Profesor: Pedro Montero
Ayudante: Sebastián Fuentes

Pauta Ayudantía 1 Geomtetría Algebraica

Teoría de Haces

16 de agosto de 2023

Problema 1. Sea X un espacio topológico y sea G un grupo abeliano. Dado un punto $x_0 \in X$, definimos el prehaz rascacielos $i_{x_0}(G)$ por

$$i_{x_0}(G)(U) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } x_0 \notin U \\ G & \text{si } x_0 \in U \end{cases}$$

para todo abierto $U \subseteq X$. Probar que $i_{x_0}(G)$ es un haz.

Demostración. Comencemos en primer lugar por definir las restricciones del prehaz. Para ello consideramos una inclusión de abiertos $V \subseteq U$ en el espacio X, y vemos que dependiendo de si estos abiertos contienen (o no) al punto $x_0 \in X$, se tienen las siguientes posibilidades para la restricción:

$$r_{U,V} : i_{x_0}(G)(U) \to i_{x_0}(G)(V), \qquad r_{U,V} = \begin{cases} \mathrm{id}_G & \text{si} \quad x_0 \in V \\ 0 & \text{si} \quad x_0 \in U \setminus V \\ 0 & \text{si} \quad x_0 \notin U \end{cases}$$

Ahora que disponemos de un prehaz, veamos entonces que se satisfacen las condiciones de pegado y unicidad. Para ello fijamos $U \subseteq X$ abierto y $\{U_i\}_{i\in I}$ cubrimiento abierto de U, ie, $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ y cada $U_i \subseteq X$ es abierto.
Pegado: Consideremos secciones $s_i \in i_{x_0}(G)(U_i)$ tales que:

$$s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j} \quad \forall i,j \in I$$

Notemos en primer lugar que si $x_0 \notin U$, entonces dado que $i_{x_0}(G)(U) = \{0\}$, tendríamos $s_i = 0 \ \forall i \in I$, y basta considerar la sección $s = 0$ en $i_{x_0}(G)(U)$ que claramente verifica $s|_{u_i} = s_i$ para todo $i \in I$.
Supongamos directamente entonces que $x_0 \in U$. Escribamos $I = I_0 \cup I_1$ como una unión disjunta donde

$$I_0 := \{i \in I : x_0 \in U_i\}$$

Consideremos $i_0 \in I_0$, y denotemos $g := s_{i_0} \in i_{x_0}(G)(U_{i_0}) = G$. Para cualquier $i \in I_0$ la condición de compatibilidad nos da entonces que:

$$s_{i_0} = s_{i_0}|_{U_0\cap U_i} = s_i|_{U_{i_0}\cap U_i} = s_i \quad \Rightarrow \quad g = s_i \quad \forall i \in I_0$$

simplemente por definición de las restricciones.Por otro lado, si $i \in I_1$ entonces es directo por deifnición que $s_i = 0$. Luego, $s = g \in i_{x_0}(G)(U)$ verifica que $s|_{U_i} = s_i \ \forall i \in I$.
Unicidad: Sea $s \in i_{x_0}(G)(U)$ tal que $s|_{U_i} = 0$ para todo $i \in I$. Si $x_0 \notin U$ directamente tenemos $s = 0$. Si $x_0 \in U$, entonces existe $i \in I$ tal que $x_0 \in U_i$ y $s = s|_{U_i} = 0$. Así, concluimos que $i_{x_0}(G)$ es un haz. ☐

Problema 2. Sean $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ haces de grupos abelianos en X. Para un conjunto abierto $U \subseteq X$, considere el grupo abeliano $\mathrm{Hom}(\mathscr{F}|_U, \mathscr{G}|_U)$ de morfismos de haces. Demuestre que el prehaz $U \mapsto \mathscr{H}\!om(\mathscr{F}|_U, \mathscr{G}|_U)$, el cual denotaremos $\mathscr{H}\!om(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ es un haz.

Demostración. En primer lugar, es claro que $\mathrm{Hom}(\mathscr{F}|_U, \mathscr{G}|_U)$ es un grupo abeliano, pues como $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ son haces de grupos abelianos, sus restricciones a un abierto U también lo son , y tiene sentido sumar funciones con valores en $\mathscr{G}(V)$ para un abierto $V \subseteq U$. Es claro que las restricciones de este prehaz serán consideradas como:

$$\mathscr{H}\!om(\mathscr{F}|_U, \mathscr{G}|_U) \to \mathrm{Hom}(\mathscr{F}|_V, \mathscr{G}|_V), \quad \sigma \mapsto \sigma|_V$$

