Ayudantía 2 Mat-426

Teoría de haces y espacios anillados

Proposición 1. Sea $f : X \to Y$ una función continua entre espacios topológicos, y sea $\mathscr{F}$ (resp. $\mathscr{G}$) un prehaz en X (resp. Y).

1) Probar que si $\mathscr{F}$ es un haz en X, entonces $f_*\mathscr{F}$ es un haz en Y.

2) Dar un ejemplo en el que incluso si $\mathscr{G}$ es un haz en Y, no necesariamente $(f^{-1}\mathscr{G})_{\text{pre}}$ es un haz en X.
Indicación: Considerara $Y = \{\text{pt}\}$ un punto.

Demostración.
1) Sabemos que $f_*\mathscr{F}$ es un prehaz, por lo que solo basta verificar la condición de pegado y unicidad. Sea $\{V_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento por abiertos de $V \subseteq Y$ abierto. Como f es continua, $\{f^{-1}(V_i)\}_{i\in I}$ es un cubrimiento por abiertos del abierto $f^{-1}(V)$, y luego si $s_i \in f_*\mathscr{F}(V_i) := \mathscr{F}(f^{-1}(V_i))$ son secciones tales que $s_i|_{V_i\cap V_j} = s_j|_{V_i\cap V_j}$ para cada $i, j \in I$, el hecho de que $\mathscr{F}$ sea un haz implica la existencia de un $s \in \mathscr{F}(f^{-1}(V)) = f_*\mathscr{F}(V)$ tal que $s|_{V_i} = s_i$ para cada $i \in I$. Para verificar la unicidad el procedimiento es análogo: Si $\{V_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento por abiertos del abierto $V \subseteq Y$ y si $s \in f_*\mathscr{F}(V) = \mathscr{F}(f^{-1}(V))$ es una sección tal que $0 = s|_{V_i} := s|_{f^{-1}(V_i)}$, dado que $\{f^{-1}(V_i)\}_{i\in I}$ es un cubrimiento por abiertos de V y que $\mathscr{F}$ es un haz, necesariamente $s = 0$ en $\mathscr{F}(f^{-1}(V)) = f_*\mathscr{F}(V)$.

2) Consideremos $X = [0, 1] \cup [2, 3] \subseteq \mathbb{R}$ e $Y = \{p\}$ un punto. Sea $f : X \to Y$ una función continua y $\mathscr{G} := \underline{\mathbb{Z}}$ el haz de funciones localmente constantes sobre Y al grupo abeliano $\mathbb{Z}$. Observemos que, dado que $Y = \{p\}$ es un punto, el único abierto no vacío en Y es justamente $Y = \{p\}$, y en particular $f \equiv p$ es constante. Luego, si $U \subseteq$ X es un abierto no vacío y (s_1, V_1) y (s_2, V_2) son dos gérmenes en Y (con $s_i \in \underline{\mathbb{Z}}(V_i)$) tales que $(s_1, V_1) \sim (s_2, V_2)$, entonces $V_1 = V_2 = Y = \{p\}$ y en particular $s_1 = s_2$ (pues $\{p\}$ es el único abierto en Y). En otras palabras, las clases de equivalencia de gérmenes están únicamente determinadas por la elección de un $s \in \underline{\mathbb{Z}}(\{p\})$ función constante. Se sigue que $(f^{-1}\mathscr{G})_{\text{pre}} \cong \mathbb{Z}$, y luego $(f^{-1}\mathscr{G})_{\text{pre}}$ es el prehaz de funciones constantes en X. Dado que X no es conexo, el prehaz anterior no es un haz. ■

Funciones regulares y morfismos

Proposición 2. Consideremos la parábola $C \subseteq \mathbb{A}^2$ dada por

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 \text{ tal que } y = x^2\}.$$

Probar que $\mathcal{I}(C) = \langle X^2 - Y\rangle$ en $\mathscr{O}(\mathbb{A}^2) = k[X, Y]$, y deducir que C es una subvariedad afín irreducible. Demostrar que las funciones $f : C \to \mathbb{A}^1, (x, y) \mapsto x$ y $g : \mathbb{A}^1 \to C,\ t \mapsto (t, t^2)$ son morfismos regulares e inversas una de la otra. En particular, f es un isomorfismo. Finalmente, describir

$$f^* : \mathscr{O}(\mathbb{A}^1) \to \mathscr{O}(C)$$

el pullback de f.

