{=} K[X, Y, Z]/\langle Y - X^2, Z - X^3\rangle \cong K[X]$.

2. Probar que la imagen del morfismo regular $f : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2,\ (x, y) \mapsto (x, xy)$ no es ni abierta ni cerrada respecto a la topología de Zariski.

   Solución: Recordemos que la topología de zariski en $\mathbb{A}^2$ se define a base de los conjuntos cerrados siendo estos las variedades algebraicas y definiendo los conjuntos abiertos como sus complementos.
   Notemos que por definición, la imagen de f es $Im(f) = \{(x, xy)|(x, y) \in \mathbb{A}^2\}$. Los elementos de este conjunto son dadas segun los siguientes tres casos: que ambas componentes X e Y sean distintas de 0, $Y = 0$ y $X = 0$.
   En el primer caso, la imagen de f cubre todo $\mathbb{A}^2$ excepto por los ejes coordenados. En el segundo caso tenemos que para $Y = 0$ la imagen de f es $f(x, 0) = (x, 0)$, es decir, todo el eje X. Por último, si $X = 0$, tenemos que la imagen de f será $f(0, y) = (0, 0)$ para todo $y \in K$. La unión de estos tres casos (vistos como conjuntos) es la imagen de f, es decir, el plano sin el eje Y pero con el origen.

   Denotando por Z a la imagen de f, vemos que ésta no es abierta pues su complemento Z^c es tal que su adherencia es $\overline{Z^c}^{Zar} \overset{\text{def}}{=} V(I(Z^c)) = \langle Y\rangle$, en particular, $Z^c \subsetneq \overline{Z^c}^{Zar}$ no es cerrado, entonces Z no es abierto. De forma análoga, Z tampoco es cerrado pues su adherencia $\overline{Z}^{Zar} = V(I(Z)) = \mathbb{A}^2$ es todo el plano, en donde es claro que $Z \subsetneq \mathbb{A}^2$ por lo que Z tampoco es cerrado.

3. Sea $X \subseteq \mathbb{A}^3$ la variedad algebraica afín dada por $V(I)$ con $I = \langle X^2 - YZ, XZ - X\rangle$. Determinar todas las componentes irreducibles de X.

   Solución: Tenemos que $X = V(I) = V(\langle X^2 - YZ, XZ - X\rangle)$. Recordemos que para $S, T \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$ se tiene que $V(S) \cup V(T) = V(ST)$ y que $V(S \cup T) = V(S) \cap V(T)$. Entonces

   $$V(\langle X^2 - YZ, XZ - X\rangle) = V(\langle X^2 - YZ\rangle) \cap (V(\langle X\rangle) \cup V(\langle Z - 1\rangle))$$

   donde denotaremos por Q al cono descrito por $X^2 = YZ$ y por P_1 y P_2 a los planos $X = 0$ y $Z = 1$ respectivamente de tal forma que $X = Q \cap (P_1 \cup P_2)$ (con el simple objetivo de reducir notación). Vemos que $X = (Q \cap P_1) \cup (Q \cap P_2)$.
   Por un lado, la intersección $Q \cap P_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{A}^n |\ x = 0 \wedge yz = 0\} = V(X, YZ)$, donde ocupando nuevamente las propiedades recordadas al comienzo tenemos que $V(X, YZ) = V(X) \cap (V(Y) \cup V(Z)) = (V(X) \cap V(Y)) \cup (V(X) \cap V(Z)) = V(X, Y) \cup V(X, Z)$, es decir, es la unión de los ejes Y y Z.
   Por otro lado, la otra intersección $Q \cap P_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{A}^n |\ z = 1 \wedge y = x^2\} = V(\langle Y - X^2, Z - 1\rangle)$ describe la parabola $y = x^2$ sobre el plano $z = 1$, donde vemos que esta tambien es una componente irreducible pues el cociente $K[X, Y, Z]/\langle Z - 1, Y - X^2\rangle \cong K[X]$ es un dominio de integridad.
   En resumen, las componentes irreducibles de X son $\langle X, Z\rangle$, $\langle X, Y\rangle$ y $\langle Z - 1, Y - X^2\rangle$.