Ayudantía 2 (Lema de Yoneda y Categorías Abelianas)

Profesor: Pedro Montero ; Ayudante: Nolberto Rivera

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María

Lema de Yoneda

En lo que sigue, sea $\mathscr{C}$ una categoría *localmente pequeña*, es decir, una categoría tal que para cualesquiera dos $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ se tiene que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ es un conjunto.

Definición. Sea $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$. Definimos el **functor de puntos** (o **functor de Yoneda**) contravariante dado por dicho A, que denotamos $h^A : \mathscr{C} \to \mathbf{Conj}$, como aquel functor (contravariante) que mapea objetos según

$$h^A(B) := \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, A),\ \forall B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C}),$$

y que, dados $B, C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, mapea cada morfismo $f : B \to C$ en la categoría $\mathscr{C}$ a

$$h^A(f) : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, A),\ \{g : C \to A\} \longmapsto \{g \circ f : B \to A\}$$

en $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Conj}}(h^A(C), h^A(B))$, su morfismo asociado en la categoría **Conj**.

Lema (de Yoneda, versión contravariante). Una versión general del presente Lema es como sigue. Sea $\mathrm{Fun}(\mathscr{C})$ la categoría de todos los functores contravariantes de la categoría $\mathscr{C}$, i.e., sus objetos son $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathbf{Conj}$, y sus morfismos son las transformaciones naturales. Así, el functor $\mathscr{C} \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathscr{C})$ dado por $A \mapsto h^A$ define una equivalencia entre $\mathscr{C}$ y la subcategoría completa de functores representables, i.e., aquellos isomorfos a algún h^A específico. Más específicamente, este functor es completamente fiel.

Probaremos la siguiente versión del Lema de Yoneda. Sean $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ y $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathbf{Conj}$ functor contravariante. Denotamos por $\mathrm{Nat}(h^A, F)$ la colección de todas las transformaciones naturales $\Phi : h^A \to F$. Así, tenemos que $F(A) \cong \mathrm{Nat}(h^A, F)$; en particular, existe una biyección entre los conjuntos $F(A)$ y $\mathrm{Nat}(h^A, F)$.

Idea Lema de Yoneda. Es posible recuperar un objeto de una categoría si conocemos todos los morfismos hacia él.

Demostración. Ocuparemos el siguiente esquema:

(a) Describir cómo actúa una transformación natural $\Phi : h^A \to F$ arbitraria en un par cualquiera de objetos $B, C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ y cada morfismo $f : B \to C$ en $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, C)$.

La transformación natural Φ, como sabemos, corresponde a un conjunto indexado en $\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ de morfismos en $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Conj}}(h^A(B), F(B))$ dentro de la categoría **Conj**, o sea, algo de la forma $\{\Phi_B : h^A(B) \longrightarrow F(B)\}_{B \in \mathscr{C}}$.

La única condición que se solicita para que una dicha colección de morfismos sea, en efecto, una transformación natural es que sean compatibles con los morfismos entre ellos, i.e., que para los $B, C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ y $f : B \to C$ arbitrarios del enunciado se cumpla que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C, A) \arrow[r, "h^A(f)"] \arrow[d, "\Phi_C"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, A) \arrow[d, "\Phi_B"] \\
F(C) \arrow[r, "F(f)"] & F(B)
\end{tikzcd}$$

(b) Con la notación del punto (a), deducir que para todo objeto $B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ y todo morfismo $f : B \to A$ en $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, A)$ se tiene

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, A) \arrow[r, "h^A(f)"] \arrow[d, "\Phi_A"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, A) \arrow[d, "\Phi_B"] \\
F(A) \arrow[r, "F(f)"] & F(B)
\end{tikzcd}$$

diagrama conmutativo.

Basta recordar que A pertenece a $\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, de modo que podemos reemplazar C (arbitrario) por A en el diagrama anterior.

(c) Se define $u \in F(A)$ como la imagen de Id_A vía Φ_A (i.e., $u = \Phi_A(\mathrm{Id}_A)$). Considerando el diagrama del punto (b), probar que $\Phi_B(f) = F(f)(u)$ para todo $f : B \to A$ en $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, A)$, y deducir que la transformación natural $\Phi : h^A \to F$ está completamente determinada por u.

Sean $B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ arbitrario, y una $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, A)$ cualquiera. Así,

$$\begin{aligned}
F(f)(u) &= F(f)(\Phi_A(\mathrm{Id}_A)) && \backslash\text{Por definición de } u \\
&= (F(f) \circ \Phi_A)(\mathrm{Id}_A) \\
&= (\Phi_B \circ h^A(f))(\mathrm{Id}_A) && \backslash\text{Por conmutatividad del diagrama anterior} \\
&= \Phi_B(h^A(f)(\mathrm{Id}_A)) \\
&= \Phi_B(\mathrm{Id}_A \circ f) && \backslash\text{Por definición de } h^A \\
&= \Phi_B(f)
\end{aligned}$$

con lo que, si $\Phi_A(\mathrm{Id}_A) = u$ para algún $u \in F(A)$, forzosamente se tendrá que $\Phi_B(f)$ vendrá dado por $F(f)(u)$ para cada $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, A)$, por cada $B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$.