Demostración. Sabemos que si $P(X, Y) = X^2 - Y$, por definición y lo visto en clases respectivamente, se tiene $C = V(P) = V(\langle X^2 - Y\rangle)$. Luego, por el Hilbert-Nullstellensatz notemos que $\mathcal{I}(C) = \mathcal{I}(V(\langle X^2 - Y\rangle)) = \sqrt{\langle X^2 - Y\rangle}$. Así, si probamos que $\langle X^2 - Y\rangle$ es primo, tendríamos que $\langle X^2 - Y\rangle$ es radical y en particular C sería irreducible. Probaremos, por tanto, que el cociente $\mathscr{O}(\mathbb{A}^2)/\langle X^2 - Y\rangle$ es un dominio de integridad. Así, notemos que

$$\begin{aligned} \pi : \mathscr{O}(\mathbb{A}^2) &\twoheadrightarrow \mathscr{O}(\mathbb{A}^2)/\langle X^2 - Y\rangle \\ X &\mapsto [X] \\ Y &\mapsto [X^2] = [X]^2, \end{aligned}$$

lo cual, dado que X e Y generan $\mathscr{O}(\mathbb{A}^2)$ (como anillo), tenemos que $[X]$ genera $\mathscr{O}(\mathbb{A}^2)/\langle X^2 - Y\rangle$ (como anillo). Luego,

$$\begin{aligned} \mathscr{O}(\mathbb{A}^2)/\langle X^2 - Y\rangle &\hookrightarrow k[X] \\ [X] &\mapsto X \end{aligned}$$

es una inyección. Como $k[X]$ es un dominio de integridad, $\mathscr{O}(\mathbb{A}^2)/\langle X^2 - Y\rangle$ también lo será, como se deseaba. El hecho de que f y g sean morfismos regulares es directo de la definición (caracterización) de funciones regulares. Por otro lado, si $(t, t^2) \in C$, entonces

$$g \circ f(t, t^2) = g(t) = (t, t^2) \implies g \circ f = \mathrm{id}_C,$$

y de manera análoga, si $x \in \mathbb{A}^1$, entonces

$$f \circ g(x) = f(x, x^2) = x \implies f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{A}^1}.$$

Se sigue que f y g son inversas una de la otra. Finalmente, si $\varphi \in \mathscr{O}(\mathbb{A}^1)$ es un morfismo regular y $(t, t^2) \in C$, entonces

$$f^*(\varphi)(t, t^2) := \varphi(f(t, t^2)) = \varphi(t) = \varphi,$$

esto es, $f^* = \mathrm{res}_C : \mathscr{O}(\mathbb{A}^1) \to \mathscr{O}(C)$. ■

Teoría espectral y álgebras de Banach

El objetivo de esta sección es mostrar que el Teorema de Gelfand-Mazur, enunciado en el lenguaje del análisis funcional y con importantes consecuencias dentro de esta rama, nos da un equivalente o símil al Nullstellensatz débil de Hilbert, enunciado de una manera algebraica y con destacados "corolarios" como el Nullstellensatz fuerte. Recordaremos, por tanto, algunas definiciones y resultados algebraicos.

Lema 1. *Sea A un dominio y sean $a_1, ..., a_n \in A$. Entonces, $A[X_1, ..., X_n]/\langle X_1 - a_1, ..., X_n - a_n\rangle \cong A$. En particular, si A es un cuerpo, entonces $\langle X_1 - a_1, ..., X_n - a_n\rangle$ es maximal.*

Demostración. Defina $a = (a_1, .., a_n) \subseteq \mathbb{A}^n$ y

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_a : A[x_1, ..., x_n] &\to A \\ f &\mapsto f(a). \end{aligned}$$

Entonces $\ker(\mathbf{ev}_a) = \langle X_1 - a_1, ..., X_n - a_n\rangle$ por división euclideana, por lo que $\langle X_1 - a_1, ..., X_n - a_n\rangle$ es ideal. Además, $\mathrm{Im}(\mathbf{ev}_a) = A$ y luego por isomorfismo de Noether se obtiene el resultado. ■

Teorema 2 (Nullstellensatz débil)**.** *Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado y sea $I \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{A}^n) := k[X_1, ..., X_n]$ un ideal maximal. Entonces, existen $a_1, .., a_n \in k$ tal que*

$$I = \langle X_1 - a_1, ..., X_n - a_n\rangle.$$

Una consecuencia fundamental del teorema anterior, el cual motiva esta seccción, es que nos entrega una correspondencia biyectiva entre puntos de k^n y el espectro maximal de $\mathbb{A}^n$ definido como $\mathrm{Specm}(\mathbb{A}^n) := \{\mathfrak{m} \subseteq \mathbb{A}^n : \mathfrak{m} \text{ es ideal maximal}\}$, mediante

$$\begin{aligned} I &\mapsto (a_1, .., a_n) \\ \langle X_1 - b_1, ..., X_n - b_n\rangle &\leftarrow\!\shortmid (b_1, .., b_n), \end{aligned}$$

con $I = \langle X_1 - a_1, ..., X_n - a_n\rangle$.