donde $\sigma|_V$ es simplemente $\sigma|_V(W) = \sigma(W) \ \forall W \subseteq V$ abierto. Probemos a continuación que se tienen las condiciones de haz. Fijamos entonces $U \subseteq X$ abierto, $\{U_i\}_{i\in I}$ cubrimiento abierto de U.
Unicidad: Sea $\sigma : \mathscr{F}|_U \to \mathscr{G}|_U$ tal que $\sigma_i := \sigma|_{U_i} = 0$ para todo $i \in I$. El objetivo entonces es probar que $\sigma = 0$, ie, $\sigma(V) = 0$ para todo abierto $V \subseteq U$. Fijamos entonces un abierto $V \subseteq U$, y notamos que la colección $\{V_i := V \cap U_i\}_{i\in I}$ define un cubrimiento abierto de V. Dado que σ_i es un morfismo de haces, disponemos del siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}|_{U_i}(V) \arrow[r, "\sigma_i(V)"] \arrow[d] & \mathscr{G}|_{U_i}(V) \arrow[d] \\
\mathscr{F}|_{U_i}(V_i) \arrow[r, "\sigma_i(V_i)"] & \mathscr{G}|_{U_i}(V_i)
\end{tikzcd}$$

Lo anterior entonces nos permite decir que para cada sección $s \in \mathscr{F}|_U(V) = \mathscr{F}|_{U_i}(V)$ tenemos que:

$$\sigma(V)(s)|_{V_i} = \sigma_i(V)(s)|_{V_i} = \sigma_i(V_i)(s|_{V_i}) = 0 \quad \forall i \in I$$

y como $\mathscr{G}$ es un haz la condición anterior implica que $\sigma(V)(s) = 0$ en $\mathscr{G}(V)$. Dado que esto ocurre para todo $s \in \mathscr{F}|_U(V)$ llegamos a que $\sigma(V) = 0$, y finalmente obtenemos $\sigma = 0$.
Pegado: Sean $\sigma_i : \mathscr{F}|_{U_i} \to \mathscr{G}|_{U_i}$ para todo $i \in I$ secciones verificando que:

$$\sigma_i|_{U_i \cap U_j} = \sigma_j|_{U_i \cap U_j} \quad \forall i, j \in I$$

Si $V \subseteq U$ es un abierto, de la misma que forma que antes la colección $\{V_i := V \cap U_i\}_{i \in I}$ es un cubrimiento abierto de V. Sea $s \in \mathscr{F}|_U(V)$, y denotemos $s_i := s|_{V_i}, t_i := \sigma_i(V_i)(s_i)$. Dado que los σ_i son morfismos de haces, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}|_{U_i}(V_i) \arrow[r, "\sigma_i(V_i)"] \arrow[d] & \mathscr{G}|_{U_i}(V_i) \arrow[d] \\
\mathscr{F}|_{U_i \cap U_j}(V_i \cap V_j) \arrow[r, "\sigma_i(V_i \cap V_j)"] & \mathscr{G}|_{U_i \cap U_j}(V_i \cap V_j)
\end{tikzcd}$$

Obtenemos entonces que:

$$t_i|_{V_i \cap V_j} := \sigma_i(V_i)(s|_{V_i})|_{V_i \cap V_j} = \sigma_i(V_i \cap V_j)(s|_{V_i \cap V_j}) = \sigma_j(V_i \cap V_j)(s|_{V_i \cap V_j}) = \sigma_j(V_j)(s|_{V_j})|_{V_i \cap V_j} =: t_j|_{V_i \cap V_j} \quad \forall i, j \in I$$

y como $\mathscr{G}$ es un haz, el axioma de pegado de $\mathscr{G}$ nos da la existencia de una sección $t \in \mathscr{G}|_U(V)$ verificando que $t|_{V_i} = t_i$ para todo $i \in I$. Así, podemos definir la aplicación:

$$\sigma(V) : \mathscr{F}|_U(V) \to \mathscr{G}|_U(V), \quad s \mapsto t$$

donde t es la sección construida a partir de s mediante el argumento anterior. Esta construcción se hizo de manera arbitraria para abiertos $V \subseteq U$, por lo que hemos obteniedo una familia de morfismos la cual define entonces un morfismo de haces $\sigma : \mathscr{F}|_U \to \mathscr{G}|_U$. Es directo ver que esta familia es un morfismo de haces pues está construido a partir de los σ_i que ya son morfismos de haces y las restricciones son las mismas. Finalmente, por construcción tenemos que $\sigma|_{U_i} = \sigma_i$ para todo $i \in I$. $\square$

Ejercicio. (Ver Hartshorne II.1.2) Sea X espacio topológico y $\{\mathscr{F}^i\}_{i \in I}$ una familia de haces grupos abelianos sobre X. Demuestre que la sucesión de haces y morfismos:

$$\ldots \mathscr{F}^{i-1} \xrightarrow{\varphi^{i-1}} \mathscr{F}^i \xrightarrow{\varphi^i} \mathscr{F}^{i+1} \to \ldots$$

es exacta si y sólo si para todo $x \in X$ la sucesión

$$\ldots \mathscr{F}_x^{i-1} \xrightarrow{\varphi_x^{i-1}} \mathscr{F}^i{}_x \xrightarrow{\varphi_x^i} \mathscr{F}_x^{i+1} \to \ldots$$

inducida en los stalks es exacta.