Para deducir que Φ viene completamente determinada por u, basta ver que, por un lado, si para dos tales Φ y Φ' transformaciones naturales se tuviese que $\Phi_A(\mathrm{Id}_A) = \Phi'_A(\mathrm{Id}_A)$, ambos functores serían iguales por la cadena de ecuaciones arriba justificada, y, por el otro lado, si $\Phi_A(\mathrm{Id}_A) \neq \Phi'_A(\mathrm{Id}_A)$ entonces $\Phi_A \neq \Phi'_A$, con lo que $\Phi \neq \Phi'$.

(d) Probar que cada elemento $u \in F(A)$ define una transformación natural $\Phi : h^A \to F$ mediante la fórmula $\Phi_B(f) := F(f)(u)$, y concluir que

$$\mathrm{Nat}(h^A, F) \cong F(A).$$

Queda ver que para cada $u \in (A)$ se tiene que Φ definida por

$$\Phi_B(f) := F(f)(u),\ \forall B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C}),\ \forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, A)$$

de hecho nos entrega una transformación natural, o sea, que cumple con la conmutatividad del esquema detallado en la respuesta del punto (a), i.e., $\Phi_B \circ h^A(f) = F(f) \circ \Phi_C$, $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, C)$, $\forall B, C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$.

En efecto, dados $B, C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, C)$, tomando $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C, A)$ arbitrario se tiene que

$$\begin{aligned}
(\Phi_B \circ h^A(f))(g) &= \Phi_B(h^A(f)(g)) \\
&= \Phi_B(g \circ f) && \backslash\text{Por definición, } h^A(f)(g) = g \circ f \\
&= F(g \circ f)(u) && \backslash\text{Por definición, } \Phi_B(g \circ f) = F(g \circ f)(u) \\
&= (F(f) \circ F(g))(u) && \backslash F \text{ functor contravariante} \\
&= F(f)(F(g)(u)) \\
&= F(f)(\Phi_C(g)) && \backslash\text{Por definición, } \Phi_C(g) = F(g)(u) \\
&= (F(f) \circ \Phi_C)(g)
\end{aligned}$$

con lo que, en definitiva, $\Phi_B \circ h^A(f) = F(f) \circ \Phi_C$, de modo que Φ así definido es una transformación natural para todo $u \in F(A)$.

Así, la demostración está completa, pues, por un lado, para toda transformación natural $\Phi \in \mathrm{Nat}(h^A, F)$ existe un valor $u := \Phi_A(\mathrm{Id}_A) \in F(A)$, y, por el otro, dado $u \in F(A)$ existe una única $\Phi \in \mathrm{Nat}(h^A, F)$ tal que $u = \Phi_A(\mathrm{Id}_A)$; en conclusión,

$$\mathrm{Nat}(h^A, F) \cong F(A)$$

Categorías abelianas y functores exactos

Definición. Sea $\mathscr{C}$ una categoría. Decimos que $\mathscr{C}$ es una **categoría aditiva** si para todos $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ se tiene que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ es un *grupo abeliano*, y además se verifica que:

1. La composición
$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,C),\ (f,g) \longmapsto g \circ f$$
es bilineal.

2. Existe un (único) objeto $0 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ tal que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(0,0) = \{0\}$ es el grupo trivial con 1 elemento.

3. Para todos $A_1, A_2 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ existe un (único) objeto $B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ junto con morfismos $j_i : A_i \longrightarrow B$ (resp. $p_i : B \longrightarrow A_i$), con $j \in \{1,2\}$, que hacen de B la **suma directa** (resp. **producto**) de A_1 y A_2 en $\mathscr{C}$.

Más aún, dadas $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ categorías aditivas, un functor

$$F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$$

es llamado **functor aditivo** (covariante) si las aplicaciones inducidas

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A), F(B))$$

son morfismos de grupos para todo par de objetos $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$.

Observación. Para poder hablar de *sucesiones exactas*, necesitamos contar con la noción de kernel e imagen. Esta simple observación, motiva la definición más importante de esta sección.

Definición. Sea $\mathscr{C}$ una categoría aditiva. Decimos que $\mathscr{C}$ es una **categoría abeliana** si además cumple que:

4. Todo morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$ posee un kernel y un cokernel en $\mathscr{C}$, y la aplicación natural $\mathrm{Coim}(f) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}(f)$ es un isomorfismo.

Aquí, $\mathrm{Im}(f)$ es el kernel de la aplicación $B \longrightarrow \mathrm{coker}(f)$ y la coimagen $\mathrm{Coim}(f)$ es el cokernel de la aplicación $\ker(f) \longrightarrow A$. Luego, la condición (4) señala que para todo morfismo $f : A \longrightarrow B$ se tiene un diagrama

$$\begin{tikzcd}
\ker(f) \arrow[r, "\iota"] & A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & B \arrow[r, "\pi"] & \mathrm{coker}(f) \\
& & \mathrm{coker}(\iota) \arrow[r, "\sim"] & \ker(\pi) \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

que resumimos escribiendo "$A/\ker(f) \cong \mathrm{Im}(f)$" (i.e., el Teorema del Isomorfismo de Noether es un axioma).

Definición. Decimos que

$$A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3$$

es una **sucesión exacta** en $\mathscr{C}$ si $\ker(f_2) = \mathrm{Im}(f_1)$.

Ejemplo. Naturalmente, ya hemos encontrado en varias ocasiones la noción de categoría abeliana sin haberlo dicho explícitamente. La categoría **A-mod** de A-módulos es abeliana, y la sub-categoría de A-módulos finitamente generados es abeliana también.