Introduzcamos ahora definiciones y proposiciones necesarias para enunciar el Teorema de Gelfand-Mazur y algunos corolarios:

Definición 3 (Álgebra de Banach)**.** Sea A una $\mathbb{C}-$álgebra con unidad (no necesariamente conmutativa), es decir, sea A un $\mathbb{C}$-espacio vectorial que a la vez es un anillo con unidad. Decimos que A es un álgebra de Banach si:

1. A posee una norma $\|\cdot\|$ y A es completa bajo dicha norma (ie, toda sucesión de Cauchy converge).
2. Para cada $x, y \in A$,
$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\| \quad \text{y} \quad \|e\| = 1.$$

Ejemplo 4. Sea X un $\mathbb{C}$-espacio de Banach. Definimos $\mathscr{B}(X)$ como el conjunto de operadores lineales acotados de X en X, es decir,

$$\mathscr{B}(X) := \{T : X \to X \quad | \quad T \text{ es lineal acotado}\},$$

donde

$$\|T\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|.$$

Entonces, $\mathscr{B}(X)$ es un Álgebra de Banach con la composición como producto, pues

$$\|T \circ G(x)\| \leq \|T\|\|Gx\| \leq \|T\|\|G\|\|x\|,$$

y luego $\|T \circ G\| \leq \|T\|\|G\|$.

En lo que sigue, consideraremos a A un álgebra de Banach.

Definición 5. Sea $x \in A$. Decimos que x es **invertible** si existe $x^{-1} \in A$ tal que $xx^{-1} = x^{-1}x = e$. Al conjunto de elementos invertibles en A lo denotamos por $G(A)$.

Definición 6. Dado $x \in A$, definimos el **espectro** de x, denotado como $\sigma(x)$ como el conjunto

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - x \notin G(A)\}.$$

Además, definimos el **radio espectral** de x como el real (extendido) $\rho(x) := \sup\{|\lambda| \in \mathbb{C} : \lambda \in \sigma(x)\}$.

Ejemplo 7. Si consideramos $M_n(\mathbb{C})$ la $\mathbb{C}$-álgebra de matrices, entonces

$$G(M_n(\mathbb{C})) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : \det(A) \neq 0\}.$$

En particular, $\sigma(A)$ es el conjunto de valores propios de A y $\rho(A)$ es el mayor módulo de los valores propios de A.

Ejemplo 8. Sea E un $\mathbb{C}$-espacio de Banach (de dimensión finita o infinita). Definimos el conjunto de operadores compactos $\mathcal{K}(E)$ como

$$\mathcal{K}(E) := \{T : E \to E \quad | \quad T \text{ es un operador lineal acotado y } \overline{T(\overline{B_E})} \text{ es compacto fuerte}\}.$$

Luego, si $T \in \mathcal{K}(E)$ entonces $\sigma(T)$ es numerable.

Teorema 9. *Sea A un álgebra de Banach y $x \in A$. Entonces:*

1. *$\sigma(x)$ es compacto y no vacío. En particular, $\rho(x) \in \mathbb{R}^{\geq 0}$.*
2. *$\rho(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = \inf\{\|x^n\|^{1/n} : n \in \mathbb{N}\}$.*

Teorema 10 (Gelfand-Mazur)**.** *Sea A un álgebra de Banach tal que $G(A) = A \setminus \{0\}$. Entonces, A es isométricamente isomorfa (como $\mathbb{C}$-álgebra) a $\mathbb{C}$. Esto es, existe un morfismo de álgebras biyectivo e isométrico.*

Demostración. Consideremos el morfismo de $\mathbb{C}$-álgebras

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\to A \\ \lambda &\mapsto \lambda e. \end{aligned}$$

Es claro que dicho morfismo es inyectivo e isometría, pues si $\lambda \neq 0$, λe tiene inverso $\lambda^{-1} e$, y además

$$\|\lambda e\| = |\lambda| \|e\| = |\lambda|.$$

Para la sobreyectividad, basta notar que si $x \in A$, entonces $\sigma(x)$ es no vacío y luego existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda e - x \notin G(A)$, esto es, $\lambda e - x = 0$ y luego $x = \lambda e$. ∎

Antes de probar una consecuencia importante del teorema de Gelfand-Mazur, el cual nos mostrará el porqué dicho teorema es un símil al Nullstellensatz, necesitamos algunos resultados previos. Para ello, en lo que sigue consideraremos a A un álgebra de Banach conmutativa.