Problema 3. Sean $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ categorías en las cuales se tiene una noción de sucesión exacta (más adelante, categorías abelianas). Decimos que un functor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es exacto por izquierda si para toda sucesión exacta $0 \to A_1 \to A_2 \to A_3$ en $\mathscr{C}$, entonces $0 \to F(A_1) \to F(A_2) \to F(A_3)$ es exacta en $\mathscr{D}$.
Consideremos un espacio topológico X, y una sucesión exacta:

$$0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}''$$

de haces de grupos abelianos sobre X. Demuestre que para todo $U \subseteq X$ abierto, el functor de secciones $\Gamma(U, \cdot)$ es exacto por la izquierda, ie, la sucesión de grupos abelianos:

$$0 \to \Gamma\left(U, \mathscr{F}'\right) \to \Gamma(U, \mathscr{F}) \to \Gamma\left(U, \mathscr{F}''\right)$$

es exacta.

Demostración. Denotemos los morfismos de la sucesión por $\varphi : \mathscr{F}' \to \mathscr{F}, \psi : \mathscr{F} \to \mathscr{F}''$. La sucesión obtenida al aplicar $\Gamma(U, \cdot)$ es entonces:

$$0 \to \mathscr{F}'(U) \xrightarrow{\varphi_U} \mathscr{F}(U) \xrightarrow{\psi_U} \mathscr{F}''(U)$$

Es directo notar que φ_U es inyectivo pues φ es inyectivo y el prehaz $\ker(\varphi)$ es directamente un haz. Así, la única condición que es necesario verificar es que $\ker(\psi_U) = \operatorname{Im}(\varphi_U)$.Gracias al ejercicio anterior, para cada $x \in U$ tenemos una sucesión exacta de grupos abelianos:

$$0 \to \mathscr{F}'_x \to \mathscr{F}_x \to \mathscr{F}''_x$$

La exactitud anterior se lee entonces de la siguiente forma:

$$\psi_x(\varphi_x(s_x)) = \psi(\varphi(s))_x = 0 \qquad \forall x \in U, \forall s \in \mathscr{F}'(U)$$

Así, dada $s \in \mathscr{F}'(U)$, en torno a cada $x \in U$ existe un abierto $x \in V_x \subseteq U$ tal que $\psi_U(\varphi_U(s))|_{V_x} = 0$ en $\mathscr{F}''(V_x)$. Entonces, como disponemos de un cubrimiendo de U en donde la sección de $\psi_U(\varphi_U(s)) \in \mathscr{F}''(U)$ se anula, por propiedad de haz tenemos $\psi_U(\varphi_U(s)) = 0$, de donde $\operatorname{Im}(\varphi_U) \subseteq \ker(\psi_U)$. Sea ahora $t \in \ker(\psi_U)$. En particular esto implica que $\psi_x(t_x) = 0$, ie, el gérmen $t_x \in \ker(\psi_x)$. Por la exactitud de la sucesión de stalks tenemos entonces que existe $s_x \in \mathscr{F}'_x$ tal que $t_x = \varphi_x(s_x) = \varphi(s)_x$. Realizando este procedimiento en cada punto $x \in U$, obtenemos un cubrimiento abierto $U = \bigcup_{i \in I} V_i$ junto con secciones $s_i \in \mathscr{F}'(V_i)$ verificando $\varphi_{V_i}(s_i) = t|V_i$. Esto nos lleva a notar que:

$$\varphi_{V_i \cap V_j}(s_i|_{V_i \cap V_j}) = t|_{V_i \cap V_j} = \varphi_{V_i \cap V_j}(s_j|_{V_i \cap V_j}) \quad \forall i, j \in I$$

Como φ es un morfismo de haces inyectivo, obtenemos la condición de compatibilidad:

$$s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j} \quad \forall i, j \in I$$

y el hecho que $\mathscr{F}'$ sea un haz nos da la existencia de $s \in \mathscr{F}'(U)$ tal que $s|_{V_i} = s_i$. Finalmente, como

$$\varphi_U(s)|_{V_i} = \varphi_{V_i}(s|_{V_i}) = t|V_i \quad \forall i \in I$$

el axioma de unicidad en $\mathscr{F}$ nos da que $\varphi_U(s) = t$. Así concluimos que $\ker(\psi(U)) \subseteq \operatorname{Im}(\varphi(U))$. $\square$