Proposición 11. *$G(A)$ es un conjunto abierto.*

Lema 12. *Sea $\mathfrak{m} \subseteq A$ un ideal maximal. Entonces $\mathfrak{m}$ es cerrado.*

Demostración. Sea $x \in \overline{\mathfrak{m}}$ y $\{x_n\} \subseteq \mathfrak{m}$ tal que $x_n \to x$. Entonces, para cada $y \in A$ se tiene que $x_n y \in \mathfrak{m}$ y además

$$\|x_n y - xy\| = \|(x_n - x)y\| \leq \|x_n - x\| \|y\| \to 0,$$

es decir, $xy \in \overline{\mathfrak{m}}$ y luego $\overline{\mathfrak{m}} \supseteq \mathfrak{m}$ es ideal. Dado que $\mathfrak{m}$ es maximal, necesariamente $\mathfrak{m} = \overline{\mathfrak{m}}$ o bien $\overline{\mathfrak{m}} = A$. No obstante, este último caso no puede pasar, ya que $e \in \overline{\mathfrak{m}}$ y dado que $G(A)$ es abierto, existiría $x \in \mathfrak{m}$ suficientemente cercano a e tal que $x \in G(A)$, y luego $\mathfrak{m} = A$, lo que es contradicción. ∎

Proposición 13. *Sea $M \subseteq A$ un ideal. Entonces, si M es cerrado, la $\mathbb{C}-$álgebra cociente A/M puede ser dotada de una norma que la hace una álgebra de Banach y en particular hace a la proyección $\pi : A \to A/M$ un morfismo de $\mathbb{C}$-álgebras continuo con norma $\|\pi\| = 1$*

Demostración. La demostración de la completitud de dicho espacio y la continuidad de π se pueden encontrar en [Bre11], pero la norma que se utiliza en el cociente es

$$\|[x]\| := \operatorname{dist}(x, M) = \inf_{m \in M} \|x - m\|.$$

Así, para la propiedad multiplicativa, basta utilizar la continuidad de π, pues, si $n, m \in M$ y $x, y \in A$ se tiene

$$\begin{aligned}\|\pi(x)\pi(y)\| = \|\pi(x-m)\pi(y-n)\| = \|\pi((x-m)(y-n))\| &\leq \|\pi\|\|(x-m)(y-m)\| \\ &= \|(x-m)(y-n)\| \\ &\leq \|x-m\|\|y-n\|,\end{aligned}$$

y luego, al tomar ínfimo sobre m y sobre n obtenemos

$$\|[x][y]\| = \|\pi(x)\pi(y)\| \leq \|[x]\|\|[y]\|.$$

■

Teorema 14. *Sea $\triangle$ el conjunto de morfismos $T : A \to \mathbb{C}$ no nulos. Entonces:*

1. *Para cada ideal maximal $\mathfrak{m} \subseteq A$, existe $T \in \triangle$ tal que $\ker(T) = \mathfrak{m}$.*
2. *De manera recíproca, si $T \in \triangle$, entonces $\ker(T)$ es un ideal maximal.*

Demostración. (1.) Consideremos la aplicación $\pi : A \to A/\mathfrak{m}$ con $\ker(\pi) = \mathfrak{m}$. Dado que $\mathfrak{m}$ es maximal, $A/\mathfrak{m}$ es un álgebra de Banach. Ahora bien, si $\pi(a) \in (A/\mathfrak{m}) \setminus \{0\}$, entonces $a \in \mathfrak{m}^c$. En particular, si definimos $I := \mathfrak{m} + \langle a \rangle$, entonces I es un ideal que contiene estrictamente a $\mathfrak{m}$, luego $I = A$ y por tanto existen $m \in \mathfrak{m}$, $x \in A$ tal que $m + ax = e$. Luego,

$$\pi(a)\pi(x) = \pi(ax) = \pi(m + ax) = \pi(e),$$

y luego $\pi(a)$ es invertible. Así, por Gelfand-Mazur obtenemos que $A/\mathfrak{m} \cong \mathbb{C}$ y tenemos una aplicación $\widehat{\pi} : A \to \mathbb{C}$ inducida con $\ker(\widehat{\pi}) = \mathfrak{m}$.
(2.) El conjunto $\ker(T)$ es un ideal de codimensión (1), y luego es maximal. ■

De manera análoga al Nullstellensatz débil de Hilbert, el teorema anterior nos entrega una correspondencia biyectiva entre ideales maximales de una $\mathbb{C}$-álgebra conmutativa con unidad y el conjunto de morfismos de $\mathbb{C}-$álgebras no nulos $\{T : A \to \mathbb{C}\}$ mediante

$$\begin{aligned}\mathfrak{m} &\mapsto T \\ \ker(h) &\leftarrow\!\shortmid h,\end{aligned}$$

donde $\ker(T) = \mathfrak{m}$.

Referencias

[Bre11] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Universitext. Springer, New York, 2011.

[Mon19] Pedro Montero. *Álgebra Abstracta.* Universidad Técnica Federico Santa María, 2019.

[Vis19] Piero Visconti. *Álgebras de Banach y teoría espectral.* Universidad Técnica Federico Santa María, 2019.